

高等教育公共基础课精品系列教材

# 高等数学 (二)

(第2版)

主编 / 董银丽



 北京理工大学出版社  
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 高等数学(二)

(第2版)

主 编 董银丽  
副主编 任翠萍 马明远 张新锋  
参 编 徐 威 吴 睿

版权专有 侵权必究

---

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学. 二 / 董银丽主编. —2 版. —北京: 北京理工大学出版社, 2019. 12

ISBN 978-7-5682-8056-3

I. ①高… II. ①董… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020) 第 005530 号

---

---

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市华骏印务包装有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 9.5

字 数 / 218 千字

版 次 / 2019 年 12 月第 2 版 2019 年 12 月第 1 次印刷

定 价 / 29.00 元

责任编辑 / 多海鹏

文案编辑 / 孟祥雪

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 李志强

---

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

# 前言



本书的主要内容是多元函数微分学、积分学、微分方程和级数，内容的广度与深度达到工科类本科数学基础课程教学基本要求，可作为高等学校本科高等数学课程的教材。

在原版的基础上，内容设计注重与数学建模相融合，注重应用型案例的补充，对某些内容做了适当的精简介绍，习题配置进一步充实、丰富。通过本次修订，书稿的内容更加充实完善，能够更好地满足教学的需求。

参加本书编写工作的有（按照章节编写次序介绍）：西安欧亚学院任翠萍、张新锋，负责编写第一章、第二章、第三章和第八章的内容；西安欧亚学院董银丽、徐威，负责编写第四章、第五章、第九章和第十章的内容；西安欧亚学院吴睿、马明远，负责编写第六章、第七章、第十一章和 MATLAB 的数学实验内容。本书的编写得到了学院领导、分院领导和同事的支持与鼓励，在此表示感谢！

由于编者水平有限，书中存在的不足之处，希望广大读者批评指正。

# 目 录

<b>第七章 微分方程</b> .....	1
第一节 微分方程的基本概念.....	1
第二节 可分离变量的微分方程.....	4
第三节 一阶线性微分方程.....	9
第四节 可降阶的二阶微分方程 .....	12
第五节 二阶线性微分方程解的结构 .....	15
第六节 二阶常系数齐次线性微分方程 .....	17
第七节 二阶常系数非齐次线性微分方程 .....	20
第八节 数学建模—微分方程的应用举例 .....	24
总习题七 .....	28
<b>第八章 多元函数的微分法及其应用</b> .....	30
第一节 多元函数的基本概念 .....	30
第二节 偏导数 .....	34
第三节 全微分及其应用 .....	38
第四节 多元复合函数的求导法则 .....	41
第五节 隐函数的求导公式 .....	43
第六节 多元函数微分学的几何应用 .....	46
第七节 方向导数与梯度 .....	51
第八节 多元函数的极值及其求法 .....	54
总习题八 .....	58
<b>第九章 重积分</b> .....	60
第一节 二重积分的概念与性质 .....	60
第二节 直角坐标系下二重积分的计算法 .....	64
第三节 极坐标系下二重积分的计算 .....	71
第四节 三重积分的概念及计算方法 .....	76
总习题九 .....	80
<b>第十章 曲线积分与曲面积分</b> .....	81
第一节 对弧长的曲线积分 .....	81

---

第二节	对坐标的曲线积分	85
第三节	格林公式及其应用	91
第四节	对面积的曲面积分	97
第五节	对坐标的曲面积分	101
	总习题十	107
<b>第十一章</b>	<b>无穷级数</b>	<b>109</b>
第一节	常数项级数的概念和性质	109
第二节	常数项级数的审敛法	112
第三节	幂级数	116
第四节	函数展开成幂级数	120
第五节	傅里叶级数	124
	总习题十一	129
	习题参考答案	131

# 第七章 微分方程

研究事物的运动变化规律，可以通过建立描写运动变化规律的函数关系进行。然而，在许多实际问题中，与问题有关的变量之间的函数关系往往不能直接建立，只能根据问题的具体含义和有关知识，得到待求函数及其导数（或微分）之间的关系式，这样的关系式就是微分方程。从微分方程中把待求函数解出来，就叫作微分方程的求解。本章先介绍微分方程的有关概念，然后着重讲解几类微分方程的求解方法，并介绍微分方程的一些简单应用。

## 第一节 微分方程的基本概念

### 【课前导读】

微分方程 (Differential Equation, DE) 是一种数学方程，用来描述某一类函数与其导数之间的关系。微分方程的解是一个符合方程的函数。而在初等数学的代数方程里，其解是常数值。

为了说明微分方程的有关概念，我们先看两个简单的例子。

**例 1** 一曲线通过点  $(1, 2)$ ，且在该曲线上任一点  $M(x, y)$  处的切线的斜率为  $2x$ ，求该曲线的方程。

**解** 设所求曲线的方程为  $y=f(x)$ 。根据导数的几何意义，可知未知函数  $y=f(x)$  应满足关系式（称为微分方程）

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \quad (7.1.1)$$

此外，未知函数  $y=f(x)$  还应满足下列条件： $x=1$  时， $y=2$ ，简记为

$$y|_{x=1} = 2. \quad (7.1.2)$$

把式 (7.1.1) 两端积分，得（称为微分方程的通解）

$$y = \int 2x dx,$$

即

$$y = x^2 + C, \quad (7.1.3)$$

其中  $C$  是任意常数。

把条件“ $x=1$  时， $y=2$ ”代入式 (7.1.3)，得

$$2 = 1^2 + C,$$

由此得出  $C=1$ 。把  $C=1$  代入式 (7.1.3)，得所求曲线方程（称为微分方程满足条件的解）

$$y = x^2 + 1.$$

**例 2** 列车在平直线路路上以  $20 \text{ m/s}$ （相当于  $72 \text{ km/h}$ ）的速度行驶，当制动时列车获得加速度  $-0.4 \text{ m/s}^2$ 。求开始制动后多长时间列车才能停住以及列车在这段时间里行驶了多少路程。

**解** 设列车在开始制动  $t \text{ s}$  后时行驶了  $s \text{ m}$ 。根据题意，反映制动阶段列车运动规律的函数  $s=s(t)$  应满足关系式

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.4. \quad (7.1.4)$$

此外, 未知函数  $s=s(t)$  还应满足下列条件:  $t=0$  时,  $s=0$ ,  $v=\frac{ds}{dt}=20$ . 简记为

$$s|_{t=0} = 0, s'|_{t=0} = 20. \quad (7.1.5)$$

把式 (7.1.4) 两端积分一次, 得

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1; \quad (7.1.6)$$

再积分一次, 得

$$s = -0.2t^2 + C_1t + C_2, \quad (7.1.7)$$

这里  $C_1, C_2$  都是任意常数.

把条件  $v|_{t=0}=20$  代入式 (7.1.6), 得  $C_1=20$ ;

把条件  $s|_{t=0}=0$  代入式 (7.1.7), 得  $C_2=0$ .

把  $C_1, C_2$  的值代入式 (7.1.6) 及式 (7.1.7), 得

$$v = -0.4t + 20, \quad (7.1.8)$$

$$s = -0.2t^2 + 20t. \quad (7.1.9)$$

在式 (7.1.8) 中令  $v=0$ , 得到列车从开始制动到完全停住所需的时间

$$t = \frac{20}{0.4} = 50(\text{s}).$$

再把  $t=50$  代入式 (7.1.9), 得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{m}).$$

综合以上两个例子, 我们介绍几个关于微分方程的基本概念.

### 1. 微分方程

**定义 1** 表示未知函数、未知函数的导数 (或微分) 与自变量之间的关系的方程叫作微分方程. 例如: 例 1 中的关系式含有未知函数  $y(x)$  的一阶导数, 例 2 中的关系式含有未知函数  $s(t)$  的二阶导数, 它们都是微分方程. 又如:  $\frac{dy}{dx}=2xy$ ,  $ydx+xdy=2$ ,  $y''+y^3=x$ ,  $\frac{dy}{dx}+y\sin x+\cos x=0$ ,  $y''+2x^3y'-3y=e^x$  都是微分方程. 这些方程中所有未知函数的自变量都是一个, 换句话说, 所讨论的未知函数都是一元函数, 这类微分方程称为常微分方程. 而未知函数是多元函数的微分方程称为偏微分方程. 本书仅讨论常微分方程, 简称为微分方程.

### 2. 微分方程的阶

**定义 2** 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数, 叫作微分方程的阶.

例如微分方程  $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$  为三阶微分方程,  $y^{(4)} - 4y''' + 5y = \sin 2x$  为四阶微分方程,  $y^{(n)} + 1 = 0$  为  $n$  阶微分方程.

$n$  阶微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{或} \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

### 3. 微分方程的解

**定义 3** 满足微分方程的函数 (把函数代入微分方程能使该方程成为恒等式) 叫作该微分方程的解. 确切地说, 设函数  $y=\varphi(x)$  在区间  $I$  上有  $n$  阶连续导数, 如果在区间  $I$  上,

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0,$$

那么函数  $y = \varphi(x)$  就叫作微分方程  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  在区间  $I$  上的解.

(1) 通解.

如果微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 则这样的解叫作微分方程的通解.

(2) 初始条件.

用于确定通解中任意常数的条件, 称为初始条件. 例如, 当  $x = x_0$  时,  $y = y_0$ ,  $y' = y'_0$ . 一般写成  $y|_{x=x_0} = y_0$ ,  $y'|_{x=x_0} = y'_0$ .

(3) 特解.

确定了通解中的任意常数以后, 就得到微分方程的特解. 即不含任意常数的解.

(4) 初值问题.

求微分方程满足初始条件的解的问题称为初值问题.

例如, 求微分方程  $y' = f(x, y)$  满足初始条件  $y|_{x=x_0} = y_0$  的解的问题, 记为

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$$

#### 4. 积分曲线

微分方程的解的图形是一条曲线, 叫作微分方程的积分曲线.

**例 3** 验证: 函数  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$  是微分方程  $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$  的解.

**解** 求所给函数的导数:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt = -k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt). \end{aligned}$$

将  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  及  $x$  的表达式代入所给方程, 得

$$-k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0.$$

这表明函数  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$  满足方程  $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ , 因此所给函数是所给方程的解.

**例 4** 已知函数  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$  ( $k \neq 0$ ) 是微分方程  $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$  的通解, 求满足初始条件  $x|_{t=0} = A$ ,  $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0$  的特解.

**解** 由条件  $x|_{t=0} = A$  及  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ , 得  $C_1 = A$ , 再由条件  $x'|_{t=0} = 0$ , 及  $x'(t) = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$ , 得  $C_2 = 0$ .

把  $C_1$ 、 $C_2$  的值代入  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$  中, 得

$$x = A \cos kt.$$

### 习题 7-1

1. 指出下列微分方程的阶数:

(1)  $(y')^2 + 2yy' = 3x$ ;

(2)  $y'' + (y')^3 = 2x - y$ ;

$$(3) (x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0; \quad (4) y''' + (y')^2 = 0.$$

2. 下列各题中, 所给函数是否对应微分方程的通解, 为什么?

$$(1) y' = 2xy, y = e^{x^2};$$

$$(2) y' = 2xy, y = Ce^{x^2};$$

$$(3) y'' + y = 0, y = C\cos x;$$

$$(4) y'' + y' = 1, y = C_1 + C_2 e^{-x} + x.$$

3. 在下列各题中, 验证所给函数是对应微分方程的特解:

$$(1) x^2 y' = y, y|_{x=1} = 1, y = e^{1-\frac{1}{x}};$$

$$(2) xy' = 2y, y|_{x=1} = 5, y = 5x^2;$$

$$(3) y'' - 2y' + y = 0, y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 1, y = (2-x)e^x.$$

4. 下列函数哪些是微分方程  $y' = y$  的通解?

$$(1) y = e^x; (2) y = e^x + C; (3) y = Ce^x; (4) \ln y = x + C.$$

## 第二节 可分离变量的微分方程

### 【课前导读】

微分方程的类型是多种多样的, 它们的解法也各不相同. 从本节开始我们将根据微分方程的不同类型给出相应的解法. 本节我们将介绍可分离变量微分方程以及一些可以化为这类方程形式的微分方程, 如齐次方程等.

### 一、可分离变量的微分方程

一般地, 形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (7.2.1)$$

的一阶微分方程称为可分离变量的一阶微分方程.

当  $g(y) \neq 0$  时, 方程 (7.2.1) 可写为

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \quad (7.2.2)$$

这样一来, 变量  $y$  与  $x$  便被分离在等号的两端了.

设  $f(x)$  与  $g(x)$  都连续, 求解方程 (7.2.1), 就是要寻找函数  $y = y(x)$ , 将它代入方程 (7.2.1) 后, 能使此方程成为恒等式. 从而, 当  $g(y) \neq 0$  时, 就有

$$\frac{y'(x)dx}{g[y(x)]} \equiv f(x)dx,$$

两端对  $x$  积分, 便得

$$\int \frac{y'(x)dx}{g[y(x)]} \equiv \int f(x)dx + C.$$

在解微分方程时, 为了突出任意常数  $C$ , 常把  $\int f(x)dx$  中所含的任意常数  $C$  明确写出来. 根据不定积分的第一换元法, 得

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \quad (7.2.3)$$

由式 (7.2.3) 所确定的隐函数  $y = y(x)$  就是方程 (7.2.2) 的通解. 事实上, 由以上

推导可以看出, 满足方程 (7.2.2) 的解  $y=y(x)$  必满足方程 (7.2.3); 反之, 对式 (7.2.3) 两端微分便得式 (7.2.2), 这说明满足式 (7.2.3) 的解也必满足式 (7.2.2), 而且, 由式 (7.2.3) 所确定的隐函数中又含有一个任意常数, 所以是通解. 这种通过分离变量后对两端分别积分来求解微分方程的方法, 称为分离变量法.

如果存在常数  $y_0$  使  $g(y_0)=0$ , 那么将  $y=y_0$  代入方程 (7.2.1), 两端均为零. 这说明  $y=y_0$  也是方程 (7.2.1) 的一个解. 在许多情况下, 这个解可以包含在前面所得到的通解中, 即  $y=y_0$  可由式 (7.2.3) 中让  $C$  取某特定值得到.

**可分离变量的微分方程的解法:**

第一步: 分离变量, 将方程写成  $g(y)dy=f(x)dx$  的形式;

第二步: 两端积分,  $\int g(y)dy = \int f(x)dx$ , 设积分后得  $G(y)=F(x)+C$ ;

第三步: 求出由  $G(y)=F(x)+C$  所确定的隐函数  $y=\Phi(x)$  或  $x=\Psi(y)$ .

$G(y)=F(x)+C$ ,  $y=\Phi(x)$  或  $x=\Psi(y)$  都是方程的解, 其中  $G(y)=F(x)+C$  称为隐式(通)解.

**例 1** 求微分方程  $\frac{dy}{dx}=2xy$  的通解.

**解** 此方程为可分离变量方程, 分离变量后得

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx,$$

两端积分得

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx,$$

即

$$\ln |y| = x^2 + C_1,$$

从而

$$y = \pm e^{x^2+C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^2}.$$

因为  $\pm e^{C_1}$  仍是任意常数, 把它记作  $C$ , 便得所给方程的通解为  $y=Ce^{x^2}$ .

**例 2** 铀的衰变速度与当时未衰变的铀原子的含量  $M$  成正比. 已知  $t=0$  时铀的含量为  $M_0$ , 求在衰变过程中铀含量  $M(t)$  随时间  $t$  变化的规律.

**解** 铀的衰变速度就是  $M(t)$  对时间  $t$  的导数  $\frac{dM}{dt}$ . 由于铀的衰变速度与其含量成正比, 故得微分方程

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M,$$

其中  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) 是常数,  $\lambda$  前的负号表示当  $t$  增加时  $M$  单调减少, 即  $\frac{dM}{dt} < 0$ .

由题意, 初始条件为  $M|_{t=0} = M_0$ . 将方程分离变量得

$$\frac{dM}{M} = -\lambda dt,$$

两端积分, 得

$$\int \frac{dM}{M} = \int (-\lambda) dt,$$

即  $\ln M = -\lambda t + \ln C$ , 也即  $M = Ce^{-\lambda t}$ . 由初始条件, 得  $M_0 = Ce^0 = C$ , 所以铀含量  $M(t)$  随时间  $t$  变化的规律为

$$M = M_0 e^{-\lambda t}.$$

**例 3** 设降落伞从跳伞塔下落后, 所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时速度为零. 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

**解** 设降落伞下落速度为  $v(t)$ . 降落伞所受外力为  $F = mg - kv$  ( $k$  为比例系数). 根据牛顿第二运动定律  $F = ma$ , 得函数  $v(t)$  应满足的方程为

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

初始条件为  $v|_{t=0} = 0$ . 方程分离变量, 得  $\frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m}$ ,

两端积分, 得

$$\int \frac{dv}{mg - kv} = \int \frac{dt}{m},$$

$$-\frac{1}{k} \ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + C_1,$$

即

$$v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t} \left( C = -\frac{e^{-kC_1}}{k} \right).$$

将初始条件  $v|_{t=0} = 0$  代入通解得  $C = -\frac{mg}{k}$ , 于是, 降落伞下落速度与时间的函数关系为  $v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$ .

## 二、齐次方程

如果一阶微分方程  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  中的函数  $f(x, y)$  可写成  $\frac{y}{x}$  的函数, 即  $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , 则称该方程为齐次方程.

**齐次方程的解法:**

在齐次方程  $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  中, 令  $u = \frac{y}{x}$ , 即  $y = ux$ , 有

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

分离变量, 得

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

两端积分, 得

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

求出积分后, 再用  $\frac{y}{x}$  代替  $u$ , 便得所给齐次方程的通解.

**例 4** 解方程  $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$ .

解 原方程可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1},$$

因此原方程是齐次方程. 令  $\frac{y}{x} = u$ , 则

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

于是原方程变为

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1},$$

即

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u - 1},$$

分离变量, 得

$$\left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}.$$

两端积分, 得  $u - \ln|u| + C = \ln|x|$ , 或写成  $\ln|xu| = u + C$ .

以  $\frac{y}{x}$  代上式中的  $u$ , 便得所给方程的通解为

$$\ln|y| = \frac{y}{x} + C.$$

**例 5** 设河边点  $O$  的正对岸为点  $A$ , 河宽  $OA = h$ , 两岸为平行直线, 水流速度为  $a$ , 有一鸭子从点  $A$  游向点  $O$ , 设鸭子 (在静水中) 的游速为  $b$  ( $b > a$ ), 且鸭子游动方向始终朝着点  $O$ . 求鸭子游过的迹线的方程.

**解** 设水流速度为  $\mathbf{a}$  ( $|\mathbf{a}| = a$ ), 鸭子游速为  $\mathbf{b}$  ( $|\mathbf{b}| = b$ ), 则鸭子实际运动速度为  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

取点  $O$  为坐标原点, 河岸朝顺水方向为  $x$  轴,  $y$  轴指向对岸 (图 7-2-1), 设在时刻  $t$  鸭子位于点  $P(x, y)$ , 则

鸭子运动速度  $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ , 故有  $\frac{dx}{dy} = \frac{v_x}{v_y}$ .

又由于  $\mathbf{a} = (a, 0)$ , 而  $\mathbf{b} = b \overrightarrow{PO}_o$ . 其中  $\overrightarrow{PO}_o$  为与  $\overrightarrow{PO}$  同

方向的单位向量. 由  $\overrightarrow{PO} = -(x, y)$ , 故  $\overrightarrow{PO}_o = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$ , 于是  $\mathbf{b} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x,$

$y)$ , 从而

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \left(a - \frac{bx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{by}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

由此得微分方程

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_x}{v_y} = -\frac{a\sqrt{x^2 + y^2}}{by} + \frac{x}{y},$$

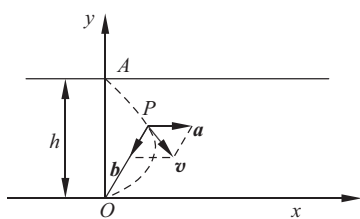


图 7-2-1

即 
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a}{b} \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{x}{y}.$$

令  $\frac{x}{y} = u$ , 则  $x = yu$ ,  $\frac{dx}{dy} = y \frac{du}{dy} + u$ , 代入上面的方程, 得

$$y \frac{du}{dy} = -\frac{a}{b} \sqrt{u^2 + 1},$$

分离变量得

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = -\frac{a}{by} dy,$$

积分得

$$\operatorname{arsh} u = -\frac{a}{b} (\ln y + \ln C),$$

即  $u = \operatorname{sh} \ln(Cy)^{-\frac{a}{b}} = \frac{1}{2} \left[ (Cy)^{-\frac{a}{b}} - (Cy)^{\frac{a}{b}} \right]$ , 于是

$$x = \frac{y}{2} \left[ (Cy)^{-\frac{a}{b}} - (Cy)^{\frac{a}{b}} \right] = \frac{1}{2C} \left[ (Cy)^{1-\frac{a}{b}} - (Cy)^{1+\frac{a}{b}} \right].$$

将  $y = h$  时  $x = 0$  代入上式, 得  $C = \frac{1}{h}$ , 故鸭子游过的迹线方程为

$$x = \frac{h}{2} \left[ \left(\frac{y}{h}\right)^{1-\frac{a}{b}} - \left(\frac{y}{h}\right)^{1+\frac{a}{b}} \right], \quad 0 \leq y \leq h.$$

## 习题 7-2

1. 讨论: 下列方程中哪些是可分离变量的微分方程?

(1)  $y' = 2xy$ ; (2)  $3x^2 + 5x - y' = 0$ ; (3)  $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ ;

(4)  $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ ; (5)  $y' = 10^{x+y}$ ; (6)  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ .

2. 用分离变量法求下列微分方程的通解:

(1)  $\frac{dy}{dx} = xy^2$ ; (2)  $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$ ;

(3)  $x dy - y dx = 0$ ; (4)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ;

(5)  $\frac{dy}{dx} = 2^{x+y}$ ; (6)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 3x}{\cos y}$ ;

(7)  $x dy - y \ln y dx = 0$ ; (8)  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ .

3. 求解下列齐次微分方程的通解:

(1)  $(2x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$ ; (2)  $xy' = y \ln \frac{y}{x}$ ;

(3)  $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0$ ; (4)  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ,  $y|_{x=-1} = 2$ .

### 第三节 一阶线性微分方程

#### 一、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (7.3.1)$$

的一阶微分方程称为一阶线性微分方程.

如果  $Q(x) \equiv 0$ , 则方程称为齐次线性方程, 否则方程称为非齐次线性方程.

方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$  叫作对应于非齐次线性方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  的齐次线性方程.

1. 齐次线性方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$  的解法

齐次线性方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$  是可分离变量方程. 分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

两端积分, 得

$$\ln |y| = -\int P(x)dx + C_1,$$

即

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (C = \pm e^{C_1}). \quad (7.3.2)$$

式 (7.3.2) 是齐次线性方程的通解 (积分中不再加任意常数).

**例 1** 求方程  $(x-2)\frac{dy}{dx} = y$  的通解.

**解** 这是齐次线性方程, 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-2},$$

两端积分得

$$\ln |y| = \ln |x-2| + \ln C,$$

方程的通解为

$$y = C(x-2).$$

2. 非齐次线性方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  的解法

用常数变易法将齐次线性方程通解中的常数  $C$  换成  $x$  的未知函数  $u(x)$ , 得

$$y = u(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

设想上式为非齐次线性方程的通解, 代入非齐次线性方程确定  $u(x)$ .

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} - u(x)e^{-\int P(x)dx}P(x) + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

化简得  $u'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ , 即  $u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$ , 于是非齐次线性方程的通解

为

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[ \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right], \quad (7.3.3)$$

或

$$y = C e^{-\int P(x) dx} + e^{-\int P(x) dx} \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx. \quad (7.3.4)$$

式 (7.3.4) 表明, 非齐次线性方程的通解等于对应的齐次线性方程通解与非齐次线性方程的一个特解之和.

**注** 式 (7.3.2) 和式 (7.3.3) 常作为一阶线性齐次和非齐次微分方程的通解公式来记忆, 在解微分方程时可直接使用.

**例 2** 求方程  $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$  的通解.

**解** 方程中  $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ ,  $Q(x) = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ , 直接利用式 (7.3.3), 则方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \left(-\frac{2}{x+1}\right) dx} \left[ \int (x+1)^{\frac{5}{2}} e^{\int \left(-\frac{2}{x+1}\right) dx} dx + C \right] \\ &= (x+1)^2 \left( \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx + C \right) = (x+1)^2 \left[ \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C \right]. \end{aligned}$$

## 二、伯努利方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \quad (7.3.5)$$

的微分方程称为伯努利方程. 这里要求  $n \neq 0$  或  $n \neq 1$  是因为: 当  $n=0$  时, 方程实际上是线性非齐次方程; 当  $n=1$  时, 方程实际上是线性齐次方程. 伯努利方程可以通过变量代换化成线性方程来求解.

**伯努利方程的解法:**

以  $y^n$  除方程 (7.3.5) 的两边, 得

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \quad (7.3.6)$$

引入新的未知函数  $z = y^{1-n}$ , 则

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

用  $(1-n)$  乘方程 (7.3.6) 的两端, 并将上式代入, 得线性方程

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

**例 3** 求方程  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a(\ln x)y^2$  的通解.

**解** 以  $y^2$  除方程的两端, 得

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = a \ln x,$$

上式可改写为

$$-\frac{d(y^{-1})}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = a \ln x,$$

令  $z = y^{-1}$ , 则上述方程化为

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -a \ln x,$$

这是一个线性方程, 它的通解为

$$z = x \left[ C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right],$$

以  $y^{-1}$  代  $z$ , 得所求方程的通解为

$$yx \left[ C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right] = 1.$$

利用变量代换, 某些方程可以化为可分离变量的方程, 或化为已知其求解方法的方程类型.

**例 4** 解方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$ .

**解** 若把所给方程变形为

$$\frac{dx}{dy} = x + y,$$

即为一阶线性方程, 则按一阶线性方程的解法可求得通解. 但这里用变量代换来解所给方程.

令  $x+y=u$ , 则  $y=u-x$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$ . 代入原方程, 得

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u},$$

分离变量得

$$\frac{u}{u+1} du = dx,$$

两端积分得

$$u - \ln |u+1| = x + C,$$

以  $u=x+y$  代入上式, 即得

$$y - \ln |x+y+1| = C \quad \text{或} \quad x = C_1 e^y - y - 1 \quad (C_1 = \pm e^{-C}).$$

### 习题 7-3

1. 求下列线性微分方程的通解:

(1)  $y' + y = 1$ ;

(2)  $y' + 3y = 5$ ;

(3)  $y' + 2xy = x$ ;

(4)  $y' - 2y = x + 2$ ;

(5)  $xy' - 3y = x^4$ ;

(6)  $xy' - y = \frac{x}{\ln x}$ ;

(7)  $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ ;

(8)  $y' - y \tan x = \sin x$ ;

(9)  $\frac{dy}{dx} \cos^2 x + y = \tan x$ ;

(10)  $y' + y \cos x = \cos x$ ;

(11)  $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ ;

(12)  $(1+y) dx + [x - 3(1+y)] dy = 0$ .