

高等职业教育公共基础课通用教材

高等数学

(课程思政改革版)

王亚凌 廖建光 / 主编

高等数学

(课程思政改革版)

主 编 王亚凌 廖建光
副主编 王 佩 曾彩霞
张冬莲 柳 琦
主 审 唐立新

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 : 课程思政改革版 / 王亚凌, 廖建光主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2019.9

ISBN 978-7-5682-7643-6

I. ①高… II. ①王… ②廖… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 220480 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京侨友印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 13.5

字 数 / 312 千字

版 次 / 2019 年 9 月第 1 版 2019 年 9 月第 1 次印刷

定 价 / 42.00 元

责任编辑 / 多海鹏

文案编辑 / 孟祥雪

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 施胜娟

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

前 言

为深入学习贯彻全国高校思想政治工作会议精神，充分发挥课堂主渠道在高校思想政治工作中的作用，使各类课程与思想政治理论课同向同行，形成协同效应，本书是依据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育数学课程教学基本要求》，在结合高职教育特点、发展趋势及我们前期教材已有成果的基础上，精心编撰而成的，力求发挥高等数学的文化育人、知识基础和技术应用这三大功能，在选择教学内容和要求时坚持“立德树人”“必需、够用”和适用的原则，突出用数学建模的方法，培养学生提出问题、分析问题和解决问题的能力。

在新一轮课改的今天，对我们高职数学的教学来说具有极大的挑战性，数学教育的文化性、人文性日益受到重视，高职数学教育究竟应向学生传达什么样的信息，难道仅仅是解题方法与技巧、运算能力与思维的训练吗？不完全是，数学应作为一种文化传承的工具，传承人类智慧与文明。尤其要明智地持有哲理性强的数学教育观，缺乏这一点就会疏远学习者或阻碍其能力的培养。在知识与能力，认知与情感，理性与非理性，实用与审美，内容与形式等方面来综合建构数学的价值体系，充分发挥数学的教育价值，为学生完美人格的形成和素质全面和谐发展服务。数学蕴含着前人积累的文明成果，并将负载今人的智慧和结晶，一直传承下去。

与同类教材相比，本书具有以下特点：

(1) 本书最大的特点就是增加了课外阅读——数学中蕴含的思想政治教育元素的内容，体现了数学的德育作用。在教授学生数学知识的同时，应通过数学知识内容，教会学生如何体会数学美，挖掘其中的文化内涵，品味和提炼出能使人明辨是非曲直的哲理，指引人生。

(2) 注意高职新教材内容紧密衔接，在学生已有知识经验的基础上提供专业学习必需的数学基础知识、数学方法和计算工具。

(3) 对概念、命题多作描述性说明，适当降低数学学习难度和严谨性要求。例如，一般从几何意义、物理意义和生活背景等实际问题引入数学概念，对部分难以理解的概念不严格定义，只作定性描述，对部分较难的定理，只从实例中抽象概括出来，而不给严谨的证明。

(4) 本书扩大了适用面，在保证教学基本要求的前提下，视专业差异优选了与专业有关的不同经典案例，给教学内容选择留有一定的弹性。

(5) 突出会用会算的技能，使学生通过各专题的学习形成数学观念，养成数学的应用意识，学会应用数学解决实际问题的一些基本方法。

(6) 本书在解决数学问题时，比较突出数学软件的工具作用，尽量训练学生使用数学

➔ 高等数学（课程思政改革版）

软件和数学工具书，为日后利用数学知识解决实际问题培养一些基本素养。

（7）本书逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多，有相应配套练习册和网上课程资源，便于自学。

各章节编写人员：全书由王亚凌和廖建光主编、统稿和定稿。唐立新担任主审，对全书的框架结构、内容编写等方面提供了指导意见；副主编由王佩、曾彩霞、张冬莲和柳琦担任，参加编写的老师们都提供了重要的编写资料和建设性的编写建议，其中曾彩霞参与课程思政的编写。本书还得到了兄弟院校——湖南软件职业学院廖建光老师的大力支持。本书的编写也参考了大量的论文、教材、专著等，参考文献未能一一列出，在此向所有文献的作者表示感谢！

由于编审人员水平有限，不足之处在所难免，恳请有关专家和同人使用本书时进行批评和指正，并将在使用教材过程中遇到的问题、改进意见及时反馈给我们，以利于我们再版此书时作改进。

编 者

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
§1.1 函数	1
§1.1.1 函数的概念	1
§1.1.2 函数的基本性质	3
§1.1.3 反函数	5
§1.1.4 基本初等函数	6
§1.1.5 复合函数与初等函数	10
§1.1.6 经济中常用的函数(经济管理系选讲)	11
习题 1.1	14
课外阅读:函数图像中的人生哲理	15
§1.2 函数的极限	17
§1.2.1 数列的极限	17
§1.2.2 函数的极限	18
§1.2.3 极限的性质与存在准则	20
习题 1.2	21
§1.3 极限的运算	22
§1.3.1 极限的运算法则	22
§1.3.2 两个重要极限	23
习题 1.3	26
§1.4 无穷小与无穷大	27
§1.4.1 无穷小与无穷大	27
§1.4.2 无穷小量的阶	29
习题 1.4	31
§1.5 函数的连续性	31
§1.5.1 函数的连续性	31
§1.5.2 函数的间断点	33
§1.5.3 闭区间上连续函数的性质	35
习题 1.5	35
课外阅读:极限思想的起源与发展	36
本章小结	38
数学实验与应用一	40

复习题一	44
第二章 导数与微分	47
§2.1 导数概念	47
§2.1.1 实例	47
§2.1.2 导数的概念	48
§2.1.3 求导举例	49
§2.1.4 导数的几何意义	50
§2.1.5 可导与连续的关系	51
习题 2.1	52
§2.2 导数的计算	52
§2.2.1 几个基本初等函数的导数	52
§2.2.2 函数的和、差、积、商的导数	54
习题 2.2	56
§2.3 复合函数及反函数的求导法	57
§2.3.1 复合函数的导数	57
§2.3.2 反函数的导数	59
§2.3.3 初等函数的导数	60
习题 2.3	61
§2.4 隐函数及参数方程的求导法	61
§2.4.1 隐函数的求导法	61
*§2.4.2 参数方程的求导法 (选学)	63
习题 2.4	64
§2.5 高阶导数	64
习题 2.5	66
§2.6 函数的微分	66
§2.6.1 微分的概念	67
§2.6.2 微分的几何意义	68
§2.6.3 微分的计算	68
§2.6.4 微分在近似计算中的应用	70
习题 2.6	71
课外阅读: 品位数学的美	72
本章小结	77
数学实验与应用二	79
复习题二	81
第三章 导数的应用	83
§3.1 微分中值定理	83
§3.1.1 罗尔 (Rolle) 定理	83

§3.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 定理	83
§3.1.3 柯西 (Cauchy) 定理	84
课外阅读: 拉格朗日生平	85
习题 3.1	87
§3.2 洛必达法则	88
§3.2.1 “ $\frac{0}{0}$ ” 型未定式	88
§3.2.2 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型未定式	89
§3.2.3 其他类型的未定式	89
习题 3.2	90
§3.3 函数的单调性	91
习题 3.3	93
§3.4 函数的极限与最值	93
§3.4.1 函数的极值	94
§3.4.2 函数的最值及应用	96
习题 3.4	100
§3.5 导数在经济分析中的应用 (经济管理系选讲)	101
§3.5.1 边际与边际分析	101
§3.5.2 弹性与弹性分析	103
习题 3.5	105
§3.6 函数的凹凸性与拐点、函数作图	106
§3.6.1 曲线的凹凸性及其判别法	106
§3.6.2 曲线的拐点	106
§3.6.3 曲线的渐近线	107
§3.6.4 作函数图像的一般步骤 (选学)	108
习题 3.6	109
*§3.7 曲率 (选学)	110
§3.7.1 曲率概念	110
§3.7.2 曲率的计算	111
§3.7.3 曲率圆和曲率半径	111
习题 3.7	113
课外阅读: 导数和微分在生活中的应用	113
本章小结	119
数学实验与应用三	120
复习题三	122
第四章 不定积分	125
§4.1 不定积分的概念	125

➔ 高等数学 (课程思政改革版)

§4.1.1	原函数的概念	125
§4.1.2	不定积分的概念	125
§4.1.3	不定积分的基本积分公式	127
§4.1.4	不定积分的基本运算法则	128
	习题 4.1	129
§4.2	不定积分的换元法	130
§4.2.1	第一类换元法 (凑微分法)	130
§4.2.2	第二类换元法	132
	习题 4.2	134
§4.3	不定积分的分部积分法	135
	习题 4.3	137
*§4.4	有理函数积分举例及积分表的使用	137
§4.4.1	有理分式函数的积分	137
§4.4.2	三角函数有理式的积分	138
§4.4.3	积分表的使用	139
	习题 4.4	141
	课外阅读: 科学史上著名的公案	141
	本章小结	144
	数学实验与应用四	145
	复习题四	146
第五章	定积分及其应用	148
§5.1	定积分的概念及基本性质	148
§5.1.1	定积分的概念	148
§5.1.2	定积分的基本性质	151
	习题 5.1	153
§5.2	微积分基本定理	154
*§5.2.1	变上限的定积分 (选学)	154
§5.2.2	牛顿—莱布尼茨公式	155
	习题 5.2	156
§5.3	定积分的换元积分法与分部积分法	157
§5.3.1	定积分的换元积分法	157
§5.3.2	定积分的分部积分法	159
	习题 5.3	159
§5.4	定积分的应用	160
§5.4.1	微元法	160
§5.4.2	定积分在几何方面的应用	161
§5.4.3	定积分在物理方面的应用	164
§5.4.4	定积分在经济方面的应用 (经济管理系选讲)	165

习题 5.4	166
§5.5 广义积分 (选学)	167
习题 5.5	170
课外阅读: 牛顿和莱布尼茨简介	170
本章小结	173
数学实验与应用五	174
复习题五	176
附录一 常用初等数学公式	177
附录二 积分表	181
参考答案与提示	190

第一章 函数、极限与连续

[目标] 理解函数的概念和基本性质, 知道极限和连续的概念, 掌握复合函数的复合过程, 掌握极限的四则运算法则和两个重要的极限公式.

[导读] 初等数学研究的主要是常量及其运算, 而高等数学所研究的主要是变量及变量之间的依赖关系. 函数正是这种依赖关系的体现, 极限方法是研究变量之间依赖关系的基本方法. 本章将在复习高中所学的函数概念的基础上, 进一步学习函数极限的概念、运算以及函数的连续性.

§ 1.1 函 数

§ 1.1.1 函数的概念

一、常量与变量

在观察自然现象或技术过程时, 常常会遇到各种不同的量, 其中有的量在过程中不起变化, 也就是保持一定的数值, 这种量叫作常量; 还有一些量在过程中是变化着的, 也就是可以取不同的数值, 这种量叫作变量.

例如, 把一个密闭容器内的气体加热时, 气体的体积和气体的分子个数保持一定, 它们是常量; 而气体的温度和压力在变化, 则是变量, 它们取得越来越大的数值.

一个量是常量还是变量, 要根据具体情况作出具体分析. 例如, 就小范围地区来说, 重力加速度可以看作常量, 但就广大地区来说, 重力加速度则是变量.

理解常量与变量时, 应注意下面几点:

(1) 常量和变量依赖于所研究的过程. 同一量, 在某一过程中可以认为是常量, 而在另一过程中则可能是变量; 反之亦然.

(2) 在几何意义上, 常量对应着实数轴上的定点, 变量则对应着实数轴上的动点.

(3) 一个变量所能取的数值的集合叫作这个变量的变动区域.

通常用字母 a 、 b 、 c 等表示常量, 用字母 x 、 y 、 t 等表示变量.

二、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中, 往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变, 而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 本章只讨论两个变量的情况. 先看下面的例子.

例如: 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 我们知道, 它们之间的关系由公式

$$A = \pi \cdot r^2$$

给定. 当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时, 由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例如: 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t , 落下的距离为 s . 假定开始下落的时刻为 $t=0$, 那么 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

给定, 其中, g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$, 那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时, 由上式就可以确定下落距离 s 的相应数值.

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义, 它们都表达了两个变量之间的相依关系, 这种相依关系给出了一种对应法则, 根据这一法则, 当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时, 另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, 若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时, 变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作 $y=f(x)$, x 称为自变量, f 是函数符号, 它表示 y 与 x 的对应规则.

集合 D 称为函数的定义域, 相应的 y 值的集合则称为函数的值域.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时, 因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应 y_0 叫作当 $x=x_0$ 时的函数值, 记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

例 1 已知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 求: $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x+1)$.

$$\text{解 } f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}; \quad f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{x+2}.$$

例 2 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x) = \frac{3}{5x^2 + 2x}; \quad (2) f(x) = \sqrt{9-x^2}; \quad (3) f(x) = \lg(4x-3).$$

解 (1) 在分式 $\frac{3}{5x^2 + 2x}$ 中, 分母不能为零, 所以 $5x^2 + 2x \neq 0$, 解得 $x \neq -\frac{2}{5}$, 且 $x \neq 0$, 即定义域为

$$\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \cup (0, +\infty).$$

(2) $9-x^2 \geq 0$, 解得 $-3 \leq x \leq 3$, 即定义域为 $[-3, 3]$.

(3) $4x-3 > 0$, 得 $x > \frac{3}{4}$, 即定义域为 $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

三、分段函数

把定义域分成若干部分, 函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数. 例如:

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例 3 设函数 $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \\ 3x & x < 0. \end{cases}$

解 当 x 取 $(0, +\infty)$ 内的值时, y 的值由关系式 $y = x^2 + 1$ 来计算; 当 $x = 0$ 时, $y = 2$; 当 x 取 $(-\infty, 0)$ 内的值时, y 的值由关系式 $y = 3x$ 来计算. 例如, $f(3) = 3^2 + 1 = 10$, $f(-5) = 3 \times (-5) = -15$. 它的图像如图 1-1 所示.

注意: 分段函数是指由几个关系式合起来表示一个函数, 而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值, 分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

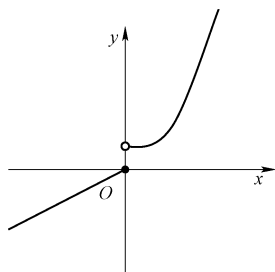


图 1-1

例 4 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -4 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 3, \\ 5x - 1, & x \geq 3. \end{cases}$

求 $f(-\pi)$, $f(1)$, $f(3.5)$ 及函数的定义域.

解 因为 $-\pi \in [-4, 1)$, 所以 $f(-\pi) = \sin(-\pi) = 0$; 因为 $1 \in [1, 3)$, 所以 $f(1) = 1$; 因为 $3.5 \in [3, +\infty)$, 所以 $f(3.5) = 5 \times (-3.5) - 1 = 16.5$; 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4, +\infty)$.

例 5 用分段函数表示函数 $y = 3 - |2 - x|$, 并画出图形.

解 根据绝对值定义可知, 当 $x \leq 2$ 时, $|2 - x| = 2 - x$; 当 $x > 2$ 时, $|2 - x| = x - 2$. 于是

$$有 y = \begin{cases} 3 - (2 - x), & x \leq 2, \\ 3 - (x - 2), & x > 2. \end{cases}$$

$$即 y = \begin{cases} 1 + x, & x \leq 2, \\ 5 - x, & x > 2. \end{cases}$$

其图像如图 1-2 所示.

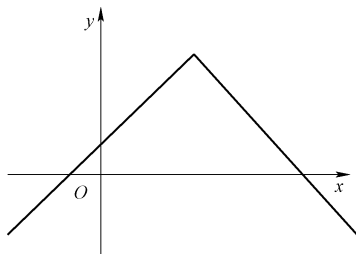


图 1-2

注意: 分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数, 而不是几个函数, 对于自变量 x 在定义域内的某个值, 分段函数 y 只能确定唯一的值, 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

§ 1.1.2 函数的基本性质

一、有界性

定义 1.2 设函数 $y = f(x)$ 在数集 D 上有定义, 如果存在一个正数 M , 对于所有的

$x \in D$ ，恒有 $|f(x)| \leq M$ ，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的. 如果不存在这样的正数 M ，则称 $f(x)$ 在 D 上无界的. 注意：

- (1) 当一个函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界时，正数 M 的取法不是唯一的.
- (2) 有界性是依赖于数集的， $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内是有界的，在区间 $(0, 1)$ 内则无界.

二、奇偶性

定义 1.3 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意的 $x \in D$ ，恒有 $f(-x) = f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为偶函数，如果对任意的 $x \in D$ ，恒有 $f(-x) = -f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像是对称于 y 轴的，如图 1-3 所示. 因为 $f(-x) = f(x)$ ，所以如果点 $P(x, f(x))$ 是曲线上的点，则它关于 y 轴的对称点 $Q(-x, f(x))$ 也是曲线上的点.

奇函数的图像是对称于原点的，如图 1-4 所示. 因为 $f(-x) = -f(x)$ ，所以如果点 $P(x, f(x))$ 是曲线上的点，则它关于原点的对称点 $Q(-x, -f(x))$ 也是曲线上的点.

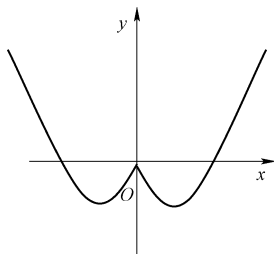


图 1-3

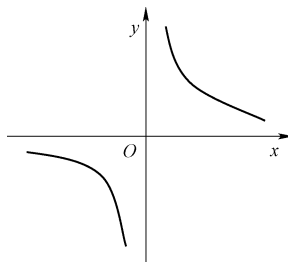


图 1-4

例 6 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ ； (2) $f(x) = 2x^2 + \sin x$ ；

(3) $f(x) = \frac{1}{2}(a^{-x} - a^x)$.

解 由定义

(1) 因为 $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 7 = 3x^4 - 5x^2 + 7 = f(x)$ ，

所以 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = 2(-x)^2 + \sin(-x) = 2x^2 - \sin(-x) \neq f(x)$ ，

同样可以得到 $f(-x) \neq -f(x)$ ，

所以 $f(x) = 2x^2 + \sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.

(3) 因为 $f(-x) = \frac{1}{2}(a^{-(-x)} - a^{-x}) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) = -\frac{1}{2}(a^{-x} - a^x) = -f(x)$ ，

所以 $f(x) = \frac{1}{2}(a^{-x} - a^x)$ 是奇函数.

三、单调性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义, 如果对于 I 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的; 如果对于 I 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的.

单调增加函数与单调减少函数称为单调函数.

单调增加的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的, 如图 1-5 所示; 单调减少的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的, 如图 1-6 所示.

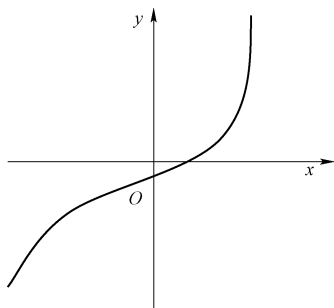


图 1-5

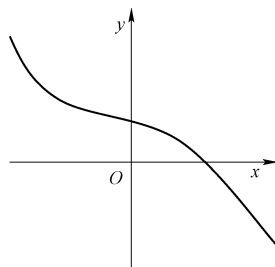


图 1-6

例 7 验证函数 $y=3x-2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

证 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内任取两点 $x_1 < x_2$, 于是

$$f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 - 2) - (3x_2 - 2) = 3(x_1 - x_2) < 0,$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $y=3x-2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

四、周期性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在非零实数 T , 对于任意的 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x \pm T) = f(x)$ 恒成立, 则称此函数为周期函数, 满足这个等式的最小正数 T , 称为函数 $y=f(x)$ 的最小正周期 (简称为周期).

§ 1.1.3 反函数

定义 1.6 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数, 其值域为 M , 如果对于 M 中的每一个 y 值, 都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应, 则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量, x 为因变量的新函数, 称它为 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$, 并称 $y=f(x)$ 为直接函数.

为了叙述方便, 一般将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$. 单调函数一定有反函数.

求反函数的过程: ① 从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$; ② 交换字母 x 和 y .

例 8 求 $y=4x-1$ 的反函数.

解 由 $y=4x-1$ 得到 $x=\frac{y+1}{4}$, 然后交换 x 和 y , 得 $y=\frac{x+1}{4}$,

即 $y = \frac{x+1}{4}$ 是 $y = 4x - 1$ 的反函数.

可以证明, 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称. 例 8 中的一对反函数的图像如图 1-7 所示.

§ 1.1.4 基本初等函数

基本初等函数包括常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数六大类, 它们是微积分中所研究对象的基础. 大部分函数在中学已经学过, 我们在这里系统地讨论它们的定义域、值域、图像和性质, 读者应该很好地掌握这些内容.

一、常值数函数 $y = C$, $D: (-\infty, +\infty), x \in D$

$y = C$ 是过 $(0, C)$ 且平行于 x 轴的一条直线, 如图 1-8 所示, 偶函数.

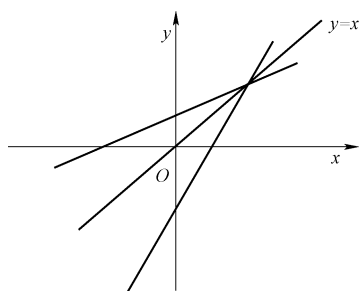


图 1-7

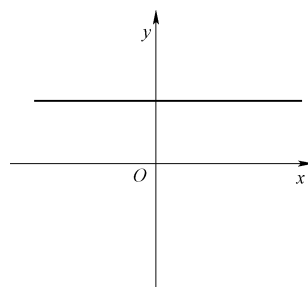


图 1-8

二、幂函数 $y = x^\alpha (\alpha \in \mathbf{R})$

幂函数的情况比较复杂, 我们分 $\alpha > 0$ 和 $\alpha < 0$ 来讨论.

当 α 取不同值时, 幂函数的定义域不同, 为了便于比较, 我们只讨论 $x \geq 0$ 的情形, 而 $x < 0$ 时的图像可根据函数的奇偶性确定.

$\alpha > 0$ 函数的图像通过原点 $(0, 0)$ 和点 $(1, 1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加且无界, 如图 1-9 所示.

$\alpha < 0$ 函数的图像通过点 $(1, 1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少且无界, 以 x 轴和 y 轴为渐近线, 如图 1-10 所示.

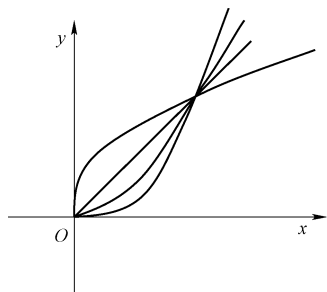


图 1-9

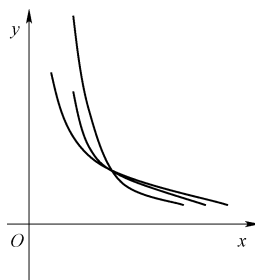


图 1-10

三、指数函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$

它的定义域 $D: (-\infty, +\infty)$, $x \in D$, 由于无论 x 取何值, 总有 $a^x > 0$, 且 $a^0 = 1$, 因此它的图像在 x 轴上方, 且过点 $(0, 1)$. 即它的值域 $M: (0, +\infty)$.

当 $a > 1$ 时, 函数单调增加且无界, 曲线以 x 轴为渐近线;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调减少且无界, 曲线以 x 轴为渐近线, 如图 1-11 所示.

四、对数函数 $y = \log_a x (a > 1 \text{ 且 } a \neq 1)$

它的定义域 $D: (0, +\infty)$, $x \in D$ 图像全部在 y 轴右方, 且过点 $(1, 0)$, 值域 $M: (-\infty, +\infty)$.

当 $a > 1$ 时, 函数单调增加且无界, 曲线以 y 轴为渐近线;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调减少且无界, 曲线以 y 轴为渐近线, 如图 1-12 所示.

对数函数 $y = \log_a x$ 和指数函数 $y = a^x$ 互为反函数, 它们的图像关于 $y = x$ 对称.

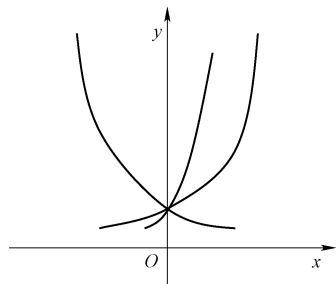


图 1-11

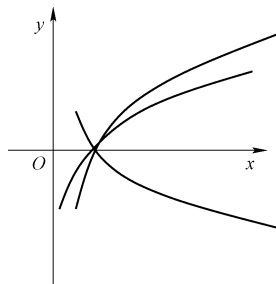


图 1-12

五、三角函数

三角函数包括下面六个函数:

(1) 正弦函数: $y = \sin x$ 的定义域 $D: \mathbf{R}$; 值域 $M: [-1, 1]$; 奇函数; $T = 2\pi$; 有界. 一个周期内的图像如图 1-13 所示.

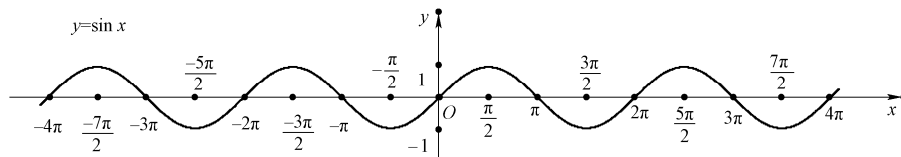


图 1-13

(2) 余弦函数: $y = \cos x$ 的定义域 $D: \mathbf{R}$; 值域 $M: [-1, 1]$; 偶函数; $T = 2\pi$; 有界. 一个周期内的图像如图 1-14 所示.

(3) 正切函数: $y = \tan x$ 的定义域 $D: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$; 值域 $M: (-\infty, +\infty)$; 奇函数; $T = \pi$; 无界. 一个周期内的图像如图 1-15 所示.