高等职业教育公共基础课通用教材

高等数学

（课程思政改革版）

王亚凌　廖建光／主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高 等 数 学

（课程思政改革版）

主　编　王亚凌　廖建光

副主编　王　佩　曾彩霞

　　　　张冬莲　柳　琦

主　审　唐立新

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 ：课程思政改革版 / 王亚凌，廖建光主编. —北京：北京理工大学出版社，2019.9

ISBN 978–7–5682–7643–6

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①王…　②廖…　Ⅲ. ①高等数学–高等学校–教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 220480 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京侨友印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 13.5
字　　数 / 312 千字
版　　次 / 2019 年 9 月第 1 版　2019 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 / 42.00 元

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 孟祥雪
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 施胜娟

前　　言

为深入学习贯彻全国高校思想政治工作会议精神，充分发挥课堂主渠道在高校思想政治工作中的作用，使各类课程与思想政治理论课同向同行，形成协同效应，本书是依据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育数学课程教学基本要求》，在结合高职教育特点、发展趋势及我们前期教材已有成果的基础上，精心编撰而成的，力求发挥高等数学的文化育人、知识基础和技术应用这三大功能，在选择教学内容和要求时坚持“立德树人”“必需、够用”和适用的原则，突出用数学建模的方法，培养学生提出问题、分析问题和解决问题的能力.

在新一轮课改的今天，对我们高职数学的教学来说具有极大的挑战性，数学教育的文化性、人文性日益受到重视，高职数学教育究竟应向学生传达什么样的信息，难道仅仅是解题方法与技巧、运算能力与思维的训练吗？不完全是，数学应作为一种文化传承的工具，传承人类智慧与文明. 尤其要明智地持有哲理性强的数学教育观，缺乏这一点就会疏远学习者或阻碍其能力的培养. 在知识与能力，认知与情感，理性与非理性，实用与审美，内容与形式等方面来综合建构数学的价值体系，充分发挥数学的教育价值，为学生完美人格的形成和素质全面和谐发展服务. 数学蕴含着前人积累的文明成果，并将负载今人的智慧和结晶，一直传承下去.

与同类教材相比，本书具有以下特点：

（1）本书最大的特点就是增加了课外阅读——数学中蕴含的思想政治教育元素的内容，体现了数学的德育作用. 在教授学生数学知识的同时，应通过数学知识内容，教会学生如何体会数学美，挖掘其中的文化内涵，品味和提炼出能使人明辨是非曲直的哲理，指引人生.

（2）注意高职新教材内容紧密衔接，在学生已有知识经验的基础上提供专业学习必需的数学基础知识、数学方法和计算工具.

（3）对概念、命题多作描述性说明，适当降低数学学习难度和严谨性要求. 例如，一般从几何意义、物理意义和生活背景等实际问题引入数学概念，对部分难以理解的概念不严格定义，只作定性描述，对部分较难的定理，只从实例中抽象概括出来，而不给严谨的证明.

（4）本书扩大了适用面，在保证教学基本要求的前提下，视专业差异优选了与专业有关的不同经典案例，给教学内容选择留有一定的弹性.

（5）突出会用会算的技能，使学生通过各专题的学习形成数学观念，养成数学的应用意识，学会应用数学解决实际问题的一些基本方法.

（6）本书在解决数学问题时，比较突出数学软件的工具作用，尽量训练学生使用数学

软件和数学工具书，为日后利用数学知识解决实际问题培养一些基本素养.

（7）本书逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多，有相应配套练习册和网上课程资源，便于自学.

各章节编写人员：全书由王亚凌和廖建光主编、统稿和定稿。唐立新担任主审，对全书的框架结构、内容编写等方面提供了指导意见；副主编由王佩、曾彩霞、张冬莲和柳琦担任，参加编写的老师们都提供了重要的编写资料和建设性的编写建议，其中曾彩霞参与课程思政的编写。本书还得到了兄弟院校——湖南软件职业学院廖建光老师的大力支持。本书的编写也参考了大量的论文、教材、专著等，参考文献未能一一列出，在此向所有文献的作者表示感谢！

由于编审人员水平有限，不足之处在所难免，恳请有关专家和同人使用本书时进行批评和指正，并将在使用教材过程中遇到的问题、改进意见及时反馈给我们，以利于我们再版此书时作改进.

编　者

目　　录

第一章　函数、极限与连续

［目标］理解函数的概念和基本性质，知道极限和连续的概念，掌握复合函数的复合过程，掌握极限的四则运算法则和两个重要的极限公式.

［导读］初等数学研究的主要是常量及其运算，而高等数学所研究的主要是变量及变量之间的依赖关系. 函数正是这种依赖关系的体现，极限方法是研究变量之间依赖关系的基本方法. 本章将在复习高中所学的函数概念的基础上，进一步学习函数极限的概念、运算以及函数的连续性.

§1.1　函　　数

§1.1.1　函数的概念

一、常量与变量

在观察自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫作常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫作变量.

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力在变化，则是变量，它们取得越来越大的数值.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析. 例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量.

理解常量与变量时，应注意下面几点：

（1）常量和变量依赖于所研究的过程. 同一量，在某一过程中可以认为是常量，而在另一过程中则可能是变量；反之亦然.

（2）在几何意义上，常量对应着实数轴上的定点，变量则对应着实数轴上的动点.

（3）一个变量所能取的数值的集合叫作这个变量的变动区域.

通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量.

二、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 本章只讨论两个变量的情况. 先看下面的例子.

例如：考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 我们知道，它们之间的关系由公式

$$A=\pi\cdot r^2$$

给定. 当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例如：自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中，g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可以确定下落距离 s 的相应数值.

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，x 称为自变量，f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应规则.

集合 D 称为函数的定义域，相应的 y 值的集合则称为函数的值域.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应 y_0 叫作当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $y\big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

例 1 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求：$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$.

解 $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$；　　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$；

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1}$；　　$f(x+1)=\dfrac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\dfrac{-x}{x+2}$.

例 2 求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$；（2）$f(x)=\sqrt{9-x^2}$；（3）$f(x)=\lg(4x-3)$.

解 （1）在分式 $\dfrac{3}{5x^2+2x}$ 中，分母不能为零，所以 $5x^2+2x\neq 0$，解得 $x\neq -\dfrac{2}{5}$，且 $x\neq 0$，即定义域为

$$\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty).$$

（2）$9-x^2\geqslant 0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$，即定义域为 $[-3,3]$.

（3）$4x-3>0$，得 $x>\dfrac{3}{4}$，即定义域为 $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

三、分段函数

把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数. 例如：

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例 3　设函数 $y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ 3x & x<0.\end{cases}$

解　当 x 取 $(0,+\infty)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y=x^2+1$ 来计算；当 $x=0$ 时，$y=2$；当 x 取 $(-\infty,0)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y=3x$ 来计算. 例如，$f(3)=3^2+1=10$，$f(-5)=3\times(-5)=-15$. 它的图像如图 1－1 所示.

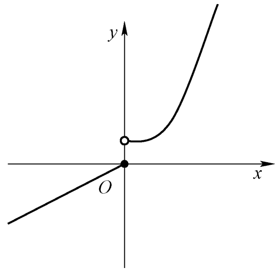

图 1－1

注意：分段函数是指由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

例 4　设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<3,\\ 5x-1, & x\geqslant 3.\end{cases}$

求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$ 及函数的定义域.

解　因为 $-\pi\in[-4,1)$，所以 $f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；因为 $1\in[1,3)$，所以 $f(1)=1$；因为 $3.5\in[3,+\infty)$，所以 $f(3.5)=5\times(-3.5)-1=16.5$；函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$.

例 5　用分段函数表示函数 $y=3-|2-x|$，并画出图形.

解　根据绝对值定义可知，当 $x\leqslant 2$ 时，$|2-x|=2-x$；当 $x>2$ 时，$|2-x|=x-2$. 于是

有 $y=\begin{cases}3-(2-x), & x\leqslant 2,\\ 3-(x-2), & x>2.\end{cases}$

即 $y=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 2,\\ 5-x, & x>2.\end{cases}$

其图像如图 1－2 所示.

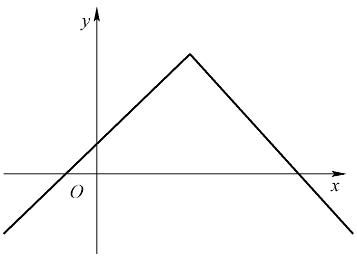

图 1－2

注意：分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数，对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定唯一的值，分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

§ 1.1.2　函数的基本性质

一、有界性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的

$x \in D$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的. 注意：

（1）当一个函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界时，正数 M 的取法不是唯一的.

（2）有界性是依赖于数集的，$y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，在区间 $(0,1)$ 内则无界.

二、奇偶性

定义 1.3　设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意的 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数，如果对任意的 $x \in D$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像是对称于 y 轴的，如图 1-3 所示. 因为 $f(-x) = f(x)$，所以如果点 $P(x, f(x))$ 是曲线上的点，则它关于 y 轴的对称点 $Q(-x, f(x))$ 也是曲线上的点.

奇函数的图像是对称于原点的，如图 1-4 所示. 因为 $f(-x) = -f(x)$，所以如果点 $P(x, f(x))$ 是曲线上的点，则它关于原点的对称点 $Q(-x, -f(x))$ 也是曲线上的点.

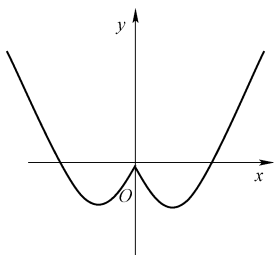

图 1-3

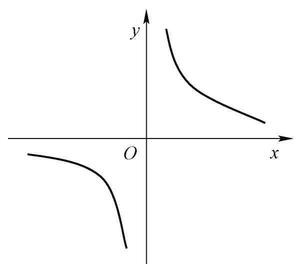

图 1-4

例 6　判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$；（2）$f(x) = 2x^2 + \sin x$；

（3）$f(x) = \dfrac{1}{2}(a^{-x} - a^{x})$.

解　由定义

（1）因为 $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 7 = 3x^4 - 5x^2 + 7 = f(x)$，

所以 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ 是偶函数.

（2）因为 $f(-x) = 2(-x)^2 + \sin(-x) = 2x^2 - \sin(-x) \neq f(x)$，

同样可以得到 $f(-x) \neq -f(x)$，

所以 $f(x) = 2x^2 + \sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.

（3）因为 $f(-x) = \dfrac{1}{2}(a^{-(-x)} - a^{-x}) = \dfrac{1}{2}(a^{x} - a^{-x}) = -\dfrac{1}{2}(a^{-x} - a^{x}) = -f(x)$，

所以 $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^{-x} - a^{x})$ 是奇函数.

三、单调性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果对于 I 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的；如果对于 I 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的.

单调增加函数与单调减少函数称为单调函数.

单调增加的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图 1－5 所示；单调减少的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图 1－6 所示.

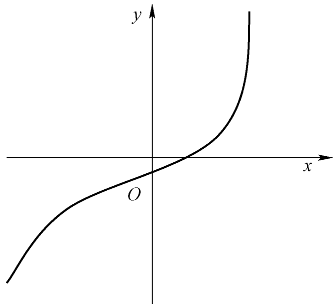

图 1－5

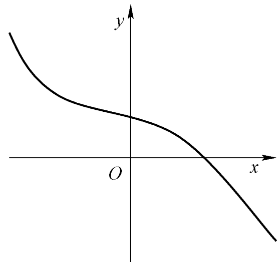

图 1－6

例 7　验证函数 $y=3x-2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

证　在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任取两点 $x_1<x_2$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1-2)-(3x_2-2)=3(x_1-x_2)<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $y=3x-2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

四、周期性

定义 1.5　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零实数 T，对于任意的 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，则称此函数为周期函数，满足这个等式的最小正数 T，称为函数 $y=f(x)$ 的最小正周期（简称为周期）.

§1.1.3　反函数

定义 1.6　设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 M，如果对于 M 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称它为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称 $y=f(x)$ 为直接函数.

为了叙述方便，一般将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$. 单调函数一定有反函数.

求反函数的过程：① 从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；② 交换字母 x 和 y.

例 8　求 $y=4x-1$ 的反函数.

解　由 $y=4x-1$ 得到 $x=\dfrac{y+1}{4}$，然后交换 x 和 y，得 $y=\dfrac{x+1}{4}$，

即 $y=\dfrac{x+1}{4}$ 是 $y=4x-1$ 的反函数.

可以证明，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 例 8 中的一对反函数的图像如图 1－7 所示.

§1.1.4　基本初等函数

基本初等函数包括常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数六大类，它们是微积分中所研究对象的基础. 大部分函数在中学已经学过，我们在这里系统地讨论它们的定义域、值域、图像和性质，读者应该很好地掌握这些内容.

一、常值数函数 $\boldsymbol{y=C}$ ，$\boldsymbol{D:(-\infty,+\infty),x\in D}$

$y=C$ 是过 $(0,C)$ 且平行于 x 轴的一条直线，如图 1－8 所示，偶函数.

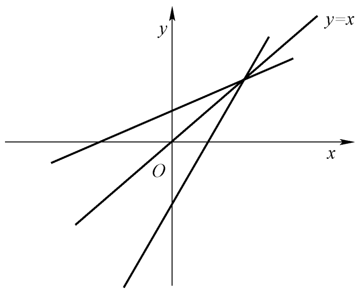

图 1－7

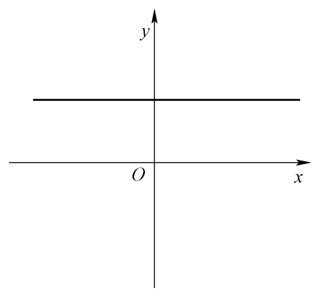

图 1－8

二、幂函数 $\boldsymbol{y=x^{\alpha}(\alpha\in \mathbf{R})}$

幂函数的情况比较复杂，我们分 $\alpha>0$ 和 $\alpha<0$ 来讨论.

当 α 取不同值时，幂函数的定义域不同，为了便于比较，我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形，而 $x<0$ 时的图像可根据函数的奇偶性确定.

$\alpha>0$ 函数的图像通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加且无界，如图 1－9 所示.

$\alpha<0$ 函数的图像通过点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少且无界，以 x 轴和 y 轴为渐近线，如图 1－10 所示.

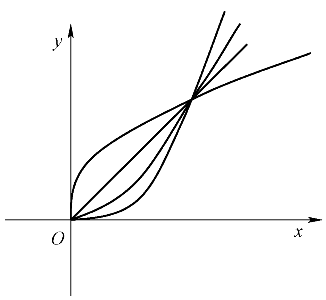

图 1－9

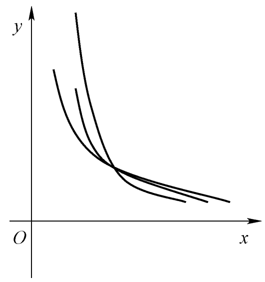

图 1－10

三、指数函数 $y=a^x(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$

它的定义域 $D:(-\infty,+\infty)$, $x\in D$，由于无论 x 取何值，总有 $\alpha^x>0$，且 $a^0=1$，因此它的图像在 x 轴上方，且过点 $(0,1)$．即它的值域 $M:(0,+\infty)$．

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 x 轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 x 轴为渐近线，如图 1－11 所示.

四、对数函数 $y=\log_a x(a>1 \text{ 且 } a\neq 1)$

它的定义域 $D:(0,+\infty)$, $x\in D$ 图像全部在 y 轴右方，且过点 $(1,0)$，值域 $M:(-\infty,+\infty)$．

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 y 轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 y 轴为渐近线，如图 1－12 所示.

对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，它们的图像关于 $y=x$ 对称.

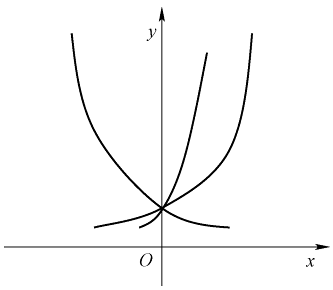

图 1－11

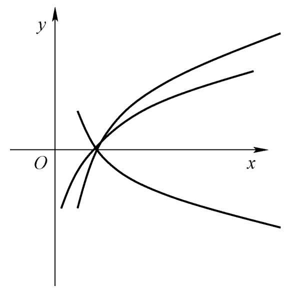

图 1－12

五、三角函数

三角函数包括下面六个函数：

（1）正弦函数：$y=\sin x$ 的定义域 D：**R**；值域 $M:[-1,1]$；奇函数；$T=2\pi$；有界．一个周期内的图像如图 1－13 所示.

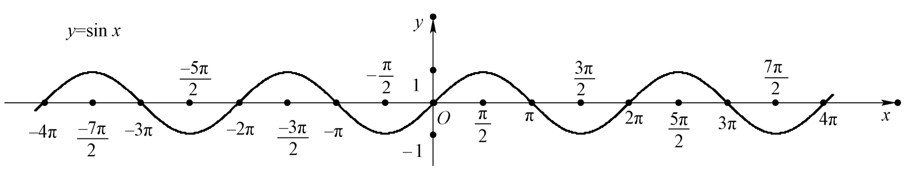

图 1－13

（2）余弦函数：y=$\cos x$ 的定义域 D：**R**；值域 $M:[-1,1]$；偶函数；$T=2\pi$；有界．一个周期内的图像如图 1－14 所示.

（3）正切函数：$y=\tan x$ 的定义域 $D:x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$；值域 $M:(-\infty,+\infty)$；奇函数；$T=\pi$；无界．一个周期内的图像如图 1－15 所示.