高等职业教育新形态系列教材

高等数学——理工版

（第2版）

● 主编　王德华　夏德昌　田治平

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育新形态系列教材

高等数学——理工版

（第 2 版）

主　编　王德华　夏德昌　田治平
副主编　高玉静　施桂萍　李本图　穆晓晴　张　静　李江红
编　委　王金平　杨燕飞　张兆安　孙玉太　梁宏昌　李　霞

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：理工版/王德华，夏德昌，田治平主编 .—2 版 .—北京：北京理工大学出版社，2019.10

ISBN 978－7－5682－7495－1

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①王…　②夏…　③田…　Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 186198 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 涿州市新华印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 16.25
字　　数 / 380 千字
版　　次 / 2019 年 10 月第 2 版　2019 年 10 月第 1 次印刷
定　　价 / 39.80 元

责任编辑 / 江　立
文案编辑 / 江　立
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 施胜娟

第 2 版前言

《高等数学——理工版（第 2 版）》是一本“互联网＋”数字化教材，书本上链接了 10 年以上一线数学老师讲课视频及课后习题答案等 200 多个线上资源．视频包括疑难知识点讲解视频、典型例题讲解视频、典型习题讲解视频．

本书依据 2020 年山东省专升本考试政策调整，加入了无穷级数一章的相关知识．

本教材融入课程思政元素，教材章节后增加了数学家的数学梦和爱国故事等内容，如陈景润的数学梦、苏步青的爱国梦等．通过这些数学家的故事感染现在的大学生，引导他们树立崇高的爱国主义情怀，激励他们努力学习科学文化知识，早日成为祖国的栋梁．

本教材作为线上课程的配套资源，线上课程资源丰富，包括每个知识点的讲解视频、例题讲解视频、在线测试题库、拓展资源（数学文化、数学竞赛资料、数学建模竞赛资料、数学电影等）．《高等数学》线上课程已经在山东科技职业学院大一新生中应用了 6 年，近 30 000 名学生在线上课程上进行了学习．

参加编写的人员具体分工如下：高玉静老师编写修订第一模块，穆晓晴老师录制第一模块的视频；王德华、施桂萍老师编写修订第二模块，王德华老师录制第二模块的视频；夏德昌、张静老师编写修订第三模块，夏德昌、杨燕飞、李江红老师编写修订第四模块，夏德昌老师录制第三、第四模块的视频；李本图、梁宏昌、李霞老师编写修订第五模块，李本图老师录制第五模块的视频；施桂萍、王德华、王金平老师编写修订第六模块，施桂萍、李本图老师录制第六模块的视频；高玉静、夏德昌、孙玉太老师编写修订第七模块；田治平、王德华、张兆安老师编写第八模块．本书在编写过程中，得到了学院领导和部门领导的关心、支持，在此一并表示感谢！

由于时间紧迫，水平有限，书中难免存在一些不足和缺点，诚恳地期望广大师生及读者朋友提出宝贵的意见和建议．

编　者

2019 年 9 月

第 1 版前言

高等数学是高职高专的重要基础课，也是职业教育培养体系中服务于专业教育的必修课，让学生具备与高等教育专业要求相适应的数学能力．高等数学以讲解工程技术案例为切入点，本着够用为度、注重实效的原则，采用目标驱动的方式，体现当今数学教育不同于传统数学教育的思想，让学生掌握与专业知识需求相适应的数学知识．

本教材具有以下几个特色：

第一，本教材内容全面，知识模块之间以逻辑为主线．本书内容设计循序渐进、由浅入深，符合高职高专学生的认识规律，满足不同层次学生对数学知识的需求，从而使学生抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、自学能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题的能力、解决问题的能力得到提高，为学生学习后续专业课程和进一步获得现代科学技术知识奠定必要的数学基础，达到了国家对高职高专的教学要求．

第二，本教材突出学生应用能力的培养．书中加入很多专业案例或实际生活案例，以案例为载体进行知识的讲授，力图让抽象的数学知识变得生动，培养学生运用数学知识解决实际问题的能力．

第三，本教材注重对学生数学文化素质的培养．在每一模块后面加上数学文化知识，调动学生的探索精神和创造力，使他们更加灵活主动，逐步显露自己的聪明才智．

根据现在高职学生的数学认知特点，本书共包括八个模块的学习内容：函数的极限及连续、一元函数微分学、不定积分、定积分及其应用、微分方程、线性代数、概率统计初步、无穷级数．

由于时间紧迫、水平有限，书中难免存在一些不足和缺点，诚恳地期望广大师生及读者朋友提出宝贵的意见和建议．

编　者

2016 年 7 月

目　　录

第一模块　函数的极限及连续

学习目标

理解函数的概念，掌握基本初等函数的图像性质，掌握复合函数的复合过程；理解极限的思想和概念，掌握极限的运算法则和求极限的方法；理解函数的连续性概念及性质，掌握函数连续性的判断.

函数是高等数学中最重要的概念之一．在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，函数关系随处可见．微积分学是以函数关系为研究对象的数学学科．极限是研究函数和解决各种问题的一种基本方法．在本模块中，我们首先将从函数的概念入手，进而讨论函数的极限、函数的连续性等概念，以及它们的一些性质和应用.

第一节　函数的概念

学习内容：函数的概念.

目的要求：熟练掌握函数的定义、定义域、对应法则，了解分段函数、显函数、隐函数、反函数的概念；熟练掌握函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性及五种基本初等函数的图像和性质；掌握复合函数的复合过程.

重点难点：函数定义域的求法、复合函数的复合过程.

【案例】 在自由落体运动中，物体下落的时间 t 与距离 s 之间存在下列依赖关系：$s=\frac{1}{2}gt^2$，其中 g 是重力加速度．假定物体着地的时刻为 $t=T$，则对每一个 $t\in[0,T]$，由上式可知，s 都有一个确定的数值与其对应.

一、函数概念

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集．若对于每一个数 $x\in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**；数集 D 称为该函数的**定义域**，是 x 的取值范围.

自变量取定义域内某一值时，因变量的对应值叫作函数值．对于给定的函数 $y=f(x)$，当函数的定义域 D 确定后，按照对应法则 f，因变量的变化范围也随之确定．函数值的集

合叫作函数的**值域**．所以，**定义域和对应法则就是确定一个函数的两个要素**．两个函数只有在它们的定义域和对应法则都相同时，才是相同的．

函数的三种表示方法：解析式、列表法、图像法．

例题 1　求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$；

（2）$y=\ln(x+1)+\arccos(x-1)$．

函数的概念
（例题 1）

解　（1）由分母不为零且被开方数大于等于零可知，自变量 x 应满足 $x^2-x-2>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-1$，故原函数的定义域为：$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$．

（2）该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases} x+1>0, \\ -1\leqslant x-1\leqslant 1 \end{cases}$$

的 x 的全体，解不等式组得 $0\leqslant x\leqslant 2$，故原函数的定义域为 $[0,2]$．

2. 分段函数

对于自变量的不同取值范围，且对应法则也不同的函数，称为**分段函数**．

注意：

①分段函数是一个函数，而不是几个函数；

②分段函数的定义域是各段定义域的并集．

例如，$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$，$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x\leqslant 5, \\ 0, & x=0 \\ -1, & -5<x<0, \end{cases}$，符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$等，都是分段函数．

例题 2　设 $f(x)=\begin{cases} x-2, & 1\leqslant x<3, \\ x^2, & 3\leqslant x<5, \end{cases}$求 $f(x+1)$．

解　$f(x+1)=\begin{cases} (x+1)-2, & 1\leqslant x+1<3, \\ (x+1)^2, & 3\leqslant x+1<5 \end{cases}=\begin{cases} x-1, & 0\leqslant x<2, \\ (x+1)^2, & 2\leqslant x<4. \end{cases}$

3. 显函数和隐函数

若函数中的因变量 y 用自变量 x 的表达式直接表示出来，则这样的函数称为**显函数**．

有些函数的表达方式却不是这样的．例如方程 $x+y^3-1=0$ 表示一个函数，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，y 都有唯一确定的值与之对应．

一般地，若两个变量 x，y 的函数关系用方程 $F(x,y)=0$ 的形式来表示，即 x，y 的函数关系隐藏在方程里，则这样的函数叫作**隐函数**．

函数的概念
（例题 2）

有的隐函数可以从方程 $F(x,y)=0$ 中解出 y 来化为显函数，但有的隐函数化为显函数比较困难，甚至是不可能的．例如由方程 $xy-\mathrm{e}^{x+y}=0$ 确定的隐函数就不能化为显函数．

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in Z$，若对于任意一个 $y\in Z$，D 中都有唯一的一个 x，使得 $f(x)=y$ 成立，这时 x 是以 Z 为定义域的 y 的函数，称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=y^{-1}(y)$，$y\in Z$.

在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 表示函数. 但按照习惯，我们需对调函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x，y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z$.

今后凡无特别说明，函数 $y=f(x)$ 的反函数都是这种改写过 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z$ 的形式.

函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 与 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z$ 互为反函数，它们的定义域与值域互换.

在同一直角坐标系下，$y=f(x)$，$x\in D$ 与 $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$ 互为反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例题 3　函数 $y=3x-2$ 与函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$ 互为反函数，如图 1.1 所示；函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，如图 1.2 所示. 它们的图形都关于直线 $y=x$ 对称.

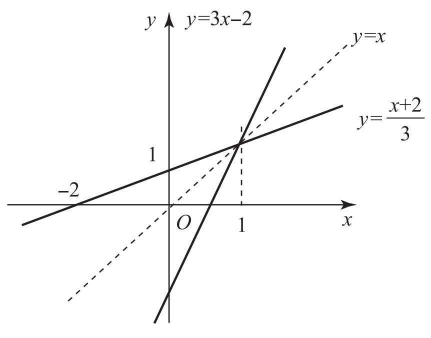


图 1.1

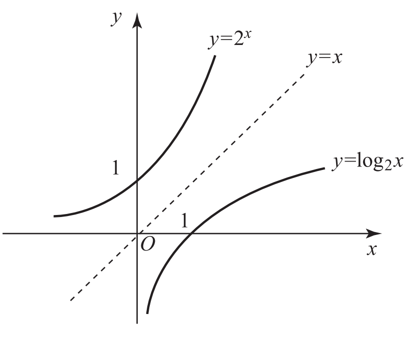


图 1.2

定理 1（反函数存在定理）　单调函数必有反函数，且单调增加（减少）的函数的反函数也是单调增加（减少）的. 求函数 $y=f(x)$ 的反函数可以按以下步骤进行：

（1）从方程 $y=f(x)$ 中解出唯一的 x，并写成 $x=f^{-1}(y)$；

（2）将 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x，y 对调，得到函数 $y=f^{-1}(x)$，这就是所求的函数的反函数.

5. 复合函数

假设有两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，与 x 对应的 u 值能使 $y=f(u)$ 有定义，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$，得到函数 $y=f(\varphi(x))$. 这个新函数 $y=f(\varphi(x))$ 就是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 经过复合而成的**复合函数**，称 u 为中间变量.

复合函数

例如由 $y=f(u)=e^u$，$u=\varphi(x)=\cos x$ 可以复合成复合函数 $y=e^{\cos x}$.

复合函数不仅可用两个函数复合而成，也可以由多个函数相继进行复合而成. 如由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\sin x$ 可以复合成复合函数 $y=\sqrt{\ln \sin x}$.

注意：不是任何两个函数都能复合成复合函数. 由定义易知，只有当 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空时，这两个函数才能复合成复合函数. 例如函数 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u=-x^2$ 的值域为 $(-\infty, 0]$，而 $y=\ln u$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，显然 $(-\infty, 0]\cap(0, +\infty)=\varnothing$，$y=\ln(-x^2)$ 无意义.

例题 4　函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$ 是由哪几个函数复合而成的？

解　函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 复合而成的.

二、函数性质

1. 单调性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in(a, b)$，若对任意两点 x_1，$x_2\in(a, b)$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上是**单调增加**的，区间 (a, b) 称为**单调增加**区间；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上是**单调减少**的，区间 (a, b) 称为**单调减少区间.**

单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**，单调增加区间和单调减少区间统称为**单调区间.**

2. 有界性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在 $M>0$，使得对任意 $x\in D$，均有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是无界的.

例如 $y=\sin x$ 是有界函数，其中对任意的 $x\in(-\infty, +\infty)$，均有 $|\sin x|\leqslant 1$；而 $y=x^2$ 是无界函数，因为 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有下界.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域内的 x 都有：$f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；$f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数. 奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称. 如果函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，则称其为非奇非偶函数.

例如，$y=\sin x$，$y=x^3$，$x\in(-\infty, +\infty)$ 是奇函数；$y=\cos x$，$y=x^2$，$x\in(-\infty, +\infty)$ 是偶函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在常数 $T\neq 0$，对任意 $x\in D$，$f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数；使上式成立的最小正数 T，称为函数 $y=f(x)$ 的最小正周期，简称周期. 例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期 $T=2\pi$；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的周期 $T=\pi$；正弦型曲线函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

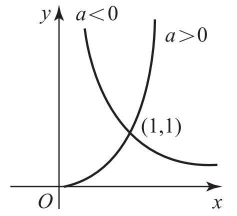
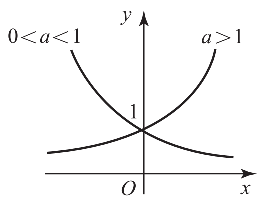
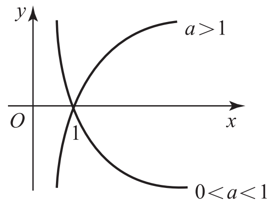
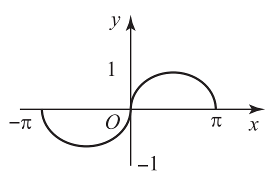
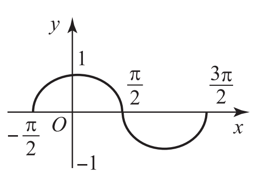
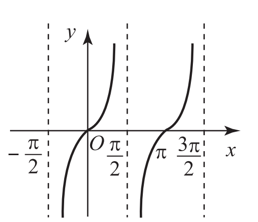
三、基本初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数.**

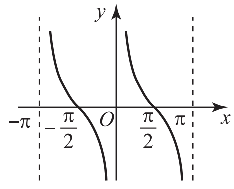
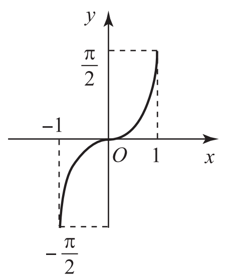
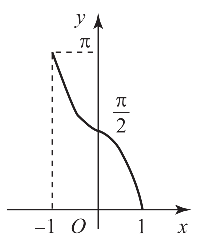
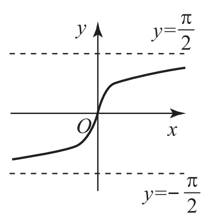
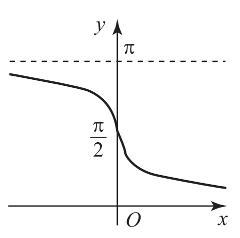
为教学需要，现将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五类基本初

等函数的表达式、定义域、性质以及图像进行归纳，如表 1－1 所示.

表 1－1　基本初等函数及图像性质

序号	函　　数		图　　像	性　　质
1	幂函数 $y=x^a$，$a\in R$			在第一象限，$a>0$ 时函数单增；$a<0$ 时函数单减. 共性：过点（1，1）
2	指数函数 $y=a^x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）			$a>1$ 时函数单增；$0<a<1$ 时函数单减. 共性：过（0，1）点，以 x 轴为渐近线
3	对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）			$a>1$ 时函数单增；$0<a<1$ 时函数单减. 共性：过（1，0）点，以 y 轴为渐近线
4	三角函数	正弦函数 $y=\sin x$		奇函数，周期 $T=2\pi$，有界 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
		余弦函数 $y=\cos x$		偶函数，周期 $T=2\pi$，有界 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$
		正切函数 $y=\tan x$		奇函数，周期 $T=\pi$，无界

续表

序号	函　　数		图　　像	性　　质
4	三角函数	余切函数 $y=\cot x$		奇函数，周期 $T=\pi$，无界
5	反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$		$x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，奇函数，单调增加，有界
		反余弦函数 $y=\arccos x$		$x\in[-1,1]$，$y\in[0,\pi]$，单调减少，有界
		反正切函数 $y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，奇函数，单调增加，有界，$y=\pm\frac{\pi}{2}$为两条水平渐近线
		反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,\pi)$，单调减少，有界，$y=0$，$y=\pi$ 为两条水平渐近线

四、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的，并能用一个式子表示的函数，统称为初等函数.

初等函数的本质就是一个函数．为了研究需要，今后经常要将一个给定的初等函数看成由若干个简单函数经过四则运算或复合而成的形式．简单函数是指基本初等函数，或由基本初等函数经过有限次四则运算而成的函数．

本课程研究的函数，主要是初等函数．凡不是初等函数的函数，皆称为非初等函数．

习题 1－1

本节习题答案

1．求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{2x+1}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

（3）$y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x^2-9}$；　　（4）$y=\ln(x^2-4)$．

2．已知 $f(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(x^2)$，$f(f(0))$，$f(f(x^2))$．

3．求下列函数的反函数：

（1）$y=3x-2$；　　（2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3）$y=\sqrt[3]{2x-1}$；　　（4）$y=1-x^2(x<0)$．

4．下列函数是由哪几个简单函数复合而成的？

（1）$y=\sin x^3$；　　（2）$y=\ln\sin x$；

（3）$y=\cos\sqrt{x+1}$；　　（4）$y=\mathrm{e}^{\sin 2x}$；

（5）$y=(3+x+2x^2)^3$；　　（6）$y=\sin^2(1+2x)$；

（7）$y=\ln\ln\sin x$；　　（8）$y=\sqrt{\ln 2x}$．

5．应用题：

A、B 两地间的汽车运输，旅客携带行李按下列标准支付运费：不超过 10 千克的不收行李费；超过 10 千克而不超过 25 千克的，每千克收运费 0.50 元；超过 25 千克而不超过 100 千克的，每千克收运费 0.80 元．试列出运输行李的运费与行李的重量之间的函数关系式，写出定义域，并求出所带行李分别为 16 千克和 65 千克的甲、乙两旅客各应支付多少运费？

第二节　数列的极限

学习内容：数列的极限．

目的要求：掌握数列、数列极限、数列收敛发散的定义；熟练掌握数列极限的判断，数列极限的四则运算法则；了解收敛数列的性质．

重点难点：数列极限的判断，数列极限的四则运算法则．

微积分研究问题所采用的基本方法是极限法．我们后面将会看到，微分学和积分学的一些基本概念都是通过极限概念来确定的，一些基本性质和法则也是通过极限法推导出来的．

极限思想方法是数学分析乃至全部高等数学必不可少的一种重要方法，也是数学分析与

初等数学的本质区别之处．数学分析之所以能解决许多初等数学无法解决的问题（例如求瞬时速度、曲线弧长、曲边形面积、曲面体体积等问题），正是由于采用了极限的思想方法．有时我们要确定某一个量，首先确定的不是这个量的本身而是它的近似值，而且所确定的近似值也不仅仅是一个而是一连串越来越准确的近似值；然后通过考察这一连串近似值的趋向，把那个量的准确值确定下来．这就是运用了极限的思想方法．

案例 1　公元 263 年，我国古代数学家刘徽提出利用内接正多边形来推算圆的面积．

设有一圆，首先做内接正六边形，它的面积记为 A_1；再做内接正十二边形，它的面积记为 A_2；再做内接正二十四变边形，它的面积记为 A_3；如此下去，每次边数加倍，一般把内接正 $6\times2^{n-1}$边形的面积记为 A_n，这样得到一系列内接正多边形的面积，如图 1.3 所示．

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n.$$

内接正多边形的边数 n 越多，即正整数 n 无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋向于无穷大）时，内接正多边形的面积也在不断增大，却无限接近于一个定值——圆的面积 A.

案例 2　春秋战国时期哲学家庄子在《庄子・天下篇》中对“截丈问题”有一段名言：“一尺之锤，日取其半，万世不竭”，意思是说，一尺长的木棍，每天截取它的一半，这个过程将无穷无尽，其中也隐含了深刻的极限思想．

极限思想案例

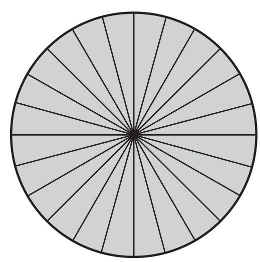


图 1.3

一、数列

定义 1　无穷多个数按照一定顺序排成一列 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 称为数列，记作 $\{y_n\}$，其中 y_n 称为数列的一般项或通项，n 为下标，为正整数．

显然，数列的项是其下标的函数，因此数列还可以表示为

$$y_n=f(n),\ n\in N^+$$

例如　观察下列数列的变化趋势：

(1) $\{(-1)^n\}$：$-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$；

(2) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$：$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$；

(3) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$：$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots$；

(4) $\left\{1+\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right\}$：$\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}, \cdots, 1+\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n, \cdots$；

(5) $\{n^2\}$：$1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots$.