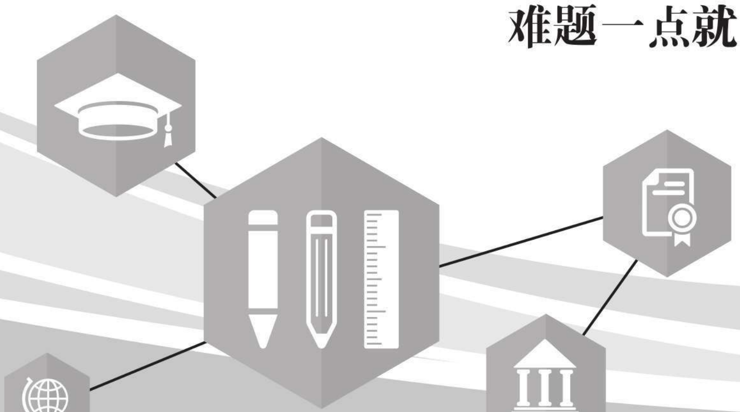
李正兴 著

李正兴高中数学微专题

压轴题攻略篇

微专题，点石成金，

难题一点就透，引领解题高手！



上海社会科学院出版社
SHANGHAI ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES PRESS

总序

一

《李正兴高中数学微专题》系列共8册，约500节微型课程，四百万字，近日将由上海社会科学院出版社陆续推出. 这8个分册依次为《思想方法篇》《压轴题攻略篇》《代数篇》《几何篇》《妙思巧解篇》《一题多解篇》《一题多变篇》《战略战术篇》.

为什么要推出篇幅如此浩大，类型又更显丰富的系列丛书？与我近二十年来出版的二十套六十余本教辅书有哪些不同？或者说这套新书有些什么鲜明的特色？可以这样说：**我过去的写作采用的大都是"宏观叙事"的写作风格，**一本书分若干章，每章若干节或若干讲，以每一节或每一讲为"叙事"单位，通常一节或一讲包含联系较为紧密的若干知识点，多种解题方法. 以《高中数学专题精编》为例，每讲由"知识储备""双基回眸""例题精讲""易错警示""链接高考""专项训练"6个方面实施"推进式"辅导，如果以此安排一次讲座，通常需要3小时以上；又比如我著的红蓝宝书以及《知识点梳理·精讲·贯通》系列，每讲除了"知识储备""双基回眸""经典例题"3部分之外还加入了"疑难解析""常规解法与妙思巧解""真题导读""试题猜想""实战演练"5个部分，这种"宏观叙事"的写法当然是需要的，是对教材体系的深度解读，重视知识之间的交汇与解题方法的广阔展示. 也只有"宏观叙事"才能把一个较大的专题讲深讲透. 这类书可以慢慢细读品尝，自有其存在的功效，不必限定在短时间内完成. 从另一个方面来看，当前培训市场新生事物不断涌现，一是线上教育的开发，通常一节视频直播30分钟到45分钟，时间太长大脑容易疲劳，效果不一定好；二是人工智能与教育的结合正在蓬勃兴起，如松鼠AI智适应教育主张对知识的拆分要细，难易的分级层次要多，课题势必朝微小的方向发展，微专题设计课堂教学将成为一种潮流.

我们讲微专题，必须在"微"字上花工夫. 首先课题要小，课题太大必然是知识容量大，解题的方法多，要在短时间内讲透、讲到位是不可能的. 但作为一节微课，我们说"麻雀虽小，五脏俱全"，其结构是完整的，教育目标是明确的. 有知识点，有由浅入深的3～5道例题，有课后的归纳总结. 打个比方，一节好的微课，是一部大戏的一个折子戏，虽然这个折子戏属于某一部大戏，但有独立的结构、明确的中心、完美的呈现，具有独特的欣赏价值. 微专题就是如此，课题是一节课的核心，知识梳理应当是简洁的，甚至只给出关键词，例题虽少也要有层次感，每道题在微专题中的地位、作用都要作通盘考虑，分析切忌大而空，不着边际，力争一语中的. 若一种题型讲解完毕，立即给出对这类题型的归纳总结，语言简短易记，给人以启迪. 一个微专题、一节微型课如何引入，如何展开，知识层面上如何发散，如何抓住学生的注意力，如何激发学生的学习兴趣，课后如何精选少量习题巩固练习、检测反馈，都应作出独具匠心的安排. 如果说一节大课，一次讲座，3个小时好比一部大戏，是对

一个较大专题的宏大书写，那么一节微课是对一个小专题的精微呈现，一节微课，短短半个小时的视频直播，如同导演一出舞台剧，一部折子戏，序幕（通识）、情节展示（具有层次的典型例题）、高潮（精准的分析、讲解、具有节奏感的推进、恰到好处的简短总结、引人入胜的妙思巧解），一环紧扣一环，给人以美的享受（引领学生走向成功）. 以上所述，可以说是我撰写微专题系列的理念，由于是初创性的，大约 500 节微课，做到完美无缺也难，某些课还待不断修改打磨，正像一些优秀的折子戏往往需要很长时间的打磨才成为传世之作. 从微专题转换成微视频也有一个再创作的过程.

下面对八个分册逐一作出简短的介绍：

其一：《思想方法篇》十三章七十二讲. 我借用了《孙子兵法》十三篇，解题也如用兵，数学思想方法可以比喻为解题的兵法. 可以进一步说："知识"是基础，"方法"是手段，"思想"是深化，数学思想方法是解题的灵魂，是站在高处看问题，"一览众山小"，是居高临下、势如破竹.

第一章　分析与综合的思想方法三讲与"谋攻篇"相对应.

第二章　结构与模型的思想方法四讲与"虚实篇"相对应.

第三章　函数与方程的思想方法九讲与"作战篇"相对应.

第四章　变元与参数的思想方法五讲与"计篇"相对应.

第五章　数与形结合的思想方法十三讲与"形篇"相对应.

第六章　对称与对偶的思想方法二讲与"势篇"相对应.

第七章　转化与变换的思想方法十一讲与"九变篇"相对应.

第八章　化归与辩证的思想方法五讲与"军争篇"相对应.

第九章　特殊与一般的思想方法二讲与"九地篇"相对应.

第十章　整体与局部的思想方法四讲与"地形篇"相对应.

第十一章　分类与整合的思想方法十讲与"行军篇"相对应.

第十二章　归纳与类比的思想方法二讲与"火攻篇"相对应.

第十三章　演绎与推理的思想方法二讲与"用间篇"相对应.

其二：《压轴题攻略篇》三章五十讲，高考数学压轴题体现在数学解题能力与核心素养的考查上，需要解题者掌握"高处着眼、细微处入手"的功夫. 第一章，攻克压轴题的战略构想十讲，引导学生面对压轴题如何构造出一个解题计划的思路，从可以接近它的方向去攻击堡垒，对扑朔迷离的表象进行由表及里、去伪存真的分析、加工、改造，从不同方向探索，以不同的角度审视，在广阔的范围内选择运用解题的核心技巧. 如扎根基础、树上开花；解题要诀、谋定后动；聚焦题根、举一反三；发散思维、移花接木；活用策略、借石攻玉……掌握以上种种，对攻克压轴题如虎添翼. 第二章，攻克压轴题的战术提升十讲，优秀的解题者必须开拓视野，拓展知识面，注重解题方法的提升，激发迁移性思维与创造性思维，运用数学竞赛的特殊方法"攻城略地". 第三章，打响攻克压轴题的阵地战三大板块：函数与导数十一讲，数列与不等式八讲，解析几何十一讲，共三十个微专题. 对近几年高考中出现的压轴题进行了系统的整理，精选了其中最为典型的问题进行分析归类，选例紧扣课题，每题给出解题策略和尽可能的多种解法，并给出 1～2 道发散训练题，让学生趁热打铁、巩固升华.

其三:《代数篇》五十讲、其四:《几何篇》四十讲,合计九十个微专题,是高中数学的核心专题,充分呈现最重要的核心通识通解.课题的确定完全依据今年秋季在全国范围内正式使用的人教A版高中数学必修课程与选修课程,与新高考改革全面接轨,这九十讲立足基础、阶梯上升,体现核心素养,注重能力提升,以“怎样解题”为切入点(也是向解题大师G.波利亚致敬),点面结合、深入浅出,典型例题2~3道,易错警示1道、剑指难题1道、巩固练习2~3道,一个小时内既讲透课题,又及时反馈.这两本的特色是阶梯建构,既尊重学习者的个体差异、认知规律,又注重挖掘潜力、激发兴趣,其中易错警示的安排帮助学生寻找本专题中的易错点,努力对常见的解题误区和错因进行入木三分的剖析,知其因,懂其果,引以为戒,防患于未然,在正面分析典型例题的基础上进行及时的查漏补缺,突破瓶颈状态,消灭低级错误,正如堵塞不畅的河道只有加以疏通才能通畅无阻、一泻千里,这一步工作做好、做到位,是短时期内提高成绩的有效途径.剑指难题选例大多是具有综合性和创新精神的精彩好题,讲透这类题,使整节微课进入高潮!

其五:《妙思巧解篇》,撰写的主旨是:突破常规,轻松超越.数学是一个由无数问题组成并进行研究的学问,解题术的探究永远是数学学习中的宝藏,本篇的精彩之处就在于每道例题既给出常规解法,又给出妙思巧解(有时提供多种),数学思维应当是发散性的、批判性的、具有创造性的,解题之前对问题精到的分析总是“大处着眼,小处入手”,这“大处着眼”就是通过发散性思维、批判性思维、创造性思维寻求破解之道,产生奇思妙想,妙思巧解是数学智慧的精彩之果,对难题的“智取”比“常规”更富有数学灵动的特点.

其六:《一题多解篇》,G.波利亚说:“从理解题目到构思一个解题方案也许是漫长的曲折的过程.事实上,解答一个题目的主要成就在于构思一个解题的方案.”我认为G.波利亚的说法可作这样的改变,即解答一个题目尝试构思若干个解题的方案,好题往往可以从多个角度入手,设问形式灵活的题目总会有多种解题方法与之匹配,那么如何才能构思多个解题方案呢?由于看同一个问题的角度可以不同,思维中脑海里涌现出来的相关知识点也会不同,而知识之间常常是交错联结,互相渗透,于是各种思路就会涌现出来,一题多解也就产生了.我希望学生在复习的过程中首先要把知识点梳理清楚,构建知识网络图;然后逐步学会从不同的角度看待同一个问题,寻求解决问题的多种途径,尝试采用若干不同的解法;再进行比较研究,各种解法或简洁或繁杂,或直接或曲折,从而找出最为简洁明了的解法.当然也有可能一个问题的不同解法各有妙处,比如对空间图形的研究,有立体几何的一套解法,也有空间向量的一套解法,自成体系,各有千秋,难说谁优谁劣.总而言之,善于发散思维,掌握一题多解,即是基本能力,基本技巧的实战演习,也是解题能力的升华.可以用钱锺书的诗作这样的比喻:碰到难题好比“云深难觅处,河浅亦迷津”,必须设法解决它,“那得五丁开路手,为余凿梦两通连”,一旦思路来了,解法如潮涌动,“滂沛挥刀流不断,奔腾就范隘而妨”,求学问的哲理大致如此!只有打好扎实的数学基础,重视解题方法的研究,困难隔不断你的解题思路,灵感使你进入腾飞状态,“方法每前进一步和每上一个台阶一样,它会为我们展开更为广阔的视野,因而看到前所未有的现象”(巴甫洛夫).希望本篇助你成为“武林高手”.

其七:《一题多变篇》,好的数学题往往紧扣数学概念的本质,为了加深对概念的深入理解,如果将典型性强的问题,通过变式,多角度、全方位挖掘概念的内涵,从而举一反三

解决一大批题目，有助于培养创新意识，提升数学核心素养. 我们把那些极具典型性的好题称之为“题根”或“母题”，以这些好题出发，通常会有几种变式形成“变式网络”，或改变“条件”看一看能否推出类似的结论；或在同样条件下，推究还会推出怎样的新结论；或变一下问题的“规则”，使原问题突显创新的成分. 寻求“题根”与“变式”、“母题”与“子题”是数学教育的一抹亮色. 当然所谓“变式”或“子题”与“题根”或“母题”必然有一条红线串起来，这条红线就是“变式网络”或“亲缘关系”，可以运用思维导图的模式呈现，科学性不容置疑，新颖性是“变式”或“子题”优劣的标志，适当变式，精而不泛.

其八：《战略战术篇》，它与《思想方法篇》相呼应，由于解题战略、战术枝繁叶茂、丰富多彩，故安排一百节微课，聚焦于解题的战略、战术和学科方法.

如何才能有效地破除题海战术，实现高效的数学学习呢？集中到一点就是教会学生解题的有效方法，教师应当有点石成金的手段，让学生掌握解题兵法，包括解题的战略构想、解题的战术运作、解题中数学思想领悟（在《思想方法篇》中详细介绍），解题中学科方法落实四大环节，解题术的研究领域极其丰富多彩，本篇选择其中最为重要的专题展开. 如数学解题、四大环节；审题、谋划、构思方案；实施方案、层层推进，关注联结、催生思路；联想生辉、触类旁通；重在构造、移花接木……又如进退自若、反客为主、正难则反、以奇制胜……又如等价转化法、参变分离法、顺推法、递推法、反证法……林林总总，归结到一点：数学解题必须迅速读懂题目，调动脑海中对数学知识、解题方法等信息的贮存，找到问题解决的主攻方向，总体把握、精准部署，向问题发出攻击令.

二

张中行先生在他的《顺生论》一书中有这样一段话：“生，来于天命，我们抗不了，于是顺. 顺之暇，我们迈出几步，反身张目，看看它的脸色，总比浑浑噩噩，交臂失之，或瑟瑟缩缩，不敢仰视，好一些吧？”把不得不顺应环境又向往入世、积极进取的儒生心态刻画得入木三分.

由于“文化大革命”打破了我高中毕业即考入高校求学的梦想，我这个 66 届高中生在经受了那个时代给青年人带来的苦难后，正逢中学缺少师资，终于从 1974 年开始到中学任教，开启了我数十年的教师生涯. 1977 年恢复高考进入上海师范大学数学系学习，毕业后名正言顺地当了高中数学教师，从走上三尺讲台至今度过了四十五个春秋，痛并快乐着. 只要时代给我们机会，我们一定会给时代抹上明亮的色彩，人的灵魂渴望向上，就像游子渴望回到故乡一样. 灵魂的故乡在非常遥远的地方，只要生命不止，它就永远在思念、在渴望，永远走在回乡的途中. 离开三尺讲台已有多年，我始终怀念在三尺讲台前挥洒的岁月. 四十多个春夏秋冬，我始终认为一个数学老师的成功莫过于让学生喜欢数学，感受串串枯燥的数字与冰冷的公式中蕴藏着如哲学般深刻的智慧和如文学般灵动的思想，体味数学的魅力. 我追求上课风趣幽默，言简意赅，详略得当，有点石成金的功夫. 对一些难题一点就破，把每节课讲得生动、活泼、易懂，以问题的情境作为教学的出发点，以娴熟的授课艺术感染、激励学生. 有关我上课的场景，有一位学生写过一篇很传神的短文，全文录于下面，也是对四十多年教学生涯的一种纪念.

吾师李公正兴传

某日.教室.

有一中年教师正在慷慨陈词，底下学生满堂，少有人离神.教师系上海人氏，操一口上海话，说得平平仄仄，抑扬顿挫，高声处若峻峰插天，低音时如陡坡接地，极富感染力.说到尽兴，老师独自嘿嘿而笑，学生哄堂大笑.整个教室笑意融融，竟胜似户外光景.此师动作亦很投入，时而拿出一些粉笔“排列组合”，时而举起双手当空了了勾画，常以手掌代替擦板，状极潇洒.快下课时，老师忘我，众目睽睽下，眉飞色舞，大谈其教学生涯.众生愕然，继而善意一笑，依然凝神细听.

呜呼，似这等真性情、全身心投入教学之老师，诚少见矣.其言行也怪，其童心未泯，其授课认真，皆非世俗标准所能衡量也！

此师，则李公正兴也.其人冠绝天下；其课亦横盖当世.

有些课只为给旁人看，或专供领导查阅、观赏.便有子只把备课当成差使，照抄教参教案，对教材教法学法一无所知，待到上课，便抱教参、教案读.有师若此必无心于学生，影响教学效果，亦不利学生的发展，所培养者仅一批死记硬背的“机器”，“索然无味”矣.

李公不然.其备课认真慎重，对教材、教法、学生、学法等方面了若指掌，在课堂教学中随机应变、左右逢源，极致发挥教师之本，使其讲授妙趣横生.

其课何优耶？

一、深厚思想.

备课时端正思想，乃成事保证.备课只为上好课、优化教学质量.李公对备课有了正确的思想认识，故而备课认真.

二、钻研教材.

李公酷爱钻研教材、资料.其饱览教材及各地各校的参考资料，可谓“胸有教材”.李公更是立于整体深入地了解教材内容体系，确定教学重、难点，化教材为己用，以臻自如.

三、了解学生.

了解学生方能因材施教！而李公不但了解学生的知识技能、学习习惯，以拟订相应教法、学法，更于课余与学生打成一片，了解诸生的生活习惯等，可谓“身体力行”.

四、选择教法.

前苏联教育家孔德拉狄克有言：“教学成败取决于教师能否妥善选择教法；知识的明确性、具体性、根据性、有效性、可信性，有赖于对教学方法的有效利用.”李公正是根据教学内容和教学实际，进行教法的选择、创造，以寻适于本班学生的教学方法.教学重在教法，要以法导学.

此，即吾师李公正兴也.

——颜佳琪

虽然有些话语讲得过了，但确实反映了学生出自内心的一些感受.

（原文见上海人民出版社 2004 年本人所著《新课标高考数学攻略》代序“一个高中班级数学教学过程的剖析”.）

三

退休已进入第十二个年头，却仍然是整天忙忙碌碌，但内心是安静的，人生最好的境界是丰富的安静，正如哲学家周国平所言："安静，是因为摆脱了外界虚名浮利的诱惑. 丰富，是因为拥有了内在精神世界的宝藏.""你的身体尽可以在世界上奔波，你的心情尽可以在红尘中起伏，关键在于你的精神中一定要有一个宁静的核心."他还说："尽管世上有过无数片叶子，还会有无数片叶子. 尽管一切叶子终将凋落，我仍然要抽出自己的绿芽."这些话语与我的内心是非常合拍的，在物欲横流的人世间以平静的心态坚持做对社会有价值的事情，这种坚持与名利无关，名够累人，利也不缺. 进取也罢，退隐也罢，都逃不脱时光的变迁，与其退隐，不如进取，退隐自守，清静无为，不是我欣赏的人生哲学. 一个人的精神财富是以他的心灵为仓库的. 今天我们大谈"你幸福了吗?"对我而言，能静心地把四十余年的教学经验和知识传授给那么多学生，可以称得上是幸福了！孔子曰："士不可以不弘毅，任重而道远，仁以为己任，不亦重乎？死而后已，不亦远乎?"人生在世，既能站得正，又能跳得出，这是一种很高的境界，要完全做到唯有看轻沉浮荣枯，当然很难，但应尽力去做. 当下我的生活基本上由两件事组成：一是读书、授课、写作、教研，既发挥余热，又有益于社会，从中获得心灵的享受；另一是亲情和友情，从中获得生命的享受. 我相信，大自然提供的只是素材、家庭幸福是人生坚实的依靠，这是阳光下绵亘着人生简朴的幸福. 浩渺宇宙，一个生灵与另一个生灵的相遇总是千载一瞬，每当出版一部书，我想到的是要感谢我的家人.

钱锺书诗云："眼犹安障长看雾，心亦悬旌不待风."人生最美好的享受都依赖于心灵的能力. 虽心空万物却执着顽强，洒脱空灵却进退有度，仰望上苍是缅怀人世，俯视当下则勇往直前. 当一件工作完成，一本书收尾之际，我又在思考下一步：要抓紧读些什么书？规划再写一本怎样的书？是教辅，还是对自己钟情的数学文化、数学哲学作出深入的研究？还是其他？每当看到书房的书架上还有许多先哲的书没有看完，总会伤感人生苦短，暗下决心抽时间与先哲对谈. 读书、写作、研究，这是我的精神家园，书房、书桌、讲台是我安身立命的阵地，灵魂敞亮，你的老年人生就有了明灯和方向.

六州歌头——述怀

霜雪染发，落日夕阳红，述而斋，北窗下，清晖共，勤耕耘.
案上稿盈尺，渐升起，涓流积，沧溟水，拳石垒，泰山耸.
四千万言，廿部六十册，笑对晚风，人生苦与乐，尽在不言中.
岁月匆匆，白头翁，忆少年时，狂来笔、青春梦，豪情涌.
"文革"乱、神州坠、道难通，影朦胧.
小平扭乾坤，启高考，情意浓.
攻数理、授《九章》，心晶莹.
收得桑榆，满山桃李拥，暮敲晨钟.
浩然吟啸客，老眼望山川，漠漠苍穹.

四

年过七十，应该到了打扫战场的年龄，今年推出的两套书，一套是由上海科学普及出版社出版的“李正兴高中数学系列”：《高中数学核心解题技巧 120 讲》《高中数学红宝书——知识点梳理·精讲·贯通》《高中数学蓝宝书——实践必考点、破解压轴题》；另一套就是上海社会科学院出版社推出的《李正兴高中数学微专题》系列，这应该是我从事高中数学教学与研究总结性的著作. 忙忙碌碌的日子应该结束了，我应当安静下来“准备回家”，以一颗澄明的心抹去人世间泼过来的污秽，笑着面对人世间的不公正，留下的是温馨与美好. 我很欣赏王国维的诗句：“起看月中霜万瓦，卧闻风里竹千竿.”“奇峰颇欲作人立，乔木居然阅世新.”我也一直用他的诗句“那能白首下书帷”自励，但是我明白了“白首终得下书帷”. 四十五年了，在高中数学教育领域，我努力了，我的灵性和思想的傲骨曾经开出忧世且向善的花. 至少有百万高三学生用过我的书，这就够了，鲜花烂漫终会凋零！不是吗？

为我的最后一部作品填词一首.

金缕曲

——题《高中数学微专题》系列丛书

白发染双鬓，案台上，文稿盈尺，汗牛充栋.
八大本微型专题，思想方法技巧，细钩画，文思泉涌.
五色尚存生花笔，多与变，妙思来称雄，攻压轴，墨舞动.
青春岁月争锋，助学子，代数几何，梳理贯通.
四十载讲台挥洒，一亩三分耕耘，君应记，我心晶莹.
传道授业解惑事，势与术，闯关凭借神功，战略篇，波涛阒.

最后我要感谢我的妻子杨蕙芬，没有她的支持，我的 4000 多万字的专著是不可能写出来的. 我还要感谢上海社会科学院出版社的王芳主任和何红燕编辑，她们为我的书的出版付出了很多，她们也是数学教育战线上勤奋耕耘的战士.

限于本人水平，疏漏之处在所难免，欢迎读者批评指正，合作交流.

李正兴
于海上述而斋

前言

《压轴题攻略篇》共三章五十讲. **第一章“攻克压轴题的战略构想”有十讲**,从十个方面归纳攻克压轴题的解题策略,引导解题者“高处着眼”构造出切实有效的攻击难题的方针. **第二章“攻克压轴题的战术提升”也是十讲**,从十个方面阐述解题者必须开阔视野,拓展知识面,重视数学思想的渗透和解题方法的提升,激发迁移思维与创造性思维,把攻克高考数学压轴题与如何在高考中拿高分的策略有机结合起来,运用数学竞赛的特殊方法“攻城略地”. **第三章“打响攻克压轴题的阵地战”分为三大板块**,其中“函数与导数”十一讲、“数列与不等式”八讲、“解析几何”十一讲,合计三十讲,即三十个微专题. 高考复习对纵向基础知识的梳理和横向各板块知识的综合应当有清晰的认识与掌控,不仅要通盘考虑,还要有重点、突破点,重大专题是出压轴题和加试题以及将要实施的“强基计划”试题的所在. 编写第三章的目的,即在于如何把这些板块挖掘得更深入、更透彻,尽可能想出决战千里的锦囊妙计. 第三章的三十讲以近年来高考原题及原自主招生试题为主要例题,除了对一些重要课题进行归纳整理之外,还盘点了近年函数与导数型热点考题、数列与不等式热点考题、解析几何热点考题,重点介绍用导数研究和解决新颖性问题、以数列为背景的探索性与新颖性问题、以解析几何为背景的探索性与新颖性问题,等等,将典型性的新题、好题、能力题一网打尽.

高考压轴题当然不是常规的问题,常规的普遍化的题目一般是有一定套路的问题,通常可按套路走,但是稍进一步的问题或更为复杂的问题当然不可能有套路走,特别是近年来出现的压轴题大多是具有创新要求的综合性问题. “怎样解压轴题”应当是数学教与学永恒的课题. 2019 年高考数学全国卷Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ,不论理科还是文科,考生普遍反映压轴题太难,然而这所谓的“难”,讲白了就是对数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析这六个方面的核心素养体现得更充分. 考题的难或易年年有变化,但解题中有些规律性的东西是永远不变的. 学会怎样思考才能以不变应万变.

数学教育家 G·波利亚那风靡世界的名著《怎样解题》为数学解题理论奠定了坚实的基础,这本书中有许多深刻的思想与独到的见解,把数学解题归结为**弄清问题、拟定计划、实现计划、回顾反思四大环节**.

弄清问题也就是我们通常讲的“审题”,把问题中的内涵与外延审核清楚,而“审题”的关键是“读题”,甚至反复“读题”,问题尚未弄清楚就匆匆下笔很难获得正确而完整的解法,可能会走不少弯路,甚至根本搞错了方向,这第一步弄清问题很重要.

拟定解题计划,在审题之后需要探索,既要从大处着想,又要在细微处考量,针对问题在脑海中闪现一系列的思考,提出一系列的疑问,“将军欲以巧伏人,盘马弯弓惜不发”,不

拘泥而灵活地拟定解题方案，这是高手的作派. G·波利亚说："好的思路来源于过去的经验和以前获得的知识."也许压轴题很新颖，似乎从未看到过，切莫慌，要善于化新为旧，解题需用到的知识与方法一定在你所学过的范围内.

实现计划. 若解题计划是完善的，实现计划往往是"例行公事"，但事实上任何计划不可能100%的完善，难免需要作出少量的修改，即使计划相当完善，在实现计划的过程中一般仍会需要一些机械性的计算和推理. 如果在一个细节上出了问题，还得推倒重来. 所以在实现计划的过程中关注细节非常重要，有时"细节决定成败". 正如G·波利亚所言，"解题方案给出了一个总体的框架，我们必须使自己确信细节都符合这个框架，所以我们不得不耐心地逐个检查所有细节，直到每一点都非常清晰，不再有任何可能会隐藏着错误的含糊之处"，这讲的正是解题过程的正确性、严密性.

回顾反思. G·波利亚强调："通过回顾完整的答案、重新斟酌、审查结果及导出结果的途径，他们能够巩固知识，并培养他们的解题能力."回顾反思是"领会方法的最佳时机". 坚持回顾反思，可以让你及时梳理总结，使你通过解决一道题达到能顺利解决一批题的能力，这叫作举一反三，甚至举一反十. 坚持回顾反思，更能养成一种敏锐的"题感"，碰到众多的同类型问题，脑海里顿时思路涌动，即使题目类型不完全相同，仍可通过联想和发散性思维找到破解之道，迅速抓住关键、单刀直入，立即深入问题的核心，解题高手就是在不断回顾反思中炼成的.

CONTENTS 目录

第一章

攻克压轴题的战略构想

高考数学压轴题通常是指试卷中体现“选拔”功能的试题，主要分布在解答题的最后两、三道题中的部分较难的小题或填空题、选择题中少量较难的题目，分值大约占全卷的20%，数学压轴题的特点是设计新颖、思维含量高、数学核心素养体现得非常充分，它们的作用是提高考试的分区度.

压轴题之所以难度高，体现在综合性强，对解题能力的要求高，通常命题者总是在新颖且具有创造性上做文章.攻克压轴题需要学生更好地融会贯通知识，需要对极为陌生题目的领悟力，需要突破常规、另辟蹊径，尝试用新的方法来分析、求解，着眼于进一步提高处理知识综合和融合试题的能力.

在数学学习与复习的过程中也确实有这种知识综合和解题能力提升的需要，数学高考复习第一轮基本结束后，不少学生测试的成绩仍在110分左右徘徊，经常碰到这样的学生，他们在试卷发下来后心里非常懊恼，难一点的试题如压轴题找不到正确的思路干脆瞎做一通，甚至开了“天窗”，也有的解题过程虽然书写得洋洋洒洒，但其中漏洞百出，得分很少，如果在基础题和中档题部分又犯了不少低级错误，最后的分数可想而知.

这实际上是数学复习中的瓶颈状态，表面上通过一轮逐章逐节的复习，仿佛对每章、每节的知识点都掌握了，实际上还停留在表层，不能把知识点纵横联结甚至对某些知识点的认识仍然模糊不清，不能做到“了然于胸”，出现上述种种“状况”是不奇怪的.要突破这种瓶颈状态，除了进一步梳理、贯通知识、查漏补缺外，对解题术的研究应当摆上冲刺阶段的日程表.“攻克压轴题的战略构想”十讲为你描绘了解决难题的路线图，使你的解题能力达到一种广阔和自由的境界.

第一讲 扎根基础、树上开花

树上开花，是由“铁树开花”转化而来的，原意为不可能开花的树竟然开起花来了，比喻极难实现的事情.兵书《三十六计》上把它作为制造声势以慑服敌人的一种计谋，许多成语的含义是在不断演化的，因为“铁树开花”虽然不容易，但也有开花的时刻.

高中数学考点众多，知识体系十分丰富，如果我们把它们看作一棵树的枝叶，叶与叶之间从表面看似乎毫不相关，而实际上同属于一棵树，同宗同脉，考点与考点之间是紧密联系在一起的，章与章之间知识上是互相交汇的，如果我们能够融会贯通这一系列的通识、通法，一定会结出丰硕之果.

要进入这种“扎根基础、树上开花”的境界必须首先做到以下两点：

1. 回归课本、梳理概念

观察近几年的高考数学试卷中的压轴题，虽然初看似曾相识，但细看又关卡重重，其特点是综合性强，难度确实有点高，但是我们静下心来仔细审题，解题的入口还是比较宽的，命题者不可能连门都不让你进.把题目分解开来看，也并不是一道大题的每道小题都很难，通常前面几小题仍以中学数学的基础知识、重点内容、基本方法出发设计命题，把对基础知识的考查放在突出的地位，从基本概念、基本性质、基本表达形式、基本的公式出发去理解问题、解决问题.所以当前最重要的是在第一轮复习的基础上，以课程标准与《考试手册》为纲，以题型示例为参照，以课本为依据，独立地把各章知识点梳理一遍，一是厘清知识发生的本质，构建高中数学基础知识的网络；二是克服“眼高手低”“好高骛远”的毛病，对课本中的例题、习题进行举一反三的推敲；三是对第一轮复习过程中老师讲的例题、布置的习题进行整理归纳，对做错的习题进行分类订正，对于典型例题、习题提炼通法，构建知识块、解法链.实际上高考中相当多的试题是从课本上的例题进行适当变形或重组而得到的，直接考查课本上某一定理的证明也出现过多次，回归课本，梳理概念，既有利于消除第一轮复习中还存在的薄弱环节，查漏补缺，全面把基础落实，更有利于拿下压轴题中的基本分.

2. 重视“通法”，淡化“特技”

《考试手册》指出：“数学学科高考旨在考查中学数学的基础知识和基本技能、逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力、分析问题与解决问题的能力以及数学探究与创新能力.”近年来又提出“核心素养”，这是在高考数学复习中必须认真理解、切实照办的.当前课改的根本方向是课程目标的构建，即由“知识与技能”“过程与方法”“情感态度与价值观”3个维度构成的目标体系，强调“展现知识的发生、发展、形成和应用的过程”，这就告诉我们当前命制数学高考题不会过分地追求特殊方法和特殊技巧，运算量也不会太大，但试卷的阅读量会增加，所以考生应用重视“通法”，也就是高中数学中经常运用的由数学思想统领的基本解题方法.这种“通法”的掌握不是靠做大量的习题才能做到，而应当学会“读题”，通过“读题”提高思维层次，通过归纳总结领悟并掌握“通法”，比如可以找一本以总结解题方法为主的参考书，通过读题，首先想一想这道题涉及哪些重要的知识点，想一想若自己做这道题可以运用什么样的解题方法，不妨试着解一解，再看一看书中是如何分析这

道题并提供了怎样的解法，随即与自己的解法相对照比较一下优劣，思考一下本题的解法中运用了哪些数学思想与解题谋略，回顾一下所碰到过的类似的习题，思考当题中条件、结论稍作改变，在解法上会有什么变化等.

千万不要认为学会解题一定要做大量的题目，反反复复地进行操练，解一定量的题目以巩固知识的掌握程度是需要的，若再辅之以边读题边思考边总结，必定事半功倍.

以上两点是确保压轴题基本分获取的法宝.

一、例题精讲

例 1 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在区间[2,3]上有零点，则 a^2+b^2 的取值范围是________.

解题策略 本题初看不过是二次函数问题.二次项系数为1，抛物线开口向上，在区间[2,3]上有零点，则对有一个或两个零点讨论，由于对称轴未定，对称轴相对于区间的位置关系又要进一步分类讨论，解题过程是够复杂的，难点不仅仅在此，因为解析式中含有双参数，而需寻求的是双参数构成的关系式 a^2+b^2 的取值范围，a^2+b^2 用什么来表示？如何才能求出其范围？看来解决本题并不简单.解决本题的关键是实施转化，把较为复杂的问题朝简单的方向转化、朝常见的题型转化、扎根基础、寻找最基本的通解求出结果.比如将双参数的最值问题转化为单参数函数的最值问题，利用导数求最值就方便多了；比如通过变更主元，即视 a,b 为主元，x 为参数，则关于 x 的二次方程 $x^2+ax+b=0$ 变更为 $b+xa+x^2=0$ 则是直线方程，$(a^2+b^2)_{\min}$ 即为原点到此直线距离的平方；比如通过构造向量运用柯西不等式求解；又比如转化为函数零点问题结合“耐克”函数单调性求解.总之，这4种思考方法都是把难度较高的双参数问题转化为容易求解的基础问题，化难为易应当是解题者追求的目标.

解法一 由 $b=-x^2-ax$，得 $g(x)=a^2+b^2=(-x^2-ax)^2+a^2=x^4+2ax^3+a^2x^2+a^2$，

$\therefore g'(x)=2x(x+a)(2x+a)$.

当 $a\geqslant-2$ 时，$g(x)$在区间[2,3]上单调递增.

$\therefore [g(x)]_{\min}=g(2)=5a^2+16a+16=5\left(a+\dfrac{8}{5}\right)^2+\dfrac{16}{5}\geqslant\dfrac{16}{5}$，

此时 $a=-\dfrac{8}{5}$，$b=-\dfrac{4}{5}$.

当 $a<-2$ 时，$a^2+b^2\geqslant a^2>4>\dfrac{16}{5}$(舍去).综上，$a^2+b^2\geqslant\dfrac{16}{5}$.

解法二 $\because x^2+ax+b=0$，把主元 x 变更为 a,b，x 为参数，则关于 x 的二次方程变为关于 a 和 b 的直线方程 $b+xa+x^2=0$.

$\therefore (a^2+b^2)_{\min}$ 即为平面上原点到直线 $b+xa+x^2=0$ 的距离平方，有

$d^2=\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2=\dfrac{x^4}{x^2+1}\geqslant\dfrac{16}{5}$，当 $d^2=\dfrac{16}{5}$时，$x=2$.

解法三 由 $x^2=-ax-b$，得 $\vec{\alpha}=(-x,-1)$，$\vec{\beta}=(a,b)$.

则 $\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2\geqslant(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2$，即 $(a^2+b^2)(x^2+1)\geqslant(-ax-b)^2=x^4$，

$a^2+b^2\geqslant\dfrac{x^4}{x^2+1}=x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}-2\geqslant\dfrac{16}{5}$，此时 $a=-\dfrac{8}{5}$，$b=-\dfrac{4}{5}$.

解法四 设 α,β 是函数 $f(x)$ 的零点，$\alpha\in[2,3]$，$\beta\in\mathbf{R}$，

$\because\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$，$t=\alpha^2+1\in[5,10]$.

$$\therefore a^2+b^2=(\alpha+\beta)^2+(\alpha\beta)^2=(\alpha^2+1)\beta^2+2\alpha\beta+\alpha^2=(\alpha^2+1)\left(\beta+\frac{\alpha}{\alpha^2+1}\right)^2+\frac{\alpha^4}{\alpha^2+1}$$

$$\geqslant\frac{\alpha^4}{\alpha^2+1}=\frac{\alpha^4-1+1}{\alpha^2+1}=\alpha^2+1+\frac{1}{\alpha^2+1}-2$$

$$=t+\frac{1}{t}-2\geqslant\frac{16}{5}\ (t=5\text{ 时取等号}).$$

此时，$\alpha=2$，$\beta=-\dfrac{2}{5}$.

例 2 (1) 已知函数 $f(x)=\sin2x+a\cos2x$ 的图像关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{8}$ 对称，求实数 a 的值.

(2) 将函数 $f(x)=\sin2x+\cos2x$ 的图像向左平移 φ 个单位，所得图像对应的函数为奇函数，求 φ 的最小正值.

(3) 若将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图像向右平移 φ 个单位，所得图像关于 y 轴对称，求 φ 的最小正值.

(4) (2017 年高考数学全国卷Ⅱ理科第 14 题) 函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}\left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是________.

(5) (2018 年高考数学全国卷Ⅰ理科第 16 题) 已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin2x$，则 $f(x)$ 的最小值是________.

(6) 设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ (A,ω,φ 是常数，$A>0$，$\omega>0$)，若 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性，且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，求 $f(x)$ 的最小正周期.

解题策略 这是一组研究三角函数周期性、奇偶性、单调性以及图像的对称性、最大最小值的基础题，而且它们之间又往往交汇在一起，可以纳入统一的知识体系，从不同的角度入手求解，有些解法非常巧妙. 这类题扎根基础，看似简单，内涵丰硕，是三角函数这棵大树上开出的美丽小花.

解：(1) **解法一** (通解一) $\because y=\sqrt{1+a^2}\sin(2x+\varphi)$ ($\varphi=\arctan a$)，

$\therefore|y|\leqslant\sqrt{1+a^2}$，由正弦函数图像的性质知，当 $x=-\dfrac{\pi}{8}$ 时，$|y|=\sqrt{1+a^2}$，

即$\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+a\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{1+a^2}$，$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}|a-1|=\sqrt{1+a^2}$，

即$\frac{1}{2}(a-1)^2=1+a^2$，$\therefore a=-1$.

解法二 （通解二）$\because$函数$y=f(x)=\sin2x+a\cos2x$的图像关于直线$x=-\frac{\pi}{8}$对称，

$\therefore f\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)=f(x)$，即$\sin2\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)+a\cos2\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin2x+a\cos2x$，

$\therefore -\cos2x-a\sin2x=\sin2x+a\cos2x$，即$(a+1)(\sin2x+\cos2x)=0$，故$a=-1$.

解法三 （特殊法解）$\because$函数图像关于直线$x=-\frac{\pi}{8}$对称，且$(0,a)$在原函数的图像上，点$(0,a)$关于$x=-\frac{\pi}{8}$的对称点为$\left(-\frac{\pi}{4},a\right)$.

$\therefore f(0)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，即$a=\sin2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+a\cos2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，故$a=-1$.

（2）$f(x)=\sin2x+\cos2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$，

先作出函数$y=\sqrt{2}\sin2x$的图像，再向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位，操作时也可理解为相对地将y轴向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位，再将图像向左平移φ个单位确保平移后的函数为奇函数，求φ的最小正值，即将y轴再向右平移，第一次经过图像与x轴交点时平移的大小即为φ的最小正值，应为$\frac{3\pi}{8}$.

（3）解法一 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图像向右平移$\varphi$个单位得函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}-2\varphi\right)$的图像，由函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}-2\varphi\right)$的图像关于$y$轴对称可知，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\varphi\right)=\pm1$，即$\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\pm1$，故$2\varphi-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，又$\varphi>0$，$\therefore\varphi_{\min}=\frac{3\pi}{8}$.

解法二 根据正弦函数的对称性，只要找到y轴左侧第一条对称轴.

由$2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，取$k=-1$，得$x=-\frac{3\pi}{8}$，

即将函数$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图像向右平移$\frac{3\pi}{8}$个单位.

（4）化简三角函数的解析式，得

$f(x)=1-\cos^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}=-\cos^2x+\sqrt{3}\cos x+\frac{1}{4}=-\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1$.