

# 初中数学再创造

基于再创造数学观的反思性学习研究

张丽芝 著



上海社会科学院出版社  
SHANGHAI ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES PRESS

# “悦行文库”系列教育丛书 编审委员会

主任 张 伟 陈 强

副主任 严国华

编 委(按姓氏笔画为序)

朱爱忠 庄晓燕 孙海洪 邱焯红 张立敏

陈菊英 赵国雯 胡 军 钟 岩 徐 兰

# 前 言

“悦行文库”是浦东新区为优秀教师领读者和共读团队出版高质量的“书香校园”教师读书成果而设立的一个项目。通过“悦行文库”的编辑出版,形成有品位的、能多方面反映浦东“书香校园”建设成果的系列教育丛书。

为贯彻落实 2019 年全国教育大会关于“建设社会主义现代化强国,对教师队伍建设提出新的更高要求”的精神和上海市教委关于“探索建立‘人人有团队’的教师团队发展机制”的要求,进一步营造书香浓郁的校园氛围,提升教师的专业素养和文化素养,培养“四有”好老师,近年来浦东新区教育工会持续开展以“悦行”为主题的“书香校园”浦东教师读书系列活动,涌现出了一批优秀的读书社团和主持人。

2017 年,浦东新区教育工会邀请数位领衔教师,组建了学习共同体、教师勇气更新研习营、书香盈耳诵读会以及教师读书公号联盟等四个区级读书组织,开展了为期一年的示范性读书社团建设活动,表彰了首批优秀主持人和领读者。

2018 年,“悦行”读书社团在浦东大地上如雨后春笋一般迅速发展,共登记备案了 16 个跨校读书社团、75 个校内读书社团,充分发挥了读书组织的引领和辐射作用,促进了学校以愉快阅读、提升自我为目标的“书香校园”建设。

自 2019 年以来,浦东新区教育工会继续大力推动“书香校园”建设,着力培育更多“悦行”读书社团(据不完全统计已经超过 200 个),发现与培育优秀的主持人,鼓励他们在本校内或不同学校之间建立教师共读小组,形成通过读书社团推动教师读书活动深入开展的良好局面。

通过三年努力,浦东新区已培育出一批优秀的“悦行”读书社团主持人,他们创造性地建立了各自社团的活动制度,围绕教育教学、课题研究、专业发展和兴趣爱好等方面开展丰富多彩的共读、领读、跟读、行读活动。主持人们精心挑选适合小伙伴的书籍,精心设计活动方案,投入了充足的时间,通过线上与线下相结合等多种方式推进读书活动。更难能可贵的是,部分社团主持人已经将共读和教改实践进行了有机整合,通过基于共读的教育教学改革和行动研究,积累了有价值、有品质的科研成果,能以点带面地反映浦东“书香校园”建设的深度和实效性。

为了更好地鼓励社团主持人继续在书香共读、读研合一的道路上探索、前行,浦东新区教育工会与上海社会科学院出版社经过磋商,初步达成了为期三年的“悦行”社团教师读书活动专著出版合作计划,每年为有研究、有成果的优秀社团主持人出版一两本专著。我们相信,此举会有力地激励有追求、有毅力的优秀教师投身到“书香校园”的深度建设之中。一方面,促动优秀教师的专业成长方向上求精、求专;另一方面,带动更多的教师通过多读书、读好书,提升教师队伍的综合素质。系列专著的出版,将和上百个活跃在浦东“悦行”读书社团一起,共同营造浦东新区“书香校园”“书香教师”“书香教育”的美好明天。

“悦行文库”的推出,有利于树立学校和教师的研究典范,扩大浦东新区“书香校园”建设的的社会影响力。丛书收入的著作内容广泛,涉及教育教学多方面的领域,相信能催生出一批有价值、有品质的科研成果。

由于我们的认识水平有限,加上时间仓促,所以在“悦行文库”中难免会出现一些不足之处,恳请广大教育同仁的批评指正。

编者  
2019年12月

# 目 录

## 第一编 数学史与数学创造

第一章	数字大观	004
第一节	数的产生	004
第二节	史上奇葩的记数方法	007
第三节	进位制	011
第四节	单位分数之谜与《九章算术》	017
第二章	从分数到分式的课例	028
第一节	史料分析	028
第二节	教学细节	029
第三节	问题讨论与实践反思	036
第三章	灿烂如花的希腊文明	039
第一节	泰勒斯——从实践到理性第一人	039
第二节	“万物皆数”与毕达哥拉斯	044
第三节	古希腊的其他数学成就	060
第四章	HPM 下初中函数思想与坐标系概念的建立的课例	068
第一节	初中函数教学的困境	068
第二节	相关数学史料分析	068
第三节	教学实践	070
第四节	教学反思	072
	小 结	074

## 第二编 从数学到数学教育

第五章 数学的本质	080
第一节 数学非算术	080
第二节 数学语言与形式化	082
第三节 抽象化的途径——外延法与公理化	085
第四节 数学的严谨性	087
第五节 横向数学化与纵向数学化	091
第六节 数学的发展源于实践而超越于实践	092
第六章 数学教育	096
第一节 “再创造”数学	096
第二节 课堂教学引导	106
第三节 学生、教师与教材	111
第四节 荷兰教育文献对比	117


## 第三编 基于再创造数学教育观的初中生反思性学习指导研究

第七章 课题结题报告	122
第一节 研究概况	122
第二节 研究的实施和过程	133
第三节 研究的成效和反思	163

## 第四编 我们的共读

第八章 弗赖登塔尔共读：思维的碰撞与启迪	182
第一节 数学史	182
第二节 数学与生活	183
第三节 数学与哲学	184
第四节 文化与传统	185

第五节	自由与专制 .....	186
第六节	其他问题 .....	187
第九章	共读《数学简史》 .....	188
第一节	共读的源起 .....	188
第二节	2018 年活动 .....	189
第三节	2019 年活动 .....	191
第四节	读后感两篇 .....	195
后 记 .....		202



第一编  
数学史与  
数学创造



数学发展的历程在个人身上重现,这才符合人的认识规律。数学在其发展中,走过漫长而曲折的道路,它不断地修正过自己的进程,避开弯路,绕过死胡同,重新明确前进的方向。<sup>①</sup>

——弗赖登塔尔

孩子的数学学习应该经历怎样的过程呢?

8年前,从华东师大汪晓勤教授的一篇文章中学到“历史相似性原理”,他带领研究生通过课堂教学实验和问卷调查与访谈来证实历史相似性原理:“历史发生原理告诉我们,学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程具有一定的相似性,历史上数学家所遭遇的困难正是学生所经历的障碍。”文中还列举了几位大数学家的类似观点,如M.克莱因说:“历史顺序是教学的指南。”波利亚说:“只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识,我们才能对人类的孩子应该如何获得这样的知识作出更好的判断。”庞加莱说:“教育工作者的任务就是让儿童的思维经历其祖先所经历,迅速通过某些阶段而不跳过任何阶段。”<sup>②</sup>此观点深深触动了我,但是由于我对数学的发展史可谓一无所知,因而也不知道如何让数学的学习依照数学发展的历史进程而展开。

7年前,我读弗赖登塔尔<sup>③</sup>(1905—1990年)的《作为教育任务的数学》一书,在读第一章的过程中,我对每一个陌生的人名或事件都进行拓展追踪,对于数学发展的历史进程有了一定的了解和思考。

3年前,再遇汪晓勤教授,有幸参与他的团队对初中数学课例的研发的实践反思,让我更坚定了数学史对于数学教学的意义。

以史为镜,可以知兴衰。通过阅读,跟随真正的数学大师,才可以带我们纵览数千年的数学发展史,让我们清晰地看到数学的方向。

数学如何发展起来的?这个问题有助于我们理解儿童的数学学习史。我随弗赖登塔尔走进人类的数学发展史,以窥其成败。弗赖登塔尔认为:“生物学上‘个体发展过程是群体发展过程的重现’这条原理在数学学习上也是成立的。”也就是说,历史对于教学有两方面的作用:一、相似性,即从大的方向上讲“数学发展的历程也就在个人身上重现”;二、浓缩性,即从细节上讲“避开弯路,绕过死胡同,重新明确前进的方向”。

<sup>①</sup> 弗赖登塔尔,作为教育任务的数学[M].上海:上海教育出版社,1992.

<sup>②</sup> 汪晓勤.HPM的若干研究与展望[J].中学数学月刊,2012(2).

<sup>③</sup> 弗赖登塔尔,荷兰数学家、数学教育家。

## 第一章 数字大观

最初,我对“数字”这个主题并不感兴趣,感觉这不过是一些考古或是历史小知识,没有数学思想在其中;在弗赖登塔尔的书中,数学的历史是从运算开始的。但是当我深入研究这个主题的时候,发现其中还是存在不少有意思的东西,不乏数学思想与数学智慧,所以还是做一个陈述,说一说我读过的那些书和我的一些思考。

### 第一节 数的产生

我一直以为数字就是那样理所当然、显而易见地出现的,就像我们从小学习数数那样自然。然而事实上并非如此,数的产生与完善的过程是历尽曲折的。那么有没有一些什么是理所当然的产生的呢?我们先来看《课堂上听不到的数学传奇:初中版》<sup>①</sup>中的故事:

#### 一、乌鸦也会数数吗?

一位苏格兰乡绅发现一只乌鸦在他的瞭望塔上筑巢,觉得十分讨厌,决定用枪把它打下来。但是,乡绅每次想接近乌鸦时,乌鸦就远远地飞到一棵树上,边唱歌边得意地看着乡绅。“难道我真拿你没办法吗?”乡绅想出一条妙计,他请来邻居帮忙。两人一起躲进塔楼,之后一个人离开,另一个人继续躲在里面。可是,乌鸦仍然待在树枝上(直到第二个人离开)。第二天,三个人躲进塔楼,然后两个人陆续离开,但乌鸦还是没有上当。第三天,来了四个人,三个人陆续离开,还是没有骗过乌鸦。直到最后,五个人躲进塔楼,四个人陆续离开。这下,乌鸦数不清了,就飞回了塔楼。

这个故事不是真的吧,乌鸦也会知道  $4=1+1+1+1$ ?

<sup>①</sup> 田廷彦. 课堂上听不到的数学传奇:初中版[M]. 杭州:浙江教育出版社,2010.

我特意在 360 百科查了一下作者的资料：田廷彦，“70 后”，曾就读于华东师范大学第一附属中学、上海中学理科班和上海交通大学应用数学系。曾 5 次获得全国高中及美国数学竞赛等国内、国际赛事的一等奖，长期从事奥林匹克数学的教研工作。这还是挺硬核的数学实力啊，能将数学奥赛与数学传奇混搭的人，应该还是挺有意思的。

我一直把它当作一个传闻，比较惊讶的是，由美国的卡尔·B. 博耶所著，并由美国的尤塔·C. 梅兹巴赫修订的，由中央编译出版社出版的《数学史》<sup>①</sup>中竟然提到乌鸦数数的实验，似乎与之讲的是同一个故事，可见这故事流传之广。

其实我们在很多动物表演中也会看到有动物数数、动物算算术之类的节目。也就是说，动物是可以有数学意识的。在克利福德·皮寇弗所著的《数学之书》<sup>②</sup>中记录了大量动物故事，包括蚂蚁如何通过计算路程而获得目的地的位置信息、猩猩识数等。

亚里士多德说：数学与哲学同属于“好奇”与“有闲”阶层的产物，或许有点儿道理？如果不是“有闲”，哪里会为一只乌鸦而如此兴师动众？会反复执着于蚂蚁的观察与试验？当然更重要的应该是“好奇心”吧，让孩子们保有好奇心可能是中国数学教育需要努力的方向吧。

动物的“数感”研究其实是人的数学发展史的起点，而人类又是如何超越了这一起点的呢？

浙江大学的蔡天新教授在他的科普作品《数学简史》<sup>③</sup>中提出一种新颖的研究方法，他通过语言对比，说明西方人从两头牛、一双鞋等事物中抽象出“2”的艰难；因此他也在开篇第一页引用伯特兰·罗素的话开头：“当人们发现一对雏鸡和两天之间有某种共同的东西（数字 2）时，数学就诞生了。”

## 二、笑话中的数学：从“一二三”到“千百万”

小时候听过一个笑话：一个孩子被送到私塾去读书，去了三天，第四天不愿意去了，孩子爸问：“为什么不去呀？”孩子说：“我都学会了：第一天老师教一个‘一’字是一

① 卡尔·B. 博耶，尤塔·C. 梅兹巴赫，秦传安译，数学史[M]，秦传安译，北京：中央编译出版社，2012。

② 克利福德·皮寇弗，数学之书[M]，陈以礼，译，重庆：重庆大学出版社，2015。

③ 蔡天新，数学简史[M]，北京：中信出版集团，2017：4。

横,第二天老师教一个‘二’字是两横,第三天老师教一个‘三’字是三横,这么简单,我不用再学了。”如果你是爸爸,你会如何对付这个熊孩子呢?

1	2	3	4	5	6	7	8	9

图 1-1-1 印度前婆罗门时期的数字

其实数学最初的发展就是这样简单的开始,不信你看印度前婆罗门时期的数字(图 1-1-1)。

戏剧性的一幕出现了,爸爸说:“你帮我给邻居写封信,他的名字叫千百万……”

从数学的角度说,这还真是一个聪明的孩子,他学习了“一、二、三”,然后猜想出其他数字的写法,这叫“归纳法”。归纳是创造的开始,数学的归纳分为“完全归纳法”和“不完全归纳法”。“完全归纳法”在高中学习数列的时候应该都学过,它是一种严谨的数学方法,得出的结果是可信任的。“不完全归纳法”是根据有限的经验进行归纳,其结果未必是可信的,但却是创造的起点,而理性却是需要从这个不完全的归纳开始进行反思验证的。

美国教育家杜威认为,教育不是教给孩子现成的经验,而是让孩子学会如何在实践中反思。这位爸爸并没有直接告诉孩子正确的是什么,而是用了一个疑难情境,与孩子的原有认知发生强烈的冲突,从而让孩子意识到数字的写法还真不是这么简单,不仅激活孩子的好奇心和求知欲望,也指导了孩子反思的方向。从这个角度讲,这个故事实是在是一个不错的小故事。

事实上,很多古老的文明都使用了差不多相同的符号记录从 1 至 4 这 4 个数字,不同在于如何以更简洁的形式来表示一个大数。

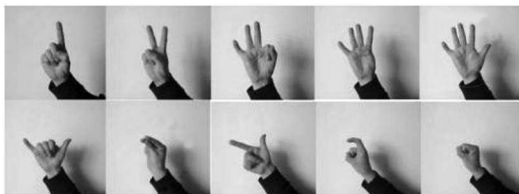


图 1-1-2 民间用手势表示数字的方式

民间用手势表示数字的方式如图 1-1-2 所示,这幅图中的手势大家想必是熟悉的,用一只手的手势区分 0~9 这 10 个数字,这种表示方法从“6”开始便脱离开“一一对应”的关系,进入更抽象的表示数的方法了。1 只苹果对应 1 个手指头,6 只苹果对应 6 个手指头,这叫“一一对应”;现在 6 个物品只要 2 个手指头就可以表示了,这就是超越了“一一对应”的“抽象”表示法。

我国早期数学在记数方面存在明显优势。先秦典籍中有“结绳记事”“刻木记事”的记载,说明人们从辨别事物的多寡中逐渐认识了数,并创造了记数的符号。还可以查到一个“隶首作数”的故事,给我们讲述一个“十进制数”诞生的神话传说,不过这个传说“神”的痕迹过多,没有给我们留下宝贵的数学思维的过程。

这一点恰是弗赖登塔尔对于数学和教育数学的区别的观点:数学呈现的是结果,而作为教育的数学,更应该呈现的是思维的过程,只有呈现思维过程的数学,才能跳出工具数学的限制而成为思维训练的磨刀石。

## 第二节 史上奇葩的记数方法

还记得我们小时候学习数数时跨越的那些槛吗?记得我小时候一个小伙伴对我说:“我会数到 200,我数给你听:1,2,3,……,108,109,200”,小朋友的理解是不是很独特呢?现在想来,他只是学会模仿“满十进一”,却不知道进到百位上的“1”代表的是 10 个“10”而非 10 个“1”。我的这个小伙伴后来数学一直学不好,不知道是不是这道槛一直没有跨过去呢。

当然,这样的小朋友可能不多,多数孩子在学习数数时可能会顺利突破从 100 至 200 的过渡,但是如果你的孩子遇到了困难也是很正常的事情,因为这也恰恰是很多种族数学发展史中遇到过的困难。

我们现在日常使用的是十进制数,古代埃及、罗马以及中国都普遍使用十进制数,但书写的方法却不相同。

### 一、古埃及象形记数法

纸莎草是古埃及文明的一个重要组成部分,古埃及人利用这种草制成的书写载体曾被希腊人、腓尼基人、罗马人、阿拉伯人使用,历三千年而不衰。至公元 8 世纪,

中国造纸术传到中东,才取代了莎草纸。由于沙漠的干燥有利于这种文献的保存,人们在埃及发现了非常古老的纸莎草文献,记录了古老埃及的故事。

古埃及采用的记数方法,其基本符号如图 1-2-1 所示。不难发现,古埃及记数法看前几个数字似乎和那个上了 3 天学的小朋友思路差不多哦。

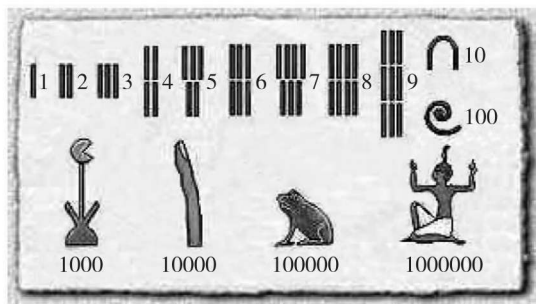


图 1-2-1 古埃及采用的记数方法

你能猜出古埃及如何记录“321”这个数吗?那么“93578”这个数呢?对的,要记下这个数需要 9 个“10000”、3 个“1000”、5 个“100”、7 个“10”和 8 个“1”,这实在不是一个记数的好方法啊!

## 二、罗马记数法

罗马记数法的产生晚于中国甲骨文中的数字和埃及数字,与古埃及记数方法类似,不同的是,古埃及用的是象形文字,而古罗马用了字母。

罗马人为了记录这些数字,便在羊皮上画出 I、II、III 来代替手指的数;要表示一只手(表示“5”)时,就写成“V”形,表示大指与食指张开的形状;表示两只手时画成“VV”形或者一只手向上,一只手向下的“X”,这就是罗马数字的雏形。

罗马人用 C 表示一百(Centum 的头一个字母),用 M 表示一千(Mille 的头一个字母),取字母 C 的一半成为符号 L,用来表示五十,用字母 D 表示五百。若在数的上面画一横线,这个数就扩大 1000 倍。

用罗马数字表示数时,几个相同的数字并列表示这个数的值是数码的几倍。如: III 表示 3, XX 表示 20, XXX 表示 30。

不相同的几个数码并列时,小的数码在右边表示和;小的数码在左边表示差。

如:VI表示6,IV表示4,XI表示11,XLVIII表示48。

罗马数字的先进之处在于引入了字母表示法,并且用小数的“左减右加”的方法减少了重复排列的个数,但这种记法与进位制无关,所以书写繁难。如1888要表示为MDCCCLXXXVIII,虽然比古埃及记数法简化了不少,却依然是烦琐的。

有意思的是,中世纪罗马教皇统治着西方,教皇认为罗马数字是上帝发明的、是十全十美的。据说有一位罗马学者看到关于阿拉伯数字“0”的介绍,在自己的著作中悄悄记载了“0”的用法,罗马教皇知道后声称:“神圣的数,不可侵犯,是上帝创造出来的,决不允许0这个邪物加进来,玷污了神圣的数!”这位学者因此被施以酷刑,从此再也不能握笔写字。

有时候权威就是如此荒唐而又让人无奈!

罗马记数法虽然烦琐,但罗马数字却曾经是文明的象征而被部分保留。早期生产的钟表广泛使用罗马数字(图1-2-2)。直到2015年7月,意大利罗马表示将放弃使用罗马数字,室内的街道指示牌、身份证明文件、账单以及官方文件都会改成意大利文写法。罗马这一举措被痛批为“文化自杀”行为,文化界表示,保存罗马数字不仅具有文化价值,更是一种身份认同。对此,你怎么看呢?是“文化自杀”还是文明进步?

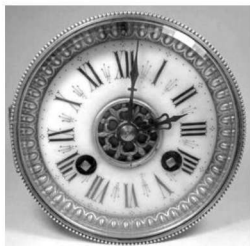


图 1-2-2 使用罗马数字的钟表

### 三、中国甲骨记数法

中国商代和西周早期(约公元前16世纪—前10世纪)以龟甲、兽骨为载体的文献,是已知汉语文献的最早形态。刻在甲骨上的文字早先曾称为契文、甲骨刻辞、卜辞、龟板文、殷墟文字等,现通称甲骨文。

1899年甲骨文首次被发现,殷墟成为世界闻名的古文化遗址,震动了中外学术界。截至2012年,发现有大约15万片甲骨,4500多个单字。其中有13个记数单字,最大的数是“3万”,最小的是“1”。一、十、百、千、万都有专有名称,如图1-2-3所示。

由图1-2-3可知,殷商甲骨文对几百、几千、几万的表示都使用了组合数字的方法,数位的意识已经萌芽初现。当然,这里还存在一个有限表达的问题,要表示更大的数字必须要发明一个能被大家所认可的新的符号或方法,如比万更大的数量级十万、百万、千万、万万(亿)等,那么“亿亿”这个数量级之上呢?大约古人不大可能会用

