高观点下全国卷

高考数学

压轴题

解题研究三部曲

吕荣春／编著

GAOGUANDIANXIA QUANGUOJUAN
GAOKAO SHUXUE
YAZHOUTI JIETI YANJIU SANBUQU

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

◀◀◀ 高观点下全国卷 ▶▶▶

高考数学

压轴题

解题研究三部曲

GAOGUANDIANXIA QUANGUOJUAN
GAOKAO SHUXUE
YAZHOUTI JIETI YANJIU SANBUQU

吕荣春／编著

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press
·成都·

图书在版编目(CIP)数据

高观点下全国卷高考数学压轴题解题研究三部曲 / 吕荣春编著. -- 成都 : 电子科技大学出版社，2019.4
ISBN 978-7-5647-6923-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①吕… Ⅲ. ①中学数学课 - 高中 - 题解 - 升学参考资料 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第074294号

高观点下全国卷高考数学压轴题解题研究三部曲

吕荣春　编著

策划编辑　岳　慧
责任编辑　兰　凯
出版发行　电子科技大学出版社
　　　　　成都市一环路东一段159号电子信息产业大厦九楼　邮编：610051
主　　页　www.uestcp.com.cn
服务电话　028-83203399
邮购电话　028-83201495

印　　刷　成都市火炬印务有限公司
成品尺寸　185mm×260mm
印　　张　23.75
字　　数　590千字
版　　次　2019年4月第一版
印　　次　2019年4月第一次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5647-6923-9
定　　价　59.80元

编者的话

一、研究全国卷压轴题的意义

全国卷高考数学压轴题难度虽有起伏，但大部分时间绝对难度不是很大，甚至不少压轴题可以直接秒杀，这有时候会导致很多的高分，甚至一些基础较好的学校有的班级平均分超过140分，文科生很多满分．这样研究压轴题对相当多的一部分人有很重要的意义，研究压轴题对知识、能力和思维的提升有极大的帮助，对于整个数学的提高也有着重大意义．

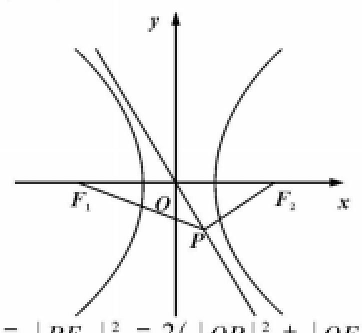
二、研究全国卷压轴题的前提

解答基础题目、中档题目又快又准确，需要记住一些结论，秒杀一系列高考中档题目．

例1．（2018年全国Ⅲ卷第11题）设F_1，F_2是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点，$O$是坐标原点，过$F_2$作$C$的一条渐近线的垂线，垂足为点$P$．若$|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$，则$C$的离心率为（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

【解析】 焦点到渐近线的距离视为b的几何意义．由a,b,c的几何意义知，$PF_2=b$，$OP=a$．由题知$|PF_1|=\sqrt{6}|OP|=\sqrt{6}a$．



由中线定理，得$|PF_1|^2=|PF_2|^2=2(|OP|^2+|OF|^2)$，

即$(\sqrt{6}a)^2+b^2=2(a^2+c^2)$．

又$\because$ $b^2=c^2-a^2$，

$\therefore$ $3a^2=c^2$，$\therefore$ $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$．

【点评1】 中线定理：三角形的一条中线两侧所对边平方和等于底边的一半平方与该边中线平方的2倍．在$\triangle ABC$中，设M是BC的中点，AM为中线，则

$|AB|^2+|AC|^2=2(|AM|^2+|MC|^2)$.

【点评2】看到图形中存在中线，以及其余各边长都知道的情况下，联想到中线定理，瞬间建立起等量关系.

三、研究全国卷压轴题的方法

（一）挖掘背后的思想方法、形成看问题的基本观点

全国卷的第20题不仅仅有解析几何，也出现了立体几何和概率统计，第12题和第16题更是考查的知识点非常广泛，知识只是载体，更重要的是感悟背后的思想、方法，形成看问题的观点.

例2.（2013年全国Ⅱ卷理科第12题）已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$，直线 $y=ax+b(a>0)$ 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分，则 b 的取值范围是（　　）

A.（0，1）　　B. $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　C. $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

【解析】法一：（构建函数）略.

法二：（极限思想）当 $a=0$ 时，可以求得 $b=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，结合选项，考虑B，C，当 $b=\dfrac{1}{2}$ 时，让 $a\to+\infty$，两部分面积可以无限接近，但永不相等，所以 $b<\dfrac{1}{2}$，选B.

函数观点是看问题的基本观点，极限思想也是基本思想，在各个章节都会遇到.

（二）精练，改编

核心思想和看问题的基本观点是稳定的，从这个角度去看，全国卷高考数学压轴题常常是“一个主题，不一样的精彩”.

例3.（2017年全国Ⅲ卷第21题）已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

（1）若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的值；

（2）设 m 为整数，且对于任意正整数，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<m$，求 m 的最小值.

例4.（2017年全国Ⅱ卷第21题）已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，且 $f(x)\geqslant 0$.

（1）求 a；

（2）证明：$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

例5.（2014年全国新课标Ⅱ第21题）已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，求 b 的最大值；

（3）已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，估计 $\ln 2$ 的近似值（精确到0.001）.

例6.（2013年辽宁第21题）已知函数 $f(x)=(1+x)e^{-2x}$，$g(x)=ax+\dfrac{x^3}{2}+1+2x\cos x$. 当 $x\in[0,1]$ 时，

（1）求证：$1-x\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{1+x}$；

（2）若 $f(x) \geqslant g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

上述 4 个例题以及 2018 年全国Ⅲ卷第 21 题给出的参考的答案都是“两边夹”的思路. 如何选择与全国卷思路一致的题目，强化全国卷压轴题考查的思路是我们关注的焦点，本书以全国卷高考数学压轴题为核心，综合各地的模拟题、各省份的高考压轴题，基于高考压轴题、竞赛题和自主招生试题相互改编这一情形，也选择了与高考相关的 1987—2018 年高中数学联赛一试试题和 2006—2018 年名校的自主招生试题，并尝试进行改编，改编往往需要抓住问题的关键之处，改变呈现的方式. 在书中呈现改编的过程，期望读者能够“以不变应万变”.

因编者水平有限及时间原因，书中难免有疏漏之处，敬请广大读者批评指正，提出宝贵的意见.

高观点的形成——仰望星空，脚踏实地

一、仰望星空——观念

泰勒斯号称“科学之祖”，是古希腊第一位哲学家．他四处游学，不置产业．据说，他曾用气象学知识预测当年橄榄树会丰收，租下全城榨油机做了一次投机生意，赚了一大笔钱，用以向人证明哲学家的智慧用来致富是轻而易举的事，但哲学家有更重要的事情要做．相传，他晚上走路，仰望星空，看出第二天要下雨，但一不小心，一脚踏空，掉进坑里，被人救起．第二天果然下了雨，有人讥笑哲学家知道天上的事情，却看不见脚下的东西．然而两千多年后，德国黑格尔说：“一个民族有一些关注天空的人，他们才有希望；一个民族只是关心脚下的事情，那是没有未来的．”同时他又说：“只有那些永远躺在坑里从不仰望高空的人才不会掉进坑里．”在 2017 年和 2018 年，我国科技类节目无论是数量还是类型上都比往年有一个显著的变化，在呈现形式和元素上都有新的尝试，涉及的科学领域方面也有细分化的趋势．霍金说：“记住要仰望星空，不要低头看脚下，无论生活如何艰难，请保持一颗好奇心，你总会找到自己的路和属于你的成功．”

即使是井底之蛙，也拥有仰望星空的权利．

解题不仅仅限于“解”与“题”，才有解题水平质的飞跃．比如：

例 1．求下列函数的最值：

(1) $f(x)=x^2-2x, x\in[2,3]$；　　(2) $f(x)=x^4+2x^2-1$；

(3) $f(x)=-x^2+2|x|+3$；　　(4) $f(x)=x+\sqrt{2x-1}$.

上述四个问题都可以通过“换元法”转化为二次函数来处理，做完之后，我们就要进一步分析这些题型的共同特征是什么——都是最高次项是另外一项次数的两倍，进一步去挖掘“换元法”背后更为深刻的思想——整体的思想，“换元法”应用的广泛性凸显了“整体思想”的重要性，为什么整体的思想这么重要呢？因为整体的思想凸显了事物的结构，所以我们就形成了这样的观念——宏观看结构．结合生活进行理解，比如迎面走来一个美女，我们不经意会说：“身材真好，眼睛真大．”这里面其实就蕴含着看问题的基本观点——宏观看结构，微观抓关键．让学生在笑声中感受到这么深刻的道理，它原来这么朴素，这么自然，这么贴近生活，我们一不小心，就已经用了．

在数学学习中，应该从“知识的积累”上升到“处理问题的一般方法”，挖掘背后蕴含的丰富的思想，形成看问题的基本观点，并把这些观点化成一些学生口中的经典的名言．比如：宏观看结构、微观抓关键；严格按照定义（从本质看现象）；学数学就是找关系，没有关系，强行“发生”关系……

布鲁纳在《教育过程》的“结构的重要性”中希望学生的学习从“特殊”迁移上升到“原理和态度”的迁移，即学习一个一般**观念**，然后以此作为认识后续问题的基础，这

些后续问题是开始所掌握的观念的特例.

奥苏贝尔认为“当学生把教学内容与自己的认知结构联系起来时，有意义学习便发生了. 所谓认知结构，就是指学生现有的知识数量、清晰度和组织结构，它是由学生眼下能回想出的事实、概念、命题、理论构成的.”奥苏贝尔认为“同化理论的核心是：学生是否习得信息，主要取决于他们认知结构中已有的**观念**.”

Schoenfeld 认为成为“一个成功的问题解决者，与一个人的数学知识（资源）、自我控制、探索思路和**观念**有关.”

康德说“人类的一切知识都是从直观开始，从那里进入到概念，而以**理念**结束.”

观念决定视野，视野决定格局，格局决定境界；观念是思想的升华，决定了看问题的深度和层次.

例 1 为我们呈现的是自下而上总结，当我们形成一定的观念，高屋建瓴、势如破竹，比如：

例 2.（2011 年广东预赛）已知定义在正整数集上的函数 $f(n)$ 满足以下条件：

(1) $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$，其中 m,n 为正整数；

(2) $f(3)=6$.

则 $f(2011)=$ ________.

【分析】 定义域限定在正整数集上的函数 $f(n)$ 可以视为数列，于是去找数列的通项公式. 令 $n=1$，得 $f(m+1)=f(m)+f(1)+m$，即 $f(m+1)-f(m)=f(1)+m$，只要求出 $f(1)$，借助叠加法即可求出通项公式.

例 3.（2008 年西北工大自招招生）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(p+q)=f(p)f(q)$，$f(1)=3$，则 $\dfrac{f^2(1)+f(2)}{f(1)}+\dfrac{f^2(2)+f(4)}{f(3)}+\dfrac{f^2(3)+f(6)}{f(5)}+\dfrac{f^2(4)+f(8)}{f(7)}=$ ________.

【分析】 最后所涉及函数值的自变量都是正整数，故还是从数列角度来看. 令 $q=1$，得 $f(p+1)=3f(p)$，则所考虑的数列为等比数列，公比为 3，则 $f(n)=3^n$，进而有 $\dfrac{f^2(k)+f(2k)}{f(2k-1)}=\dfrac{(3^k)^2+3^{2k}}{3^{2k-1}}=6$，故答案为 24.

二、观念的形成——仰望星空

上升到哲学层面，结合生活，追随大师，在哲学史、数学史和科学史中去感悟，有助于形成更为深刻的观念.

比如莫里斯·克莱因所著的《古今数学思想》有这样一段话：“古希腊的学者坚持用演绎来做证明，重视抽象而不重视具体，这些都决定了数学的性质.”欧几里得和阿波罗尼斯的严格演绎式的数学论著，使人感到似乎数学家是用演绎搞出发明创造来的，但我们回顾欧几里得之前 300 多年的活动，就应该看到证明之前必先有猜想，综合之前必先有分析. 事实上，希腊人对于从简单的演绎法得出的结论不是很看得起的，希腊人把那些从定理直接推出来的结果称作系或衍论，Proclus 把这种无须费多大力气得出的结果称作横财和红利.

再比如我们从射影几何的发展史中了解到“连续性原理”，即如果一个图形从另一个图形经过连续的变化得出，并且后者与前者同样具有一般性，那么可以马上断定，第一个

图形的任何性质第二个图形也有．这对于我们探究、理解新知和解题都有帮助，比如过圆 $C:x^2+y^2=1$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 作圆的两条切线，切点弦的方程为 $x_0x+y_0y=1$，让点 P 运动起来，当点 P 运动到圆上时，此时切点弦的方程就是切线方程，根据连续性变化原理，我们更容易理解和记忆切点弦方程．

再比如在余弦定理的推导中，我们可以如下探究：由三角形性质大边对大角这一粗糙的定性分析上升到精确的定量刻画，得到了正弦定理．同样我们也不满足于：三角形两边之和大于第三边，希望找到三边之间的等量关系，首先从特殊的直角三角形开始，即 $a^2+b^2=c^2$，保持 b 不动，a 绕着直角顶点旋转时，直观感受到 C 为锐角，则有 $a^2+b^2>c^2$；若 C 为钝角，则有 $a^2+b^2<c^2$，从锐角到直角，再到钝角这个连续的变化过程，会不会有各边的平方之间不变的关系，虽然 $a^2+b^2-c^2$ 符号不一样，但会不会有一个确定的表达式？带着这样的思考，我们可以在一般的三角形中作高，构造直角三角形，容易推出余弦定理；如果“向量是沟通几何、代数和三角的基本工具”这一观念深置我们脑海，我们现在要寻找 a^2,b^2,c^2 之间的等量关系，而三角形就提供了向量加法和减法的等式，平方就会产生我们想要的式子．

三、脚踏实地——操千曲而后晓声、观千剑而后识器

（一）试题赏析——让学生站在更高的高度来审视，提高学科素养

有一些教育专家建议让学生来出题，其实，在这个过程之前，应该增加一个非常重要的环节——点评和赏析高考题目．

高考命题有自己的立意，比如 2019 年北京卷考试说明对数学考查有如下立意．

1．坚持考查核心概念，突出数学学科本质

考生对基础知识的理解、基本能力的发展以及基本态度和价值观的养成，共同构成了终身发展的基础，引导考生关注高中数学学习中的主干知识与核心概念，加深对数学概念、法则、公式和定理本质的深刻理解．

2．坚持考查思想方法，凸显考生思维品质

考查数学思想方法是由数学学科特点所决定的，数学思想方法是数学知识的精髓，是形成良好认知结构的纽带，也是知识转化为能力的桥梁．

3．坚持考查核心素养，关注试题开方创新

数学教育的目标是发展考生的核心素养，引导考生用数学的眼光观察世界，用数学的思维思考世界，用数学的语言表达世界．数学课程标准提出了数学六大核心素养，即数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析．采用不同的设问方式，选择新颖的情景，以创新的方式呈现数学试题内容，引导教学注重考生综合数学素养的培养，注重提高考生的实践和创新能力．

试题命题人不一样，水平也参差不齐，如果学生能够通过做题感知他们的差异大的时候，此时学生的学科素养是完全不一样的，就像只会看书的和经常写书评的人水平是大不相同的．

所以我们不仅呈现高考真题，而且希望和学生一起去反思，站在一定的高度来审视，审视题目考查了学生哪些基础知识、基本能力、基本思想方法，是否有利于突出知识本质、凸显思维品质、发展核心素养……

例4.（2016年全国Ⅰ卷理科第10题）以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A，B 两点，交 C 的标准线于 D，E 两点．已知 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

【解析】求轨迹方程，就是要建立方程，解题的关键在于把图中的长度抽象为点的坐标．设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$，根据点在曲线上把 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$ 抽象为 $A\left(-\dfrac{p}{2},2\sqrt{2}\right),D\left(\dfrac{10}{p},\sqrt{5}\right)$，还需要建立方程，根据点在圆上抽象出等量关系，即得到圆心的距离相等．

【考试中心的试题评价】试题贴近教材，将抛物线与圆的性质有机结合，重在对基础理论知识的考查．本题的已知条件没有给出抛物线和圆的方程，重在引导考生要善于抓住问题的本质，在认识事物本质的基础上追求简洁的解题方式．本题的解法部分源于教材，难度适中，其灵活性体现在数形结合思想方法的运用上，有利于考查考生的分析能力、逻辑推理能力、直观想象素养及运算求解能力．

例5.（2016年全国Ⅰ卷理科第21题）已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点．

（1）求 a 的取值范围；

（2）设 x_1，x_2 是的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$．

【解读】若函数 $g(x)=a(x-1)^2,(a\neq0)$ 两个零点 x_1，x_2，则 x_1+x_2 恰好是极值点 $x=1$ 的2倍，以此为模型，有人把 $x_1+x_2\neq2$ 这类问题定义为“极值点的偏移”，其实所谓极值点“不偏移”是基于函数具有对称性，或者说极值点两侧变化速率一样，但和此题一样，绝大部分的函数并不具有对称性，借助对称性却是处理这类问题的一个通法．

【分析】（2）由（1）知，$a>0$，则 $f'(1+\Delta x)=\Delta x(e^{1+\Delta x}+2a)$，$f'(1-\Delta x)=-\Delta x(e^{1-\Delta x}+2a)$，当 $\Delta x>0$ 时，有 $|f'(1+\Delta x)|>|f'(1-\Delta x)|$，即极值点的右侧变化速率更快．作出图像，结论显然成立．

【解析】不妨设 x_1，x_2，则，$x_1\in(-\infty,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$，$2-x_2\in(-\infty,1)$．

$\because f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，$\therefore x_1+x_2<2$ 等价于 $f(x_1)>f(2-x_2)$，即 $f(x_2)>f(2-x_2)$．

（因为 $(2-x_2,f(x_2))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 关于 $x=1$ 对称，从图形上看，$f(x_2)>f(2-x_2)$ 相当于 $(2-x_2,f(x_2))$ 在 $(2-x_2,f(2-x_2))$ 上方，即把 $x=1$ 右边的图像沿着 $x=1$ 翻折，所得图像位于原函数对应图像的下方．）

等价于证明：对任意的 $x\in(1,+\infty)$，都有 $f(x)>f(2-x)$．

令 $g(x)=f(x)-f(2-x)$，

则 $g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=(x-1)(e^x-e^{2-x})>0$，$x\in(1,+\infty)$，

$\therefore g(x)>g(1)=0$，即命题得证．

全国各地涌现了类似的题目，除了二次函数以外，绝大部分函数的单调性并不具有对称性，岂不都是极值点偏移，这是对极值点偏移认识的泛化；处理有的极值点偏移有三种

基本方法，根据对称构造函数（例 5），利用指对数均值不等式和设 $t=\frac{x_1}{x_2}$ 构造函数，也有把能用这三种处理的题目都叫极值点偏移，甚至还通过技巧演绎出一系列很复杂的题目，导致学生和老师都驾驭不了. 在《全国卷高考数学分析及应对》专门介绍了“极值点偏移”的何去何从——泛化、模式化的忧思与高考的全解读. 那“极值点偏移”何去何从?

变式：（2019 年深圳高三第一次调研）已知函数 $f(x)=e^x\left(x-\frac{a}{x}-2\right), x\in(0,+\infty)$.

（1）求 $f(x)$ 的递增区间；

（2）若 $f(x)$ 为定义域上的增函数，且 $f(x_1)+f(x_2)=-4e$，证明：$x_1+x_2\geqslant 2$.

【分析】 例 5 中 $f(x_1)=f(x_2)$ 是从轴对称进行构题；而此题 $f(x_1)+f(x_2)=-4e$ 是从中心对称进行了改编. 从巩固全国卷的命题思路来说是合理的、精彩的.

【解析】（1）略.（2）$\because f(x)$ 为定义域上的增函数，$\therefore a=1$，

即 $f(x)=e^x\left(x-\frac{1}{x}-2\right)$，注意到 $f(1)=-2e$，即 $f(x_1)+f(x_2)=2f(1)$，

故不妨设 $0<x_1\leqslant 1\leqslant x_2$.

证明 $x_1+x_2\geqslant 2\Leftrightarrow x_2\geqslant 2-x_1\Leftrightarrow f(x_2)\geqslant f(2-x_1)\Leftrightarrow -4e-f(x_1)\geqslant f(2-x_1)$，

即证明 $f(2-x_1)+f(x_1)\leqslant -4e$，令 $g(x)=f(x)+f(2-x), x\in(0,1]$.

下证 $g(x)\leqslant g(1)$，

$$g'(x)=f'(x)-f'(2-x)=e^{2-x}(x-1)^2\left[\frac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\frac{3-x}{(2-x)^2}\right],$$

先证：$g'(x)\geqslant 0$，

易证常用不等式 $e^x\geqslant x+1$，$\therefore e^{2x-2}=(e^{x-1})^2\geqslant x^2$，

$$\therefore \frac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\frac{3-x}{(2-x)^2}\geqslant x+1-\frac{3-x}{(2-x)^2}$$

$$=\frac{x^3-3x^2+x+1}{(2-x)^2}=\frac{(x-1)(x^2-2x-1)}{(2-x)^2}\geqslant 0, x\in(0,1],$$

$\therefore g'(x)\geqslant 0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1]$ 单增，即 $g(x)\leqslant g(1)$，命题得证.

（二）试题改编

在问题解决的过程中，观念主导着我们的思维，基础知识、基本能力也是不可或缺的，而观念的形成和能力的发展都需要反复强化，变式训练成了关键.

1. 基础知识和基本能力——综合和拓展

焦半径和焦点弦，全国卷多次考查，并且连续考查，比如：

例 6.（2013 年全国新课标Ⅱ文科）设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 过 F 且与 C 交于 A,B 两点. 若 $|AF|=3|BF|$，则 l 的方程为（　　）

A. $y=x-1$ 或 $y=-x+1$　　B. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ 或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

C. $y=\sqrt{3}(x-1)$ 或 $y=-\sqrt{3}(x-1)$　　D. $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$ 或 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

例 7.（2014 年全国新课标Ⅱ文科）设 F 为抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 $30°$ 的直线交 C 于 A，B 两点，则 $|AB|=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$　　B. 6　　C. 12　　D. $7\sqrt{3}$

考虑到全国卷常常把抛物线和圆结合在一起考查，且注重基础，故认为如下改编是精彩的.

变式 1：（2019 年龙岩市质检理科第 15 题）已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 过 F 且与 C 交于 A，B 两点. 若以 QF 为直径的圆过点 B，则 $|AF|-|BF|=$ ________.

【解析】 看到直径，联想直径所对的圆周角为 $90°$，设 $\angle QFB=\theta$，则 $|BF|=2\cos\theta$.

又∵ $|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\theta}=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$，由 $\dfrac{2}{1+\cos\theta}=2\cos\theta$，得 $\cos\theta=\sin^2\theta$，

$\therefore\ |AF|-|BF|=\dfrac{2}{1-\cos\theta}-\dfrac{2}{1+\cos\theta}=\dfrac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}=4$.

关于切点弦，有很多性质. 这些性质可以统一在一起：以抛物线焦点弦 AB 为直径的圆与准线相切于点 P，连接 P 与圆心，容易得到 P 的横坐标就是 A、B 中点的横坐标. PA，PB 是抛物线的切线，且相互垂直，$PF\perp AB$. 如果学生基础较好，可以考虑如下变式.

变式 2：（2019 年成都二诊第 16 题）已知 F 为抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 A，B，抛物线 C 在 A，B 两点的切线分别是 l_1，l_2，且 l_1，l_2 相交于点 P，则 $|PF|+\dfrac{32}{|AB|}$ 的最小值为________.

【解析】

法一： 设 $P(x_0,-1)$，则切点弦 AB 方程为 $x_0x=2(-1+y)$. 联立抛物线方程，得 $x^2-2x_0x-4=0$，$\therefore\ |AB|=\sqrt{1+\left(\dfrac{x_0}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{4x_0^2+16}=x_0^2+4$，$|PF|=\sqrt{x_0^2+4}$，$\therefore$

$$|PF|+\frac{32}{|AB|}=\sqrt{x_0^2+4}+\frac{32}{x_0^2+4}=\frac{\sqrt{x_0^2+4}}{2}+\frac{\sqrt{x_0^2+4}}{2}+\frac{32}{x_0^2+4}\geqslant 6.$$

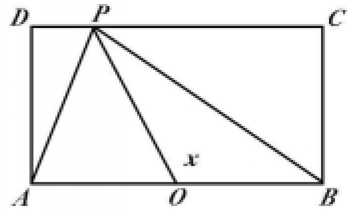
法二： 由焦点弦公式，得 $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta}$. 由射影定理和焦半径公式，得

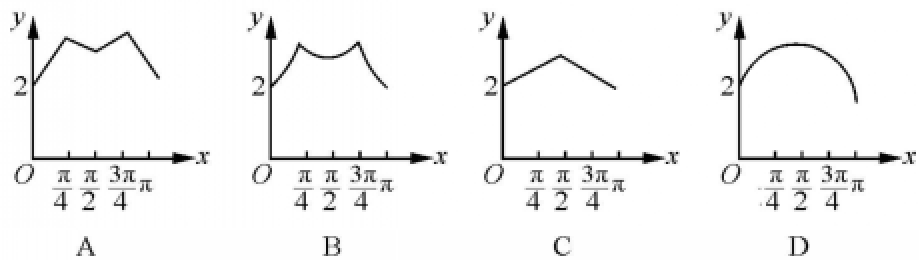
$$|PF|^2=|AF|\cdot|BF|=\frac{p}{1-\cos\theta}\cdot\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{p^2}{\sin^2\theta}=\frac{4}{\sin^2\theta}，\therefore\ |PF|=\frac{2}{\sin\theta}，$$

$$\therefore\ |PF|+\frac{32}{|AB|}=\frac{2}{\sin\theta}+8\sin^2\theta=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta}+8\sin^2\theta\geqslant 6.$$

2. 通过问题解决实现知识的整体认知

例 8.（2015 全国新课标Ⅱ卷第 10 题）如图所示，长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$，$BC=1$，O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC，CD 与 DA 运动，记 $BOP=x$，将动点 P 到 A，B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$，则 $y=f(x)$ 的图像大致为（　　）





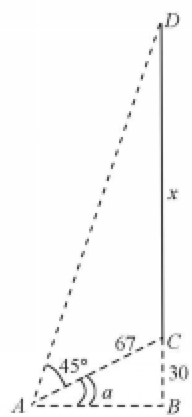
【考试中心试题评价】三角函数作为高中数学主题内容之一，呈现出与其他基本初等函数不一样的特征．在高中数学课程中，三角函数、解三角形与三角恒等变换是相对独立的三部分．三角函数首先是几何的，其次是函数的，再次是运算的（三角恒等变换）．本题中，作为几何的三角函数是为了解决图形的几何度量——距离——的计算，在得到距离化的形式表征后，作为运算主体的三角函数进入考生的思维视野．这需要考生能全面地认识与把握三角函数的三个组成部分，实现三者之间的互相转换．

本题的题干似乎与三角函数毫不相干，但考生在计算距离时会发现，其形式化表征就是三角函数，通过分析该三角函数的图像与性质，即可解决问题，解决问题的思维方法是丰富的，给不同的思维范式（代数思维和几何思维）的考生提供了不同的发挥空间．

基于考试中心这一深刻认知，我们应该在教学和解题中反复强化这一理念．

人教 A 版在必修 4 中以计算电视塔发射的高度来引入三角恒等变换，如：

某城市的电视发射塔建在市郊的一座小山上，如图．小山高 BC 约为 30 米，在地平面上有一点 A，测得 A,C 两点间距离约为 67 米．从 A 观测电视发射塔的视角（$\angle CAD$）约为 $45°$，求这座电视发射塔的高度．



【解析】设电视发射塔高 $CD=x$ 米，$\angle CAB=\alpha$，则 $\sin\alpha=\dfrac{30}{67}$.

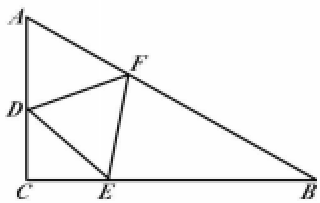
在 Rt $\triangle ABD$ 中，$\tan(45°+\alpha)\approx\dfrac{x+30}{60}$，即 $x=60\tan(45°+\alpha)-30$，现在的问题变成了如何由 $\sin\alpha=\dfrac{30}{67}$ 求 $\tan(45°+\alpha)$，或者用 $\sin\alpha$ 来表示 $\tan(45°+\alpha)$，由此引入恒等变换.

这个例子正好反映了三角函数首先是几何的，其次是函数的，再次是运算的（三角恒等变换）. 为了解决图形的几何度量——距离——的计算，引入角度，得到三角函数，要由 $\sin\alpha=\dfrac{30}{67}$求 $\tan(45°+\alpha)$，即要思考三角的运算. 简而言之，三角问题常常从图形切入，引入角度，得到三角函数，利用恒等变换合成一个函数进而研究性质. 这样就把三角函数、解三角形与三角恒等变换看似相对独立的三部分在问题解决中融为一体.

基于以上分析，沪教版教材从同角三角函数基本关系直接进入到三角恒等变换，把诱导公式视为一个特例，然后再研究函数的性质，这样浑然一体，也可以考虑把三角恒等变换视为诱导公式的推广，从诱导公式进入恒等变换.

除了教材中在扇形中求矩形面积的最大值的例题和习题等，我们还可以给出如下例题.

例 9. （2019 年成都二诊第 12 题）某小区拟将如图的一 Rt$\triangle ABC$ 区域进行改造，在三边上各选区一点连成等边$\triangle DEF$，在其内建造文化景观，已知 $AB=20$，$AC=10$，则$\triangle DEF$ 区域的面积最小值为（　　）



A. $25\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{75\sqrt{3}}{14}$　　C. $\dfrac{100\sqrt{3}}{7}$　　D. $\dfrac{75\sqrt{3}}{7}$

【分析】 构建面积函数，关键是构建边关于某个变量的函数，可以选择长度，也可以选择角度，选择角度更简单. 构建函数关键是找等量关系，根据某一边的两种表达方式来找等量关系.

【解析】 设 $\angle DEC=\theta, DE=a$，则 $\angle EFB=\dfrac{\pi}{6}+\theta, CE=a\cos\theta$.

在$\triangle EFB$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{a}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{BE}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)}$，即 $BE=2a\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)$.

由 $BE+CE=2a\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)+a\sin\theta=10\sqrt{3}$，得

$$a=\frac{10\sqrt{3}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)+\sin\theta}=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin\theta+2\cos\theta}=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sin(\theta+\varphi)}\geqslant\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$$

$\therefore$ 面积最小值为 $\frac{75\sqrt{3}}{7}$.

为了发挥例 9 的价值，进一步改编，得到如下变式.

变式：正三角形 ABC 的边长为 2，D,E,F 分别在三边 AB,BC 和 CA 上，且 D 为 AB 的中点，$\angle EDF = 90°,\angle BDE = \theta(0° < \theta < 90°)$.

（1）用含 θ 的三角式表示出 DE 边的长度.

（2）求 $\triangle DEF$ 的面积 S 的最小值及使得 S 取最小值时 θ 的值.

【解析】（1）略.

（2）①三角首先是几何的：为了便于从几何角度分析，把尽可能多的信息标在图里，$\angle DEB = 120° - \theta$，$\angle ADF = 90° - \theta,\angle AFD = 30° + \theta$.

在 $\triangle DEB$ 中，由正弦定理，得 $\frac{DE}{\sin 60°} = \frac{1}{\sin(120° - \theta)}$，

即 $DE = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin(120° - \theta)}$，同理在 $\triangle ADF$ 中，可得 $DF = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin(30° + \theta)}$；

②“解三角形”是函数的：$S = \frac{\frac{3}{8}}{\sin(120° - \theta)\sin(30° + \theta)},\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$；

③“解三角形”还是运算的：

$$S = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\sin 2\theta},\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

如果涉及的函数不是特殊角，注意到角之间的关系，常常可以换元. 比如 $y = \sin(30° + \theta)\sin(75° + \theta)$，则令 $t = 30° + \theta$，则 $y = \sin t\sin(30° + t)$.

④“解三角形”还是函数的：当 $\theta = 45°$ 时，$S_{\min} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}$.

3. 研究问题系统性方法的强化

得到一个函数，很自然就要考查定义域，研究函数的各种性质；解决函数的各种问题，就有意识去考查函数的性质，等式常常考查对称性，不等式常常考查单调性、零点，同时也知道函数的各种性质之间相互联系.

例 10.（2015 年全国Ⅱ卷文科第 12 题）设函数 $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1 + x^2}$，则使得 $f(x) > f(2x - 1)$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$　　B. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

C. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

【解析】 $\because$ $y = \ln(1 + |x|)$ 为偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 单增，$y = -\frac{1}{1 + x^2}$ 为偶函数，

且在 $[0,+\infty)$ 单增，∴ $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$ 为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 单增.

$f(x)>f(2x-1)\Leftrightarrow f(|x|)>f(|2x-1|)\Leftrightarrow |x|>|2x-1|\Leftrightarrow x^2>(2x-1)^2$，

$f(x)$ 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$.

【点评】 解不等式，需要考查函数的单调性，考查奇偶性有助于单调性的分析.

变式1：(2018年4月湖南十四校联考文第12题) 已知函数 $f(x)=(e^x-e^{-x})x^2$，若实数 a 满足 $f(\log_3 m)-f(\log_{\frac{1}{3}}m)\leqslant 2f(1)$，则实数 m 的取值范围为　　(　　)

A. $(0,3]$　　B. $\left[\dfrac{1}{3},3\right]$　　C. $(0,9]$　　D. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)\cup(3,+\infty)$

【解析】 ∵ $y=e^x-e^{-x}$ 为奇函数，$y=x^2$ 为偶函数，∴ $f(x)=(e^x-e^{-x})x^2$ 为奇函数，只需考虑 $(0,+\infty)$ 单调性. ∵ $y=e^x-e^{-x}$ 和 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 单增且恒正，∴ $f(x)$ 单增，∴ $f(\log_3 m)-f(\log_{\frac{1}{3}}m)\leqslant 2f(1)$ 等价于 $2f(\log_3 m)\leqslant 2f(1)$，即 $\log_3 m\leqslant 1$，∴ $m\in(0,3]$.

变式2：(2019年3月厦门质检理科第15题) 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-1$，则关于的不等式 $f(2x)+f(x+1)>-2$ 的解集为________.

【解析】 易得函数在 $\mathbf{R}$ 上单增，且 $f(2x)+f(x+1)=-2$，得 $e^{2x}-e^{-2x}+e^{x+1}-e^{-x-1}=0$，即 $e^{2x}+e^{x+1}=e^{-2x}+e^{-x-1}$，注意到 $g(x)=e^{2x}+e^{x+1}$ 单增，$h(x)=e^{-2x}+e^{-x-1}$ 单减，∴ $e^{2x}+e^{x+1}=e^{-2x}+e^{-x-1}$ 有唯一零点，注意到 $e^{2x}=e^{-x-1}$，即 $2x=-x-1$ 时，也有 $e^{-2x}=e^{x+1}$，∴ 不等式的解集为 $\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

【点评1】 找单调性和零点是解超越不等式的基本方法，奇偶性的发现有利于更方便的研究函数的单调性.

【点评2】 在两个变式中，问题的解决都是基于函数的性质，函数解析式只是一个载体，据此可以改编出很多题目，既然如此，在解决这个问题的过程中，可以选一个与之性质一样的最简单的函数. 变式1中，直接令 $f(x)=x$，在变式2中令 $f(x)=x-1$，瞬间可破.

很多题目就是推广为一般情况就是一个命题，研究命题的范式：①命题有等价形式吗？从数和性两方面来解读，比如函数单增的等价命题有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，几何意义就是任意两点连线的斜率为正，也有导数为非负数，几何意义是切线斜率为非负数；②是否能推广到一般情况；③特殊化之后，能否得到一些常用的结论；④反过来，成立吗？即考查一个命题的充分性和必要性；⑤不仅能判断一个命题是否成立，更核心的是能够去适当地修改，使其为真命题等等.

简而言之，不同角度、一般化、特殊化、反过来、再修改，一为千万.

其实，很多题目都是基于某个命题，或在此基础上综合其他知识.

目　录

1. 2018 年全国Ⅰ卷理科第 12 题…………………………………………………… (1)
2. 2018 年全国Ⅰ卷理科第 16 题…………………………………………………… (6)
3. 2018 年全国Ⅰ卷理科第 19 题 ………………………………………………… (12)
4. 2018 年全国Ⅰ卷理科第 20 题 ………………………………………………… (15)
5. 2018 年全国Ⅰ卷理科第 21 题 ………………………………………………… (17)
6. 2018 年全国Ⅰ卷文科第 12 题 ………………………………………………… (20)
7. 2018 年全国Ⅰ卷文科第 16 题 ………………………………………………… (21)
8. 2018 年全国Ⅰ卷文科第 21 题 ………………………………………………… (22)
9. 2018 年全国Ⅱ卷理科第 12 题 ………………………………………………… (25)
10. 2018 年全国Ⅱ卷理科第 16 题………………………………………………… (29)
11. 2018 年全国Ⅱ卷理科第 19 题………………………………………………… (34)
12. 2018 年全国Ⅱ卷理科第 20 题………………………………………………… (36)
13. 2018 年全国Ⅱ卷理科第 21 题………………………………………………… (38)
14. 2018 年全国Ⅱ卷文科第 12 题………………………………………………… (42)
15. 2018 年全国Ⅲ卷理科第 12 题………………………………………………… (44)
16. 2018 年全国Ⅲ卷理科第 16 题………………………………………………… (45)
17. 2018 年全国Ⅲ卷理科第 20 题………………………………………………… (53)
18. 2018 年全国Ⅲ卷理科第 21 题………………………………………………… (57)
19. 2018 年全国Ⅲ卷第 21 题……………………………………………………… (62)
20. 2018 年全国Ⅲ卷第 21 题……………………………………………………… (65)
21. 2018 年全国Ⅲ卷第 21 题……………………………………………………… (67)
22. 2018 年全国Ⅲ卷第 21 题……………………………………………………… (69)
23. 2018 年全国Ⅲ卷文科第 12 题………………………………………………… (73)
24. 2018 年全国Ⅲ卷文科第 16 题………………………………………………… (75)
25. 2017 年全国Ⅰ卷理科第 11 题………………………………………………… (77)
26. 2017 年全国Ⅰ卷理科第 12 题………………………………………………… (80)
27. 2017 年全国Ⅰ卷理科第 15 题………………………………………………… (83)
28. 2017 年全国Ⅰ卷理科第 16 题………………………………………………… (86)
29. 2017 年全国Ⅰ卷理科第 17 题………………………………………………… (89)
30. 2017 年全国Ⅰ卷理科第 20 题………………………………………………… (91)
31. 2017 年全国Ⅰ卷理科第 21 题………………………………………………… (95)