

普通高等院校精品规划系列教材

高等 数学

郑克礼 牛巧玲 曾昭虎 / 主编

GAODENG
SHUXUE

普通高等院校精品规划系列教材



高等数学

GAODENG
SHUXUE

郑克礼 牛巧玲 曾昭虎 / 主编

 电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

· 成都 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 / 郑克礼, 牛巧玲, 曾昭虎主编. — 成都:
电子科技大学出版社, 2019.3
ISBN 978-7-5647-6787-7

I. ①高… II. ①郑… ②牛… ③曾… III. ①高等数
学 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 053274 号

高等数学

郑克礼 牛巧玲 曾昭虎 主编

策划编辑 罗 雅
责任编辑 兰 凯

出版发行 电子科技大学出版社
成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼 邮编: 610051

主 页 www.uestcp.com.cn
服务电话 028-83203399
邮购电话 028-83201495

印 刷 成都市和丰印刷有限公司
成品尺寸 185mm×260mm
印 张 11.75
字 数 300 千字
版 次 2019 年 3 月第一版
印 次 2019 年 3 月第一次印刷
书 号 ISBN 978-7-5647-6787-7
定 价 40.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

为了适应高等教育大众化的发展需要,使学习者能较好地掌握高等数学的基本思想和方法,提高学习者的数学素质和能力,编者根据多年的教学实践编写了本书。本书是为一般高等院校经济管理类、化学类、生物类等相关专业的学习者所编写的高等数学教材。在编写的过程中力求贯彻“应用为主、够用为度、学有所用、用有所学”的原则,使得本教材具有以下特点:

(1)重视概念导入的实例背景,遵循实例——抽象——概念的形成过程。

(2)淡化逻辑推理,内容中涉及性质与定理的内容,以图形描述或文字说明加以适当解释。

(3)在保持内容的科学性、系统性的同时,适当简化或略去了某些性质和定理的证明过程,引导学生用数学的观点、方法分析问题和解决问题。同时,以一元函数微积分为基础,面向不同专业学习者的需求,在例题的选用上,除经典的物理学实例外,还选用了适量的经济、化学和生物等方面的实例。

本书在编写过程中参考了众多国内现有同类教材,对此表示衷心感谢。

限于作者水平,不当之处在所难免,敬请广大读者批评指出。

编 者

目 录

第 1 章 函数的极限与函数的连续	1
1.1 函 数	1
习题 1.1	8
1.2 函数极限	9
习题 1.2	18
1.3 极限运算法则	19
习题 1.3	20
1.4 两个重要极限	21
习题 1.4	23
1.5 无穷小量阶的比较	24
习题 1.5	25
1.6 函数的连续性	26
习题 1.6	33
第 2 章 导数与微分	35
2.1 导数的概念	35
习题 2.1	42
2.2 函数的求导法则与求导公式	42
习题 2.2	46
2.3 高阶导数	47
习题 2.3	49
2.4 函数的微分	49
习题 2.4	55
第 3 章 中值定理与导数的应用	56
3.1 微分中值定理	56
习题 3.1	63
3.2 洛必达法则	64
习题 3.2	69
3.3 导数的应用	70
习题 3.3	77
第 4 章 不定积分	79
4.1 不定积分的概念及性质	79
习题 4.1	83

4.2 换元积分法	84
习题 4.2	93
4.3 分部积分法	94
习题 4.3	98
第 5 章 定积分	99
5.1 定积分的概念及性质	99
习题 5.1	105
5.2 微积分基本公式	105
习题 5.2	107
5.3 定积分的分部积分法及换元积分法	107
习题 5.3	110
5.4 广义积分	110
习题 5.4	114
5.5 定积分的应用	115
习题 5.5	126
第 6 章 微分方程	128
6.1 微分方程的基本概念	128
习题 6.1	129
6.2 一阶微分方程	130
习题 6.2	137
6.3 二阶微分方程	138
习题 6.3	146
6.4 微分方程应用举例	146
习题 6.4	151
第 7 章 向量代数与空间解析几何	153
7.1 向量及其线性运算	153
习题 7.1	162
7.2 两向量的数量积与向量积	162
习题 7.2	166
7.3 空间直角坐标系	166
习题 7.3	168
7.4 空间直线及其方程	168
习题 7.4	171
7.5 空间曲面及其方程	171
习题 7.5	176
7.6 空间曲线及其方程	176
习题 7.6	179
参考文献	181

第 1 章 函数的极限与函数的连续

1.1 函 数

1.1.1 常量与变量

在实际问题中,我们常遇到各种各样的量,如长度、重量、时间、距离等等.这些量一般可分为两种,一种在我们考查的过程中没有变化,即保持同一数值,这种量叫作常量;另一种在考查过程中有所变化,即可以取不同的数值,这种量叫作变量.常量一般用字母 a 、 b 、 c 等表示,变量一般用 x 、 y 、 z 等表示.

常量与变量并不是绝对的.一种量在某一过程或在某一环境中是常量,而在另一过程或在另一环境中可能就是变量.如重力加速度在某一地方为常量,但在不同地方,重力加速度有不同的值.在具体研究中,有时把变化很小或对所研究的问题影响不大的量也看成常量.

常量也可看成是变量仅取一个值时的特例.

1.1.2 映 射

集合是数学中的一个基本概念,不同的集合中有不同的元素.而两个集合之间往往有某种联系.

例 1 某地所有机动车辆构成的集合 A 与其车牌号码构成的集合 B 之间有对应关系:每一辆车都有一个车牌号码,不同的车牌号码表示不同的车辆.

例 2 某班级有 50 名学生,他们构成集合 A ,某次测试后各自都有自己的成绩.若定义集合 B 为一个闭区间 $[0, 100]$,则集合 A 与 B 之间也有对应关系:每个学生都有自己的成绩.

这种对应关系在数学上我们称之为映射.

定义 1 设 X, Y 为两个集合,若对 X 中的每一个元素 x ,按照某种规则 f ,集合 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应,则称这种规则 f 为从 X 到 Y 的一个映射.

称与 x 对应的 y 为 x 的象, x 称为 y 的原象.由定义可知, X 中的每一个元素有且只有一个象,但 Y 中的某一个元素 y ,可能有原象,也可能没有原象,在有原象时,原象也不一定唯一.

若对 Y 中的每一个元素 y ,至少有一个原象,则称这种映射为满射.若对 x 中的任意两个不同元素 x_1, x_2 ,其象 y_1, y_2 也不相同,即有原象的元素 y 其原象唯一,则称这种映射为单射.若一个映射既为满射又为单射,则称这种映射为一一对应.

例 1 中 A 与 B 的对应关系可建立 A 到 B 的一个映射,而且这个映射是一一对应的.

例 2 中 A 与 B 的对应关系也可建立 A 到 B 的一个映射,但这个映射不是满射,也不一定是单射.

映射的例子很多,特别是一般集合到数集的映射,如学生与学生证号,地理位置与邮政编码,各单位与电话号码等等.这种映射可以使一般集合数字化,从而充分利用数学工具,加上计算机的广泛使用,大大简化处理非数字信息的难度,增加处理速度.

将一般集合转化为数集来考虑后,数集之间的关系就显得更为重要.数集之间的关系实际上就是变量之间的关系,从数集到数集的映射就是函数.

1.1.3 函数的概念

我们经常会遇到彼此之间有依赖关系的变量,如圆的面积 y 与它的半径 r 之间有关系

$$y = \pi r^2.$$

自由落体运动中,若开始下落的时刻为 $t=0$,则落下的距离 s 与下落的时间 t 之间有

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

其中, g 为重力加速度.

我们把这种依赖关系称之为函数关系.

下面给出两个变量之间的函数关系的严格定义.

定义 2 设 D 是一个非空的实数集合,有两个变量 x 和 y ,如果对每一个数 $x \in D$,变量 y 按照某种确定的法则 f 有唯一确定的实数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,称法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中, x 叫作自变量, y 叫作因变量,数集 D 称为这个函数的定义域.

对于 D 中的某一个值 x_0 ,因变量相应的值记为 y_0 ,则 $y_0 = f(x_0)$,称 y_0 为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 时的函数值,全体函数值的集合称为这个函数的值域.

由定义可以看出,函数是从定义域到值域的一个满射.

函数符号也常用 g, ϕ, F 等.如 $y = \phi(x), y = F(x)$.

在实际问题中,函数的定义域是根据实际意义确定的.如圆面积 $y = \pi r^2$ 中,半径 r 为自变量,其取值范围即函数定义域为 $D = (0, +\infty)$.

在不考虑函数实际意义的情况下,定义域指的是能使数学式子有意义的一切实数值的集合.如函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $D = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$.

在函数定义中,强调对每一个 $x \in D$,有唯一确定的 y 与之对应,若不强调这点,仅要求有确定的 y 与之对应,则可能对某一 $x_0 \in D$,有两个甚至两个以上的函数值.有时也把这种情况叫作函数.为区别起见,分别称之为单值函数和多值函数.本书中若无特别说明,函数都是指单值函数.

1.1.4 函数的表示法

1.1.4.1 解析法(公式法)

自变量 x 和因变量 y 之间的函数关系直接用公式表示出来,如 $y = \sin x$.

有时函数关系用两个或两个以上的数学式子分段表示,这种函数称为分段函数.

$$\text{例 3 } y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

这一函数称为绝对值函数.

$$\text{例 4 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

这一函数称为符号函数.对任一实数 x ,显然有 $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$.

$$\text{例 5 } y = [x].$$

这一函数称为取整函数,它表示不超过 x 的最大整数,如 $[-3.5] = -4$.

$$\text{例 6 } y = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

这一函数称为狄利克雷函数.

应该注意的是,分段函数虽然是由两个或两个以上的式子来表示,但决不能看成是多个函数,也不能看成是几个函数联立而成的,它满足函数的定义,只不过对定义域的不同区间有不同的表达式而已.

$$\text{例 7 } y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1-x, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ 求 } f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f(2).$$

$$\text{解 } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, f(1) = 1-1=0, f(2) = 1-2=-1.$$

还有一个特殊的函数,称为最值函数.

$$\text{例 8 } y = \min_{x \in D} \{x\}.$$

它表示取所有 x 中的最小者,即 x 的最小值.

$$y = \max_{x \in D} \{x\}.$$

它表示取所有 x 中的最大者,即 x 的最大值.

1.1.4.2 列表法

将一系列自变量的值与对应的函数值列成表格.如某商店在一年内各月的销售额(单位:万元)如下:

月份(t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售额(y)	825	740	521	495	625	531	435	625	508	675	585	760

它表示销售额 y 随着月份 t 的变化而改变的函数关系,可以看出,春节前后(12月、1月和2月)及5月和10月为旺季,其他月份为淡季.

1.1.4.3 图示法

把自变量 x 和函数 y 分别作为坐标平面上点的横坐标和纵坐标, 这些平面上的点 (x, y) 所描出的平面曲线(有的函数描出一些散点)就表示了 y 与 x 的函数关系. 如某气象站利用自动记录仪测出该地一昼夜气温的变化情况, 如图 1-1. 此图表示气温 T 随时间 t 变化的函数关系:

$$T = f(t).$$

为了更直观地描述函数关系, 通常对由解析法表示的函数, 用图示法画出其图形, 如本节例 3、例 4、例 5 的图形分别为图 1-2、图 1-3、图 1-4. 例 7 的图形为图 1-5.

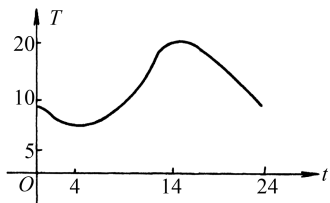


图 1-1

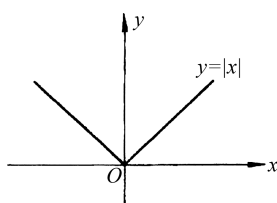


图 1-2

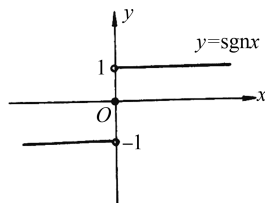


图 1-3

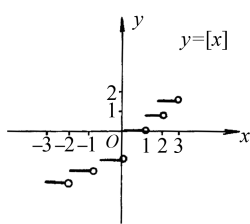


图 1-4

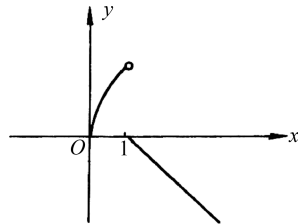


图 1-5

1.1.5 函数的几何特性

1.1.5.1 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义, 对任意的 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 若都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在集合 D 上单调增加; 而若都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在集合 D 上单调减少. 单调增加或单调减少统称为函数的单调性. 如 $y = x^3$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加(如图 1-6), $y = 1 - x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少(如图 1-7), 所以这两个函数都是单调函数.

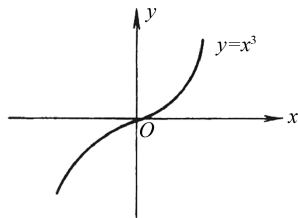


图 1-6

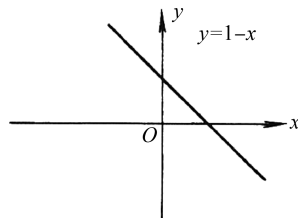


图 1-7

函数的单调性意味着随着自变量的增加, 函数值增大或减小, 从图形上看, 曲线 $y = f(x)$ 是上升的或下降的.

有时函数在定义域的不同区间具有不同的单调性. 如 $y = x^2$ (如图 1-8), 在定义域

$(-\infty, +\infty)$ 内不具有单调性,即 $y=x^2$ 不是单调函数.但在 $(0, +\infty)$ 内单调增加,在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少.我们把 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 叫作 $y=x^2$ 的两个单调区间.

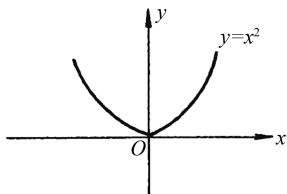


图 1-8

1.1.5.2 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义,若存在实数 k_1 ,对任意的 $x \in D$,都有 $f(x) \leq k_1$,则称 $f(x)$ 在 D 上有上界,并称 k_1 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界;若存在实数 k_2 ,对任意的 $x \in D$,都有 $f(x) \geq k_2$,则称 $f(x)$ 在 D 上有下界,并称 k_2 为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.若存在正数 M ,对任意 $x \in D$,都有 $|f(x)| \leq M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界,若这样的 M 不存在,则称 $f(x)$ 在 D 上无界.在定义域集合 D 上有界的函数称为有界函数.如 $y=\sin x$ 对于 $x \in (-\infty, +\infty)$,有 $|\sin x| \leq 1$,故 $y=\sin x$ 是有界函数.

显然有界函数一定既有上界又有下界,而既有上界又有下界的函数一定是有界的.上界和下界只要存在就有无穷多个.

有的函数只有下界而无上界,有的函数只有上界而无下界,这样的函数是无界函数,如 $y=e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界,但它有下界 0 ; $y=1-x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界,但它有上界 1 .

有的函数在定义域内无界(即本身是无界函数),但可以在定义域内的某个区间上有界,如 $y=\frac{1}{x}$ 在定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内无界,但在 $(1, +\infty)$ 内有界,在 $(-\infty, -1)$ 内也有界,这样的有界区间可以有无穷多个.

函数的有界性意味着函数值在某一范围之内,从图形上看,函数 $y=f(x)$ 在 D 内的图形夹在两条直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间(如图 1-9 所示).

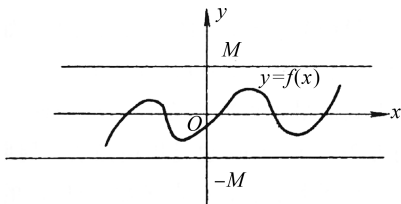


图 1-9

1.1.5.3 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 在关于原点对称的集合 D 上有定义,若对任意的 $x \in D$,都有 $f(-x) = -f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数;若对任意的 $x \in D$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数.在定义域集合 D 上的奇(偶)函数称为奇(偶)函数.如 $y=x^3$ 是奇函数, $y=x^2$ 是偶函数.

从图形上看,奇函数 $y=f(x)$ 的曲线关于坐标原点对称,偶函数 $y=f(x)$ 的曲线关于 y 轴对称.

例 9 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; (2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; (3) $y = \frac{\sin x}{x} + x$.

解 (1) 因为 $D = (-\infty, +\infty)$, 且 $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$, 所以 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 是偶函数.

(2) 因为 $D = (-\infty, +\infty)$, 且

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \ln \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x), \end{aligned}$$

所以 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} + (-x) = \frac{\sin x}{x} - x \neq f(x)$, 而且 $f(-x) \neq -f(x)$, 所以 $y = \frac{\sin x}{x} + x$ 是非奇非偶函数.

若函数 $f(x)$ 的定义域是关于原点对称的集合, 则 $f(x) + f(-x)$ 一定是偶函数, 而 $f(x) - f(-x)$ 一定是奇函数. 由于 $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, 可得出结论: $f(x)$ 可表示为偶函数与奇函数之和的形式.

1.1.5.4 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一个正数 T , 使对任意的 $x \in D$ (同时要求 $x + T \in D$), 都有 $f(x) = f(x + T)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 称满足上式的最小正数 T 为 $f(x)$ 的周期. 如 $y = \sin x, y = \cos x$ 皆为周期函数, 周期为 $2\pi, y = \tan x$ 也是周期函数, 周期为 π .

从图形上看, 周期函数 $y = f(x)$ 的曲线上的点在横坐标相距为 T 的两点的纵坐标相等, 所以在区间 $[x, x + T]$ 上的图形与在区间 $[x + kT, x + (k + 1)T]$ (k 为整数) 上的图形是相同的. 如图 1-10 所示.

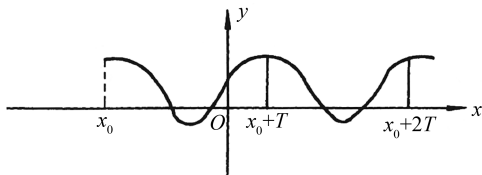


图 1-10

例 10 $y = x - [x]$ 是周期函数吗? 画出它的图形.

解 因为对任意正整数 n , 有 $f(n + x) = (n + x) - [n + x] = n + x - (n + [x]) = x - [x] = f(x)$, 所以 $y = x - [x]$ 是周期 $T = 1$ 的周期函数, 图形如图 1-11 所示.

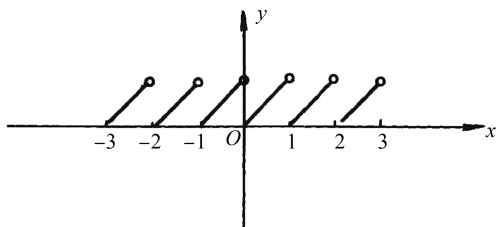


图 1-11

例 11 $y = A \sin(Bx + c)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{|B|}$ ($B \neq 0$).

1.1.6 反函数、复合函数、隐函数

1.1.6.1 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W , 若对 W 中的每一个数 y , 在 D 中都有唯一确定的 x 与之对应, 且满足 $y = f(x)$, 则 x 与 y 之间有一个函数关系, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 称之为函数 $y = f(x)$ 的反函数. 显然 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 互为反函数.

函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 $y = f(x)$ 的值域 W , $x = f^{-1}(y)$ 的值域为 $y = f(x)$ 的定义域 D .

因为习惯上用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 所以我们将函数 $x = f^{-1}(y)$ 中的 x 改为 y , y 改为 x , 得到函数 $y = f^{-1}(x)$, 则称 $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 互为反函数. 如 $y = 2x$ 的反函数为 $x = \frac{y}{2}$, 改写后成为 $y = \frac{x}{2}$, 称 $y = 2x$ 与 $y = \frac{x}{2}$ 互为反函数.

从图形上看, $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 关于直线 $y = x$ 对称, 如图 1-12 所示.

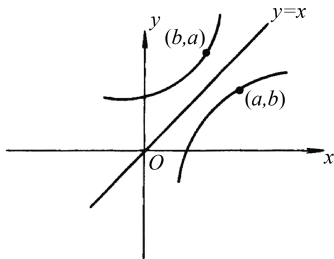


图 1-12

由于本章定义的函数是单值函数, 所以一个函数有反函数的充分必要条件是 x 与 y 有一一对应的关系.

在单调函数 $y = f(x)$ 中, x 与 y 是一一对应的, 因此单调函数一定有反函数, 且单调性一致.

有些函数本身无反函数, 但在某一区间有反函数, 如 $y = x^2$, 但在 $(0, +\infty)$ 内, $x = \sqrt{y}$, 即 $y = \sqrt{x}$ 可认为是 $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内的反函数, 同样, $y = -\sqrt{x}$ 可认为是 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的反函数.

1.1.6.2 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 值域为 W_1 , 函数 $u = \phi(x)$ 的定义域为 D_2 , 值域为

$W_2, W_2 \cap D_1 \neq \emptyset$, (如图 1-13) $D \subset D_2$, 若对任一 $x \in D$, 通过函数 $u = \phi(x)$, 所对应的 $u \in W_2 \cap D_1 \subset D_1$, 必有一个确定的 y 通过 $y = f(u)$ 而确定, 则 x 与 y 之间有一个函数关系, 称之为由 $y = f(u)$ 和 $u = \phi(x)$ 复合而成的复合函数, 记作

$$y = f[\phi(x)],$$

称 u 为中间变量.

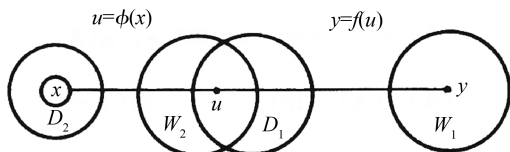


图 1-13

显然复合函数 $y = f[\phi(x)]$ 的定义域 $D \subset D_2$, 值域 $W \subset W_1$.

如 $y = \ln(1+x)$ 是由 $y = \ln u, u = 1+x$ 复合而成的, 定义域 $D = (-1, +\infty)$, 值域 $W = (-\infty, +\infty)$.

不是任意两个函数都能构成复合函数.

复合函数也可以由两个以上的函数构成, 如 $y = \sqrt{\cos \frac{x}{2}}$ 由 $y = \sqrt{u}, u = \cos v, v = \frac{x}{2}$ 三个函数复合而成, 其中 u, v 都是中间变量.

1.1.6.3 隐函数

函数通常由式子 $y = f(x)$ 表示, 这样的函数也称为显函数, 有时函数关系由一个方程来表示, 如 $x + y^3 - 1 = 0$, 实际上它可以表示为 $y = \sqrt[3]{1-x}$. 当函数关系用方程表示时, 我们称它为隐函数.

并不是所有的隐函数都能改写成显函数的形式, 如 $\frac{y}{x} = \ln y$.

习题 1.1

1. 计算下列各题:

(1) $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$, 求 $f(0), f\left(\frac{1}{x}\right)$;

(2) $f(x) = x^2 + 1$, 求 $f(x^2), [f(x)]^2$;

(3) $f(x) = \begin{cases} \tan x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = x^3 + \sin x$;

(2) $y = e^{|\sin x|}$;

(3) $y = xe^x$;

(4) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

3. 证明: 若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有定义, 则

(1) 当 $f(x)$ 是奇函数并在 $(0, 1)$ 内单调增加时, 它在 $(-1, 0)$ 内也单调增加;

(2) 当 $f(x)$ 是偶函数并在 $(0, 1)$ 内单调增加时, 它在 $(-1, 0)$ 内是单调减少的.

4. 下列函数哪些是周期函数? 若是, 指出其周期.

(1) $y = \cos(x - 2)$;

(2) $y = 1 + \sin\pi x$;

(3) $y = x \tan x$;

(4) $y = \sin^2 x$.

5. 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 0)$;

(2) $y = \frac{1 - x}{1 + x}$;

(3) $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$;

(4) $y = 1 + \ln(x + 2)$.

6. 设 $f(x) = \frac{x}{1 - x}$, 求 $f[f(x)]$ 及其定义域.

1.2 函数极限

函数极限是用来描述不同变量之间变化的某种依赖关系, 它是微积分学中最重要概念. 这是因为它使得人们在考虑某些实际问题时不再受限于有限性, 可以研究较为复杂的问题, 对问题考虑得更精细和更准确. 比如切线斜率、运动物体的瞬时变化率、一些不规则曲线的长度、不规则平面图形的面积、不规则空间立体图形的体积等问题的解决都有赖于极限理论. 从本章开始我们将对函数的极限进行研究, 首先是对数列及数列极限的相关内容进行研究.

1.2.1 数列极限

在数学中对一系列数进行考查, 研究其变化趋势, 这就是我们要研究的数列极限问题.

1.2.1.1 数列及数列极限定义

定义 3 定义域为自然数 \mathbf{N} 的函数 $f(n)$ 称为数列, 记为

$$x_n = f(n) (n \in \mathbf{N}),$$

我们常用 $\{x_n\}$ 或一列有序数 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 表示数列, 其中 x_n 称为数列的通项.

例如, $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$;

$\{q^n\}: q, q^2, \dots, q^n, \dots$;

$\{n\}: 1, 2, \dots, n, \dots$;

$\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$.

等都是数列的例子.

事实上, 数列极限研究的是函数值随自变量变化的依赖关系, 因此首先需要知道自变量的变化也就是自变量的极限的描述, 然后再考虑自变量的这种变化所导致的函数值的变化情况. 为此, 给出以下定义.

定义 4 对自然数集 $\mathbf{N} = \{n\}$, 其元素趋于无穷大当且仅当对任意自然数 N_0 , 都存在自然数 n , 使得 $n > N_0$, 记作 $n \rightarrow \infty$.

容易知道,对数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, 当项数 n 越来越大时,通项的值越来越接近 0;而对数列 $\{n\}: 1, 2, \dots, n, \dots$ 和 $\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$, 当项数 n 越来越大时,通项的值都不会向任何有限数值接近,这些现象就是下面要定义的数列收敛与发散问题.

定义 5 若对数列 $\{x^n\}$, 常数 a , 以及任意的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对一切 $n > N$ 所对应的 $\{x_n\}$, 有

$$|x_n - a| < \epsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 有极限 a , 或数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } a (n \rightarrow \infty).$$

特别地,若 $a = 0$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为无穷小数列;若数列 $\{x_n\}$ 不收敛, 则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

在定义 5 中,正数 ϵ 越小表示 x_n 与 a 越接近,因此只有要求 ϵ 是任意给定的实数才能表示 x_n 与 a 是无限接近的;而正整数 N 就是要找的,其大小通常与 ϵ 有关,且一般是 ϵ 越小 N 就越大. 在符号使用上,为方便,常用“ \forall, \exists ”分别表示“任意,存在”,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{使得对一切 } n > N \text{ 所对应的 } x_n, \text{ 都有 } |x_n - a| < \epsilon.$$

数列极限定义有明显的几何意义:若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 无论其多么小, 都可以找到正整数 N , 使得 $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$ 都在邻域 $U(a, \epsilon)$ 内, 即数列 $\{x_n\}$ 至多有 N 项不在邻域 $U(a, \epsilon)$ 内, 如图 1-14 所示.

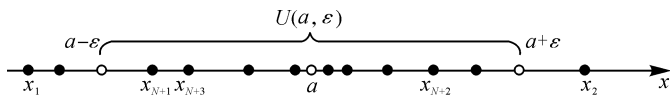


图 1-14

下面证明几个重要的极限结果.

例 12 证明:对常数列 $\{C\}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$.

证明 因为对 $\forall \epsilon > 0, \forall n$, 都有

$$|C - C| = 0 < \epsilon,$$

所以显然 $\exists N > 0$ 正整数 N , 使得对一切 $n > N$ 时, 有

$$|C - C| = 0 < \epsilon,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$.

例 13 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

证明 由阿基米德性质, 对 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 使得

$$N\epsilon > 1,$$

即有 $\frac{1}{N} < \epsilon$,

所以对上述 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

同理可证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

例 14 证明:若 $p > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

证明 由阿基米德性质, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得

$$N\varepsilon^{\frac{1}{p}} > 1,$$

即 $\frac{1}{N} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$,

所以对上述 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| = \frac{1}{n^p} < \frac{1}{N^p} < (\varepsilon^{\frac{1}{p}})^p = \varepsilon,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

例 15 证明:若 $|q| < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

证明 由阿基米德性质, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得

$$N(p\varepsilon) > 1,$$

即 $\frac{1}{N} < p\varepsilon$.

令 $|q| = \frac{1}{p+1}$ ($p > 0$), 则由伯努力不等式, 得 $\frac{1}{N} < p\varepsilon$. 对上述的 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|q^n - 0| = |q^n| = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{N} < \frac{1}{p} (p\varepsilon) = \varepsilon,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

1.2.1.2 收敛数列的性质

现在对收敛数列的性质做一个概述.

定理 1 设 $\{x_n\}$ 为一数列, 则

(1) 唯一性: 若数列 $\{x_n\}$ 收敛到实数 a, b , 则有 $a = b$.

(2) 有界性: 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 有界.

(3) 保号性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, 则对任意满足 $0 < b < |a|$ 的 b , 都存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时都有 $|x_n| > b$.

特别地, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$ (或 $a < 0$), 则存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$); 反之若存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对 a 的任意邻域 $U(a, \varepsilon)$, 它都包含了 x_n 中除有限个项之外的所有项.

证明 (1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 > 0$, 使得 $n > N_1, N_2$ 时