

SHUXUE SIWEI JIAOYU LILUN YU SHIJIAN YANJIU

数学思维教育理论与 与实践研究

刁晶华 著



$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\pi = 3.141592 \dots$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

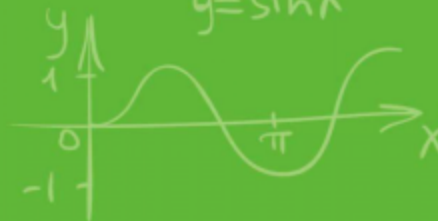
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$y = \sin x$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$



电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

$$\pi = 3.141592 \dots$$



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

数学思维教育理论与实践研究

刁晶华 著

电子科技大学出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

数学思维教育理论与实践研究 / 刁晶华著. -- 成都:
电子科技大学出版社, 2018.4
ISBN 978-7-5647-6205-6

I. ①数... II. ①刁... III. ①中学数学课—教学研究
IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 104164 号

数学思维教育理论与实践研究
刁晶华 著

策划编辑 万晓桐
责任编辑 万晓桐

出版发行 电子科技大学出版社
成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼 邮编
610051

主 页 www.uestep.com.cn
服务电话 028-83203399
邮购电话 028-83201495

印 刷 济南柯奥数码印刷有限公司
成品尺寸 169mm×239mm
印 张 9.75
字 数 144 千字
版 次 2018 年 4 月第一版
印 次 2018 年 4 月第一次印刷
书 号 ISBN 978-7-5647-6205-6
定 价 28.00 元

版权所有, 侵权必究

前 言

对于数学思维的突出强调是国际范围内新一轮数学课程改革的一个重要特征，这一观点在近几年数学成就较高的新加坡、芬兰等国出版的数学课程标准，以及我国数学课程标准（包括义务教育阶段和高中阶段）关于数学教育理念和目标的论述中都能明显看出。在 21 世纪这个知识经济时代，迫切需要思维能力强的人才，正是在这样的背景下，数学思维逐渐成为数学教育界的热门话题，回顾近几十年来，国内外数学教育界对其进行了广泛、深入的研究，对这些研究思路做一梳理，有助于这一研究不断地走向深入。

世界正进入新的技术革命时期，人们已认识到国家的现代化，科技是关键，教育是基础，世界各国激烈的竞争，归根结底是人才的竞争。新技术革命的挑战，给教育提出新的课题，传统的注重传授知识的教育模式已不相适应，需要强调发展人的智慧，培养开拓型、创造型人才。近年来，美国等发达国家重视对学生进行思维训练，许多大学专门开设了思维技巧新课程，许多中学，甚至小学也开始把思维技巧列入教学计划，教师从创造性思维、逻辑思维和批判思维三个方面教学生思维技巧，并且把思维技巧的讲授融于数学教学中。人们常说，数学是逻辑思维的体现，这主要指通过数学知识学习，由知识的逻辑性，培养、发展学生的逻辑思维，数学学习则主要是训练学生的创造性思维、批判思维、科学研究的各种具体思维方法以及发展非智力因素等。由于数学思想的发掘、运用需要创造性思维，以及运用的结果会给人以创新的激励和启迪，因此当我们向学生发掘、运用数学思想的示范和学生自己通过作业、试题、实践等从所学过的数学知识中发掘、运用数学思想，这些都将使学生的创造性思维得到培养和发展，其中会有有效地培养学生的想象、直觉、灵感、联想、启发、借鉴、比较、移植、综合等基本创造性思维和方法。

本书由刁晶华（辽宁省鞍山市北星学校）著，在编写书本的过程中，参考了国内许多同类专著，吸取了其中许多精髓，在书本出版之际，谨向原著者衷心的感谢。在编写过程中，力图做一些积极的探索和尝试，由于水平有限，加之时间仓促，书中难免存在疏忽与不妥之处，敬请专家、同行和广大读者批评指正。

目 录

第一章 数学思维教育.....	1
第一节 思维及数学思维.....	1
第二节 数学思维教育对提高人素质的意义.....	15
第三节 数学思维的培养.....	20
第四节 浅谈培养初中数学思维.....	25
第二章 数学创新思维研究.....	30
第一节 创新思维界定.....	30
第二节 创新思维的培养重点.....	36
第三节 在实践教学中培养学生的创新思维.....	41
第三章 数学解题思维障碍研究.....	48
第一节 思维障碍的本质.....	48
第二节 解题思维障碍表现.....	55
第三节 解题思维障碍形成的原因.....	58
第四节 消除解题障碍形成的策略.....	61
第四章 数学形象思维研究.....	63
第一节 形象思维界定.....	64
第二节 数学思维与形象思维的关系.....	69
第三节 形象思维在数学中的作用.....	72
第四节 数学形象思维的培养.....	76
第五章 数学创造性思维研究.....	81
第一节 创造性思维的内涵与特点.....	81
第二节 影响创造性思维的因素.....	88
第三节 如何在数学中培养学生的创造性思维.....	94

第六章 数学化归思想研究.....	100
第一节 数学化归思想.....	100
第二节 化归思想方法教学的意义及策略.....	103
第七章 数学抽象思维研究.....	108
第一节 抽象思维的基础知识.....	108
第二节 学生抽象能力的培养.....	113
第三节 浅谈差生数学抽象思维能力的培养.....	120
参考文献.....	125

第一章 数学思维教育

思维是人脑对客观现实的概括和间接的反映，反映的是事物的本质及内部的规律性。所谓数学思维，是指学生在对数学感性认识的基础上，运用比较、分析、综合、归纳、演绎等思维的基本方法，理解并掌握数学内容而且能对具体的数学问题进行推论与判断，从而获得对数学知识本质和规律的认识能力。

然而，在学习数学过程中，经常听到学生说：“我听得懂，就是做不来题。”当学生自己动手时总感到困难重重，无从入手。有时，在课堂上待老师把某一问题分析完时，常常看到学生拍脑袋：“唉，我怎么想不到这样做呢？”事实上，有不少问题的解答，发生困难，并不是因为这些问题的解答太难以至于无法解决，而是其思维形式或结果与具体问题的解决存在差异，也就是说，这时候，学生的数学思维存在障碍。这种思维障碍，有的是来自于教学中的疏漏，而更多的则来自于学生自身，来自于学生中存在的非科学的知识结构和思维模式。因此，研究学生的数学思维障碍对于增强学生数学教学的针对性和实效性有十分重要的意义。

第一节 思维及数学思维

一、现在初中数学教学中存在的问题

（一）初中数学教师教学水平有待提高

初中数学教师走上教师岗位，一方面因为工作和生活的影响，很难有时间再进行学习，并且在长时间的从教生涯中，自己的教学方式就会逐渐固定，

很难有所改变和提升；另一方面年轻教师在初中教师队伍中所占的比重越来越高，因为年轻教师刚刚走出校门，基本上没有什么从教经验和工作经历，不知道如何进行高水平的初中数学教学工作。虽然这些年轻教师在学校中学习了丰富的教学理论知识，并且接受和掌握了先进的教学理念，但是受经验限制，在实际教学中很难高水平地发挥自己理论知识扎实丰富的特点。学校中比较有威望的中老年数学教师，虽然有着长时间的教学经验和班级管理经验，但是这些教师不能很好地理解现代学生的思想动态，不能很好地吸收现代的教育理念和教育思想，不能很好地应用现代化的教学工具，这些都极大地限制了教育教学活动的开展和教学水平的提高，导致整体的教学质量不能够有明显提升。

（二） 课堂教学内容脱离学生实际生活

我们提倡学生学习有用的数学，但是现在初中数学课堂上教师在教学的时候特别注重数学课本内容的讲授，对学生经常进行题海战术，为了提高学生数学成绩，教师们是专讲考试考的内容，对于和考试无关的内容完全忽略不讲。对于枯燥的公式、复杂的定理和定律远离学生的实际生活，并且每节课都配备大量的习题，这让学生很难对数学产生兴趣，更有甚者会对数学产生厌烦和恐惧。脱离生活实际的数学课堂必然不会提升学生的综合素质，也就不能提高教学质量。

（三） 不注重学生的基础和接受能力

目前，一些初中数学教师在中考的压力下不注重学生的基础和接受能力，经常给学生布置或者是讲解一些比较高深的数学难题，对于数学中的基础知识和内容完全没有重视起来，甚至一些家长也持有这种观念，只给孩子讲解难题，以为这样就能够提高教学质量以及学生的整体素质。这种现象导致的结果是学生经过长时间的努力收获甚微。因为大部分的学生不能够很好地适应教师所讲的数学内容，使得这些学生在课堂上如云遮雾罩，糊里糊涂就上完了一节课，课堂上这些学生基本不参与课堂讨论和一些其他的课堂活动，

使得这些学生在一节课中只是扮演旁观者的角色，没有一点数学知识上的收获。当前教师不对学生的数学基础以及学生的接受能力进行了解和分析，不注重基础知识的讲解和训练，在教学上就不能有很好的质量，产生严重的本末倒置，时间一长就会产生严重的两极分化现象。

二、面向 21 世纪的数学思维教育

（一）数学教育的核心

市场经济的大潮正激荡着古老的中华大地，也在呼唤着学校教育改革。数学作为教育学科的一部分，它承担着不仅让人具有数学知识，而且给人以教学思维素养任务。所以，长期以来数学被称为思想的体操，似乎是没有什疑义的。然而也有一种见解认为：当今社会市场激烈着竞争，竞争就必须学会现实的数学，而要学习现实的数学，则必须摒弃数学的一些传统的特色，如抽象性、严密性、系统性等等，在这种情况下，数学是否还是思维的体操呢，于是重新审视数学思维教育的意义，以历史的、深邃的目光，去审视在数学教学改革的巨大变革中，数学思维教育的一些基本原则是否具有不变性。

随着 21 世纪的到来，人类正在实现从工业社会到信息社会的转变，当代数学教育的根本出发点，正是适应信息社会的需求，在信息社会中，大多数人将从事信息的管理和生产工作；工业生产将逐步从大批量、少品种的刚性系统过渡到中小批量、多品种的柔性系统；由于知识的不断更新，技术的不断进步，产品的日益复杂精巧，而其市场则日益短暂。旧的产品尚未销售完，新的产品便已设计出来并投入生产，相应地，人们的职业寿命变得短暂，工作和学习将会交替地进行。21 世纪的世界，将是用体力较少而用脑力较多、用机械较少而用电子较多、静态较少而变化较多的社会，要求工作人员在智力上能适应工作，随时准备吸收新思想，感知事物的来龙去脉，适应变革，解决非传统式的问题，正是这种要求使数学成为很多行业必备的知识。正如

美国数学教育界的文件《人人有份》中指出的：“从来没有像现在这样，美国人需要为生存而思考，从来没有像现在这样，他们需要数学式的思维。”

经济发达国家的数学教育改革的方向是：学校数学的焦点从双重任务——对大多数人教最少的数学，而把高等数学教给少数人——过渡到单一中心，把数学的最重要的公共核心教给所有的学生。

数学教学从基于传递知识的权威性的模式过渡到以启发学习为特征的、以学生为中心的实践活动。

数学教学从强调为后续内容做准备过渡到着重强调学生当前及未来所需要的东西。

数学教学从原来强调一张纸、一文笔式的计算到全面使用计算器和计算机。

分析经济发达国家遇到的数学教育改革的要求，可以清楚地看到 21 世纪的趋向。事实上，所谓要给学生公共的材料，要使学生能适应职业周期缩短、节奏加快、竞争激烈的现代社会，使数学成为整个人生发展的有用工具，这意味着数学教育需要培养人的更内在的、更深刻的东西，这就是数学素质，社会的发展并没有否定原来已经意识到的数学教学的改革方向，而是更加肯定：数学教学不仅仅是为了教学所需的知识，更是为了未来的发展，中学数学中蕴藏着促进人未来发展的因素，这就是上面所说的人的数学素质，其核心是人的思维品质。就社会发展而言，教育在社会发展的平缓时期，重在传授知识；而在社会的突变时期，则需要培养创造性。

这里，所谓素质是指人改造主观世界和客观世界的基本品质，一般来说，素质是对于人的后继活动来说的，在其他各种各样的品格中，它是原本的、基本的、内在的品格，而不是派生的、后发的、外部的品格。素质在人的后继活动中呈现的功能是整体的、广泛的、长期的，而不是仅仅服务于局部的、单一的、短期的。数学课培养的人的素质，也有着上述特点，借助于这些特点，不难把素质和人的一般的品格区分开来。

（二） 数学思维教育的意义

数学思维教育的意义，不仅仅是为了培养数学家，而是为所有人的未来发展打下基础。在于培养人的数感、数学观念和数学思想，概括地说，数学教育是为了扩展人们头脑中的数学空间，每个人都有隶属于自己的数学空间和一般生活空间，数学空间是对人生活空间的数学方面的抽象，是指反映人生活、思考着的特定客观世界的数学概念、运算规律和数学知识结构。数学空间是因人而异的、特定的。把一个人已经具有的数学空间，称为他的数学现实空间，而把他所能具有的数学空间，称为他的数学的可能性空间。不难理解，对于普通教育来说，学生所学的数学，应是和大多数人有关的数学现实材料，也就是在实际中能够应用的数学。然而，人们往往把数学空间看得太小了。事实上，可能的数学空间比人想象的要大得多，问题是有没有使学生对所学的数学知识有所领悟。例如，如果领悟到矩阵原来是一张表，矩阵的运算不过是对表的运算的一种规定，学生就有可能创造他所需要的运算。所以，这里的领悟就成为扩展数学空间的手段，一堂课能使学生有所领悟，就意味着有可能发展其的数学空间，衡量数学教学好坏的标准之一，就是看教学能否有效地扩大人的现实数学空间。数学空间不仅仅依靠一些既得的知识而构成，更重要的是借助于所学知识的生长点和开放面，以及数学思维过程，获得一种与数学相关的能力，从而使数学空间具有某种开放性，其中包括：数学化——人们用数学方法观察现实世界，分析研究各种数学现象，并对现实世界加以整理组织的过程，人学习数学，最重要的是学习数学化，同样地，人学习公理的知识，还不如说是学习“公理化”；与其说是学习形式体系，还不如说是学习“形式化”，每个学生都可能在一定的指导下，通过自己的实践来获得这些知识。

数学思维教育的意义，还在于培养人本质地看问题的意识。“抽象几乎是数学的同义语，抽象是从一定的角度把事物的相关的质提取出来，通过数学学习可以有效地培养人的抽象意识。学生走上社会后，经常要碰到生活和生产中许多复杂的问题，其必须能够透过现象看本质，不为表面现象所迷惑，

这就需要抽象意识。例如，一个人不仅在科学研究或抽象思维中需要抽象，而且在形象思维和艺术创作中也需要抽象。一个善于作画的人，他的画不是照搬生活中的景象，而是对之进行抽象，从“最能打动自己和观众”的角度，把对象的某种美抽象出来。例如，画高山注意雄伟之美；画花鸟，注意秀丽之美，这样，就以这一抽象物为尺子，更深刻地认识自然，刻画自然，决定取舍和详略，去掉芜杂的东西，强调本质的东西（当然，并非像数学上的要或不要的二值逻辑，而是有多变化、多层次的中间状态的适度抽象），从而达到寓神于形、形神兼备，同观众观赏该事物时的抽象发生共鸣，赢得读者会心的赞美。

数学思维教育的意义，更在于培养人的良好的思维习惯，形成良好的思维策略，增强人的反应能力。每一道数学题都为学生提供一个思维项目，学生千百次地受到训练，就会形成好的思维习惯。心理学家曾经观察过许多通过大量思维训练而获得所谓简缩思维的例子。简缩思维者对外来刺激有一种特别敏捷的反应，对有些事物是用不着思考的，就能提出解决问题的办法。尤其是，数学的论证特征使人凡事都要问一个“为什么”，要通过更为确定的基础知识来认识新的还有某些未知因素的事物，而这正是一个人的科学思维的入门的特征。

三、思维

（一）思维的界定

思维最初是人脑借助于语言对客观事物的概括和间接的反应过程。思维以感知为基础又超越感知的界限。它探索与发现事物的内部本质联系和规律性，是认识过程的高级阶段。

思维对事物的间接反映，是指它通过其他媒介作用认识客观事物，及借助于已有的知识和经验、已知的条件推测未知的事物。思维的概括性表现在它对一类事物非本质属性的摒弃和对其共同本质特征的反映。随着研究的深

入，人们发现，除了逻辑思维之外，还有形象思维、直觉思维、顿悟等思维形式的存在。

（二）思维的特征

1.概括性

思维的概括性是指在大量感性材料的基础上，把一类事物共同的特征和规律抽取出加以概括。概括水平在一定程度上表现了思维的水平。另外，概括是人们形成概念的前提，也是思维活动能迅速进行迁移的基础。概括是随人们认识水平的深入而不断发展的。人们的认识水平越高，对事物的概括水平也就越高。

2.间接性

思维的间接性是指人们借助于一定的媒介和知识经验对客观事物进行间接的认识。由于思维的间接性，人们才可能超越感知觉提供的信息，认识没有直接作用于人的感官的事物和属性，从而揭示事物的本质和规律。从这个意义上讲，思维认识的领域要比感知觉认识的领域更广阔、更深刻。

3.思维是对经验的改组

思维是一种探索和发现新事物的心理过程。它常常指向事物的新特征和新关系，这就需要人们对头脑中已有的知识经验不断进行更新和改组。思维活动常常是由一定的问题情景引起的，并试图解决这些问题。所以思维不是简单地再现经验，而是对已有的知识经验进行改组、建构的过程。

（三）思维的分类

1.根据思维的凭借物和解决问题的方式，可以把思维分为直观动作思维、具体形象思维和抽象逻辑思维

（1）直观动作思维

直观动作思维又称实践思维，是凭借直接感知，伴随实际动作进行的思维活动。

实际动作便是这种思维的支柱。幼儿的思维活动往往是在实际操作中，借助触摸、摆弄物体而产生和进行的。例如，幼儿在学习简单计数和加减法时，常常借助数手指，实际活动一停止，思维便立即停下来。成人也有动作思维，如技术工人在对一台机器进行维修时，一边检查一边思考故障的原因，直至发现问题排除故障为止，在这一过程中动作思维占据主要地位。不过，成人的动作思维是在经验的基础上，在第二信号系统的调节下实现的，这与尚未完全掌握语言的儿童的动作思维相比有着本质的区别。

（2）具体形象思维

具体形象思维是运用已有表象进行的思维活动。

表象便是这类思维的支柱。表象是当事物不在眼前时，在个体头脑中出现的关于该事物的形象。人们可以运用头脑中的这种形象来进行思维活动。在幼儿期和小学低年级儿童身上表现得非常突出。如儿童计算 $3+4=7$ ，不是对抽象数字的分析、综合，而是在头脑中用三个手指加上四个手指，或三个苹果加上四个苹果等实物表象相加而计算出来的。形象思维在青少年和成人中，仍是一种主要的思维类型。例如，要考虑走哪条路能更快到达目的地，便需在头脑中出现若干条通往目的地的路的具体形象，并运用这些形象进行分析、比较来做出选择。在解决复杂问题时，鲜明生动的形象有助于思维的顺利进行。艺术家、作家、导演、工程师、设计师等都离不开高水平的形象思维。学生更需要形象思维来理解知识，并成为发展抽象思维的基础。

形象思维具有三种水平：第一种水平的形象思维是幼儿的思维，只能反映同类事物中的一些直观的、非本质的特征；第二种水平的形象思维是成人对表象进行加工的思维；第三种水平的形象思维是艺术思维，这是一种高级的、复杂的思维形式。通常所说的形象思维是指第一种水平。

（3）抽象逻辑思维

抽象逻辑思维是以概念、判断、推理的形式达到对事物的本质特性和内在联系认识的思维。

概念是这类思维的支柱。概念是人反映事物本质属性的一种思维形式，因而抽象逻辑思维是人类思维的核心形态。科学家研究、探索和发现客观规律，学生理解、论证科学的概念和原理，以及日常生活中人们分析问题、解决问题等，都离不开抽象逻辑思维。小学高年级学生的抽象逻辑思维得到迅速发展，初中生这种思维已开始占主导地位。初中一些学科中的公式、定理、法则的推导、证明与判断等，都需要抽象逻辑思维。

2.根据思维过程中是以日常经验还是以理论为指导来划分，可以把思维分为经验思维和理论思维

(1) 经验思维

经验思维是以日常生活经验为依据，判断生产、生活中的问题的思维。例如，人们对“月晕而风，础润而雨”的判断；学生凭自己的经验认为“鸟是会飞的动物”；人们通常认为“太阳从东边升起，往西边落下”等都属于经验思维。

(2) 理论思维

理论思维是以科学的原理、定理、定律等理论为依据，对问题进行分析、判断的思维。例如，根据“凡绿色植物都是可以进行光合作用的”一般原理，来判断某一种绿色植物的光合作用。科学家、理论家运用理论思维发现事物的客观规律。教师利用理论思维传授科学理论，学生运用理论思维学习理性知识。

3.根据思维结论是否有明确的思考步骤和思维过程中意识的清晰程度，可以把思维分为直觉思维和分析思维

(1) 直觉思维

直觉思维是未经逐步分析就迅速对问题答案做出合理的猜测、设想或突然领悟的思维。例如，医生听到病人的简单自述，迅速做出疾病的诊断；公安人员根据作案现场情况，迅速对案情做出判断；学生在解题中未经逐步分析，就对问题的答案做出合理的猜测、猜想等的思维。

(2) 分析思维

分析思维是经过逐步分析后，对问题解决做出明确结论的思维。例如，学生解几何题的多步推理和论证；医生面对疑难病症的多种检查、会诊分析等的思维。

4.根据解决问题时的思维方向，可以把思维分为聚合思维和发散思维

(1) 聚合思维

聚合思维又称求同思维、集中思维，是把问题所提供的各种信息集中起来得出一个正确的或最好的答案的思维。例如，学生从各种解题方法中筛选出一种最佳解法；工程建设中把多种实施方案经过筛选和比较找出最佳的方案等的思维。

(2) 发散思维

发散思维又称求异思维、辐射思维，是从一个目标出发，沿着各种不同途径寻求各种答案的思维。例如，数学中的“一题多解”；科学研究中对某一问题的解决提出多种设想；教育改革的多种方案的提出等的思维。

聚合思维与发散思维都是智力活动不可缺少的思维，都带有创造的成分，而发散思维最能代表创造性的特征。

5.根据思维的创新成分的多少，可以把思维分为常规思维和创造性思维

(1) 常规思维

常规思维是指人们运用已获得的知识经验，按惯常的方式解决问题的思维。例如，学生按例题的思路去解决练习题和作业题。

(2) 创造性思维

创造性思维是指以新异、独创的方式解决问题的思维。例如，技术革新、科学的发明创造、教学改革等所用到的思维都是创造性思维等。

四、 数学思维

数学思维也就是人们通常所指的数学思维能力，即能够用数学的观点思考问题和解决问题的能力。比如转化与划归，从一般到特殊、特殊到一般，