我最喜欢的趣味代数书

ALGEBRA

[俄罗斯] 别莱利曼 著　　柯楠 编译

通过有趣的叙述启迪
让青少年在科学上进
行严肃的思考和探索

世界科普大师 趣味科学奠基人
别莱利曼的代表作品

对全世界青少年
科学学习
产生深远影响的
科普读物

入选世界
十大科普读物

中国纺织出版社

内容提要

本书是俄国科普作家别莱利曼的经典代表作之一，书中避免了枯燥无味的说教，选择用有趣的数学故事、数学历史上的难题，把一些普通的代数学知识与实际生活相结合，既让读者们重温、巩固已经掌握的代数知识，也培养了他们对代数的兴趣，以及积极探索和学习的能力。

图书在版编目（CIP）数据

我最喜欢的趣味代数书 /（俄罗斯）别莱利曼著；柯楠编译. —北京：中国纺织出版社，2018.12
ISBN 978-7-5180-5306-3

Ⅰ.①我… Ⅱ.①别… ②柯… Ⅲ.①代数—青少年读物 Ⅳ.①015-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第191173号

策划编辑：郝珊珊　　责任校对：寇晨晨　　责任印制：储志伟

中国纺织出版社出版发行
地址：北京市朝阳区百子湾东里A407号楼　邮政编码：100124
销售电话：010—67004422　传真：010—87155801
http：//www.c-textilep.com
E-mail：faxing@c-textilep.com
中国纺织出版社天猫旗舰店
官方微博http：//weibo.com/2119887771
北京睿特印刷厂印刷　各地新华书店经销
2018年12月第1版第1次印刷
开本：710×1000　1/16　印张：12
字数：114千字　定价：39.80元

编译者序

“全世界孩子最喜爱的大师趣味科学丛书”是世界著名科普作家别莱利曼最经典的作品之一，从1916年完成到1986年已经再版22次，被翻译成十几种文字，畅销20多个国家，全世界销量超过2000万册。

别莱利曼通过巧妙的分析，把一些高深的科学原理变得通俗简单，让晦涩难懂的科学习题变得生动有趣，还有各种奇思妙想以及让人意想不到的比对。这些内容大都跟我们的日常生活息息相关，有的取材于科学幻想作品，如马克·吐温、儒勒·凡尔纳、威尔斯等作者的作品片段，这些名著中描绘的奇妙经历，呈现出了鲜活的案例，不仅引人入胜，还能让读者在趣味阅读中收获知识。

由于写作年代的限制，这套书存在一定的局限性，毕竟作者在创作这套书时，科学研究没有现在严谨，书中用了一些旧制单位，且随着科学的发展，很多数据已经发生了改变。在编译这套书时，我们在保持这一伟大作品的精髓的同时，也做了些许的改动，并结合现代科学知识，进行了一些小小的补充。希望读者们在阅读时，能够有更大的收获。

在编译的过程中，我们已经尽了最大的努力，但依然难免会有疏漏之处。在此，恳请读者提出宝贵的意见和建议，帮助我们进行完善和改进。

目 录

Chapter3 算术的好帮手——速乘法

Chapter4 丢藩图方程

Chapter5 第六种数学运算

Chapter6 二次方程

Chapter7 最大值和最小值

Chapter8 级数

Chapter9 第七种数学运算

Chapter1

第五种数学运算

第五种运算——乘方

我们熟悉的代数运算有4种：加、减、乘、除。不过，代数又被称为“具有7种运算的算术”，因为除了上述4种运算之外，还有乘方和其他两种逆运算。

接下来，我们就介绍一下乘方，我们将其称为“第五种运算”。需要说明一点，这一运算也是源自于实际生活，且应用范围很广。回想一下，计算面积、体积的时候，我们经常会用到2次方或3次方。在物理学中，万有引力、电磁作用和声、光的强弱，都跟距离有关：强度大小和距离的2次方成反比。在太阳系中，行星围绕太阳转动的周期的2次方，与它跟太阳之间间距的3次方成正比，卫星围绕行星转动时也是这样。

上面提到了2次方和3次方，生活中我们还可能会遇到更高次的乘方。比如，工程师在计算材料强度的时候，时常会用到4次方，而计算蒸汽管的直径则会用到6次方。在研究水流对石头的冲击力时，也会用到6次方。假设一条河的水流速度是另一条河的4倍，那么，水流速度快的河流对河床上石头的冲击力就是水流速度慢的河流的$4^6=4096$倍。

在研究灯泡钨丝的亮度和温度的关系时，我们会遇到更高次的乘方。这里有一个公式：当物体在白热状态时，总亮度增加的倍数是绝对温度（即从−273℃起算的温度）增加倍数的12次方倍；在炽热状态时，这一倍数可高达30次方。比如，物体的绝对温度从2000K升高到4000K，温度增加为原来的2倍，其亮度就会增加为原来的$2^{12}=4096$倍。在后面的章节中，我们会讲到这一理论对于制造灯泡的特别意义。

乘方带来的便利

第五种运算在天文学中的应用最为广泛，在研究宇宙的过程中，时常会用到巨大的数，也就是天文数字——它们只有一两位有效数字，后面跟着一大串的 0。

按照普通的记数方法，天文数字的书写和运算都很不方便。以地球到仙女座星云的距离为例，用普通的方法来写，应该是 95000000000000000000 千米，这个数的单位是“千米”，可在天文计算中经常要换算成厘米，这就需要在上面的数字后再加上 5 个 0，即 9500000000000000000000000。这个数字非常大，但恒星的质量比这个数还要大很多。例如，用克来表示太阳的质量，就是：

$$1\ 983\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$$

显然，用这种记数方法来进行运算，很容易弄错后面的 0 的个数。更何况，很多时候遇到的数字比这些还要大很多。

此时，第五种运算的优越性就体现出来了。我们知道，对于 1 后面跟着一些 0 的数，通常可以用 10 的若干次方来表示，比如 $10=10^1$，$100=10^2$，$1000=10^3$，$10000=10^4$，…按照这样的方式，前面提到的两个数字，就可以用这样的形式来表示：

$$9500000000000000000000000=95\times10^{23}$$

$$1983000000000000000000000000000000=1983\times10^{30}$$

这样一来，在进行计算时，不仅书写方便，运算也变得容易很多。比如，想用这两个数进行乘法运算，就可以写成下面的式子：

$$(95\times10^{23})\times(1983\times10^{30})=95\times1983\times10^{(23+30)}=188385\times10^{53}$$

如果不用乘方运算，这两个数相乘得到的数字后面，一共有 53 个 0。这样不仅书写起来很费劲，还可能会因为漏写 0 而发生错误。

地球质量是空气质量的几倍

我们再来举一个例子，加深大家对乘方在“天文数字”运算中的作用的理解。比如，计算一下地球的质量相当于它周围空气质量的多少倍。

首先，地球表面每平方厘米所受到的空气压力大约是1千克，也就是说，地球表面每平方厘米支撑的空气柱的质量约等于1千克。这样的话，就可以将地球周围的空气视为是由多个这样的空气柱组成的。只要计算出地球的表面积，就能得出有多少个这样的空气柱，从而得到地球周围空气的总质量。

通过查阅资料，可知地球的表面积大约是51000万平方千米，即51×10^{7}平方千米。我们知道，1千米等于1000米，1米等于100厘米，那么1千米就等于10^{5}厘米1平方千米就等于$(10^{5})^{2}=10^{10}$平方厘米。由此，可知地球的表面积为：

$51\times10^{7}\times10^{10}=51\times10^{17}$（平方厘米）

这个数值就是地球周围空气的质量，单位是千克，如果换算成吨，就是：

$51\times10^{17}\div10^{3}=51\times10^{14}$（吨）

而地球的质量约为6×10^{21}吨。

两个数的比值是：

$6\times10^{21}\div(51\times10^{14})\approx10^{6}$

也就是说，地球的质量是它周围空气质量的一百万倍。换句话说，地球周围空气的质量，只有地球质量的百万分之一。

没有火焰和热也可以燃烧

众所周知，木头或煤炭只有在温度较高的情况下才能燃烧。化学家告诉我们，这是因为碳元素和氧元素发生了化合反应。事实上，这种化合反应在任何温度下都能进行，只是在常温下进行得比较慢而已，以至于我们根本观察不到。化学反应定律说：温度每降低 10℃，反应速度就会减缓$\frac{1}{2}$。

根据这一定律，我们可以研究一下木头和氧气发生化合反应的过程。假设当火焰的温度为 600℃时，烧掉 1 克木头需要花费 1 秒钟。那么，当温度为 20℃时，烧掉同样重量的木头需要多少秒呢？

温度从 600℃降低到 20℃，下降了 580℃，也就是下降了 10℃的 58 倍，因此反应速度就是原来的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{58}$，即烧掉这 1 克木头需要 2^{58} 秒。

这段时间到底是多久呢？其实，不用真的把这个数计算出来，我们可以粗略地估算一下。

$$2^{10}=1024\approx 10^{3}$$

所以

$$2^{58}=2^{60-2}=2^{60}\div 2^{2}=\frac{1}{4}\times 2^{60}=\frac{1}{4}\times(2^{10})^{6}\approx\frac{1}{4}\times 10^{18}$$

一年的时间大概是 3000 万秒，也就是 3×10^{7} 秒，所以

$$\frac{1}{4}\times 10^{18}\div(3\times 10^{7})=\frac{1}{12}\times 10^{11}\approx 10^{10}\text{（秒）}$$

答案就是 100 亿年！就是说，当温度为 20℃时，要烧掉 1 克木头需要 100 亿年的时间。如此慢的反应速度，我们自然是感觉不到的。可如果采用取火工具，就能把这个缓慢的过程加快上万倍，乃至更多。

天气变化的概率

【题目】假设我们讨论天气的时候，只能用有云或没云来区分，也就是只有阴天和晴天两种情况，那么，你认为会在多长的时间内，天气变化情况完全不重复？

粗略地估计一下，这个数值应该不会太大，最多是两个月，所有的晴天和阴天的组合应该都有了。在后面的时间里，这些组合中总有一个会重复出现。

那么，真实的情况是这样吗？下面，我们就通过第五种数学运算来计算一下，看看在这种分类方法下，究竟有多少种不同的组合。

【解答】首先，在一周之内有多少种不同的阴晴组合形式呢？

第一天可能是晴天，也可能是阴天，即存在两种可能；第二天也一样，同样存在两种可能。因此，前两天共有2^2种可能的组合，即：

两天都是晴天；两天都是阴天；第一天阴天，第二天晴天；第一天晴天，第二天阴天。

那么，前三天呢？由于第三天也有2种组合，因此，跟前两天所有可能的组合结合起来，前三天所有可能的天气变化组合数就是：$2^2\times2=2^3$。以此类推，前四天所有可能的天气变化组合数为：$2^3\times2=2^4$；前五天共有2^5种组合；前六天共有2^6种组合；一个星期共有2^7种组合，也就是128种。

即最多经过连续128周，天气变化情况会完全不同。在128周之后，总会有128种组合中的一种再次出现。当然，也可能在128周之前就已经出现了重复的情况，这里的128周只是一个最长的期限，超过这个期限，重复必然会发生。不过，也有可能在这128周中完全没有重复的情形，但概率非常小。

破解密码

【题目】某个单位的保险柜的密码被遗忘了，只有钥匙而没有密码，根本没办法将其打开。保险柜的门上有一个密码锁，由5个带字母的圆环组成，每个圆环上有36个字母，只有把这5个圆环上的字母组成一个单词，才能解锁。想打开这个密码锁而不破坏保险柜，必须把圆环上所有的字母组合都尝试一遍，假设每尝试一个组合要用3秒钟，倘若计划用10个工作日把保险柜的锁打开，能够做到吗?

【解答】我们先来计算一下，这些字母所有可能的组合共有多少种。

先看2个圆环的情况。每个圆环上都有36个字母，从这2个圆环上各取一个字母，所有可能的组合情况是：

$36\times36=36^2$（种）

上面的任一种都能跟第3个圆环上的任一个字母搭配，得到所有可能的组合情况有：

$$36^2\times36=36^3\text{（种）}$$

以此类推，4个圆环所有可能的组合是36^4种，5个圆环所有可能的组合是$36^5=60466176$种。由于尝试每个组合需要的时间是3秒钟，要把所有的组合都试一遍，需要的时间是：

$$3\times60466176=181398528\text{（秒）}$$

将上面的数换算成小时，就是：

$$181398528\div3600\approx50388\text{（小时）}$$

如果每天工作8小时，大概需要

$$50388\div8\approx6300\text{（天）}$$

差不多是20年。

所以，想用10个工作日打开这个密码锁，概率只有$\frac{10}{6300}$，也就是$\frac{1}{630}$，太渺茫了。

碰上“倒霉号”的概率

【题目】有一个迷信的人买了一辆自行车，他很忌讳数字“8”，生怕自己的自行车牌里出现“8”这个倒霉的数字。他一直盘算着，车牌上所有的数字都包含在0，1，2，…，9这10个数字当中。在这些数字中，只有一个是“8”，所以，碰上“倒霉数”的可能性只有$\frac{1}{10}$。试问：他的想法对吗？

【解答】自行车牌的号码共有6位数，每位都有0，1，2，…，9这10种可能，也就是10^6种组合，除去000000不能作为车牌号以外，剩下的号码共有999999个，即：

000001，000002，…，999999

现在计算一下，共有多少个“幸运号”，也就是不带“8”的号。第一位数字可能是除了“8”以外的9个数字中的任何一个，即0，1，2，3，4，5，6，7，9；第二位数字也是一样。所以，前两位数共有$9\times9=9^2$种“幸运数”组合。如果再加上一位数，由于新加上的这个数也有9种可能，所以前三位的“幸运数”有$9\times9^2=9^3$种组合。

以此类推，6位车牌号所有可能的“幸运号”个数是9^6个。这些号码中包含了000000，它不能作为自行车的车牌号码。所以，所有的“幸运号”共有$9^6-1=531440$个。在上面的999999个数中，这些“幸运号”所占的比例只比53%多一些，而“倒霉号”所占的比例将近47%，远远高于他所认为的10%。

如果车牌号不是6位，而是7位，那么，在所有的车牌号码中，“倒霉号”的数量可能会比“幸运号”的数量还多，这一点读者可以自己试着证明。

用 2 累乘的惊人结果

用2累乘一个很小的数，累乘的次数无须太多，就能把这个数变得特别大。下面，我给大家举一个不太常见的例子。

【题目】草履虫每隔一定的时间，就会从一个分裂成两个，这个时间大约是27小时。假设通过这种方法分裂出来的草履虫都能存活，试问，大概需要多长时间，一只草履虫分裂出来的所有后代的体积才能跟太阳的体积一样大?

假设每次分裂的后代都能存活，已知一只草履虫分裂40代之后，其所有子孙所占的体积大约是1立方米，而太阳的体积大约是10^{27}立方米。

【解答】根据已知条件，这个题目可转化为：用2累乘1立方米，要累乘多少次，才可以得到10^{27}立方米?

我们知道，$2^{10}\approx1000$，所以10^{27}可以表示成下面的式子：

$$10^{27}=(10^{3})^{9}\approx(2^{10})^{9}=2^{90}$$

也就是说，在分裂40代的基础上，只要再分裂90代，就能达到太阳的体积那么大。如果从第一代开始算起，要分裂40+90=130代才能达到太阳那么大的体积。我们很容易计算出，分裂到130代大概需要147天：

$27\times130=3510$（小时）

$3510\div24=146.25$（天）≈147（天）

据说，曾经有一位微生物学家，从草履虫第一次分裂开始观察，一直观察到它分裂了8061次。感兴趣的读者可以自己计算一下，如果这些草履虫都存活了，经过这么多次的分裂后，其后代所占的体积是多少?

对于这个问题，我们还可以这样说：假设太阳也进行分裂，第一次分裂成2个，每一半又分裂成2个，并一直分裂下

去。那么，经过多少次分裂之后，最终形成的粒子会跟草履虫的体积一样大？

答案还是130次。你可能会觉得不可思议，怎么才这么少的次数？这是真的吗？

当然是真的。类似的问题还有很多，比如，把一张纸对半剪开，剪出来的半张纸再对半剪开，如此类推。假设可以一直剪下去，那么，剪多少次之后，得到的粒子跟原子一样大？

假设一张纸的质量是1克，原子的质量我们取$\frac{1}{10^{24}}$克这个数量级。

因为

$$10^{24}=(10^3)^8\approx(2^{10})^8=2^{80}$$

所以，一共要剪80次。很多人以为要剪几百万次，但其实根本没那么多。

快 100 万倍的触发器

有一种电子装置叫做触发器，主要由两个电子管组成，就跟收音机里的电子管差不多。通过触发器的电流必定会通过其中的一个电子管，可能是左边的，也可能是右边的。触发器里有两个接触点，用来输出触发器的回答脉冲。在外面输入脉冲的瞬间，触发器就会立刻进行“翻转”，此时，原来导通的电子管变成闭合状态，电流转而进入另一个电子管。当右边电子管闭合、左边电子管导通的时候，触发器就会瞬间输出回答脉冲。

现在，我们给触发器连续不断地输入几个电脉冲，看看它是如何工作的。我们可根据右边的电子管来确定触发器所处的状态：当右边的电子管闭合，我们规定触发器处于“0状态”；当右边的电子管导通，我们规定它处于“1状态”。

假设触发器的初始状态是“0状态”，也就是左边电子管导通，如图1所示。输入第一个脉冲后，右边闭合的电子管变成导通状态，即触发器翻转成“1状态”。此时，触发器不输出回答脉冲，因为只有右边的电子管处于导通状态时，才输出回答脉冲。

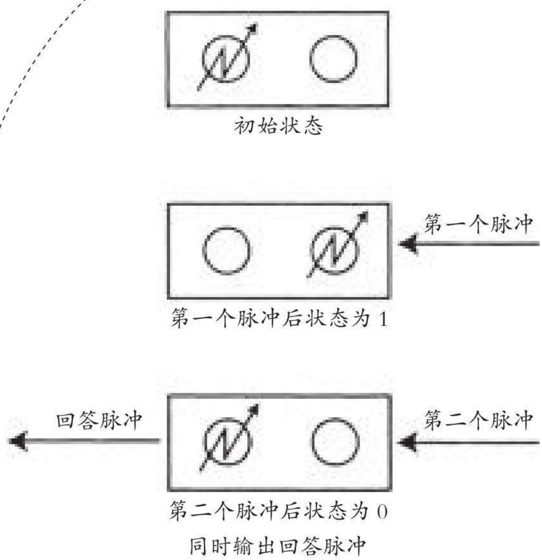

图 1