多复变中的L^2方法与L^2延拓定理

李 植 编著

THE L^2 METHODS AND L^2 EXTENSION THEOREMS IN SEVERAL COMPLEX VARIABLES

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书介绍了多复变中的L^2方法和L^2延拓定理. L^2方法是多复变和复几何领域的经典研究方法，被用于研究很多重要的问题，如Levi问题、Cousin问题、Stein流形的嵌入问题、L^2延拓问题等，其中带有最优估计的L^2延拓问题是多复变中的重要问题.

本书第1章介绍了全纯逼近问题和最优L^2延拓定理的背景. 第2章介绍了一些基础知识，主要包括多复变中的一些基本概念和基本结果. 第3章介绍了L^2方法的一些相关结果. 第4章和第5章给出了本书主要结果的证明过程，包括全纯截面的加权逼近和带有导数的Bergman核的下界估计等号成立的必要条件.

本书可作为高等院校学生了解多复变函数论的参考书.

图书在版编目(CIP) 数据

多复变中的 L^2 方法与 L^2 延拓定理 / 李植编著. -- 北京：北京邮电大学出版社，2023. 6
ISBN 978-7-5635-6930-4

Ⅰ. ①多… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①延拓-研究 Ⅳ. ①O175.1

中国国家版本馆 CIP 数据核字（2023）第 099722 号

策划编辑：彭 楠 **责任编辑：**王晓丹 耿 欢 **责任校对：**张会良 **封面设计：**七星博纳

出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号
邮 政 编 码：100876
发 行 部：电话：010-62282185 传真：010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：[redacted]虎彩文化传播有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张：8
字　　数：158 千字
版　　次：2023 年 6 月第 1 版
印　　次：2023 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-6930-4 定价：49.00 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前　言

L^2 方法是多复变和复几何领域的经典研究方法, 被用于研究很多重要的问题, 包括 Levi 问题、Cousin 问题、Stein 流形的嵌入问题、L^2 延拓问题等. 在特定的权函数下, 平方可积的全纯截面是重要的研究对象. 1971 年, Taylor 给出了在一类不同权函数下平方可积的全纯函数空间的稠密性, 并给出了其在复动力系统研究中的重要应用. 最近, Fornaess 和 Wu 改进了 Taylor 的结果.

带最优估计的 L^2 延拓问题是多复变函数论中的基本问题. 自 Ohsawa-Takegoshi 得到带良好估计的 L^2 延拓定理后, 许多著名数学家通过建立各种方法得到了带更好估计的 L^2 延拓定理, 但这些方法都不能回答带最优估计的 L^2 延拓问题. 周向宇以新的想法开始该问题的研究, 并与学生朱朗峰和关启安取得突破. 2015 年, 关启安和周向宇得到了宽泛的带最优估计的 L^2 延拓定理并给出了其应用, 还解决了 Suita 猜想等号成立的充要条件部分, 即完全解决了 Suita 猜想.

本书包括关启安和周向宇证明具有最优估计 Ohsawa-Takegoshi L^2 延拓定理的方法的两个应用. 第一个是应用待定函数法改进了 Fornaess 和 Wu 的结果并且作为推论得到了在超凸流形上 Taylor 的稠密性问题成立. 第二个是给出了 Bergman 引入的带有导数的 Bergman 核的下界估计等号成立的必要条件.

特别感谢周向宇院士审阅了本书并提出了很多宝贵的意见. 本书的编写得到了北京邮电大学理学院的支持. 在此一并表示感谢! 本书的出版得到了中央高校基本科研经费 (500422378) 的资助.

作　者

2022 年 12 月

目　录

第 1 章　引言 ····· 1
1.1　研究背景 ····· 1
1.2　全纯逼近 ····· 1
1.3　非约化解析集上的 L^2 延拓 ····· 4
第 2 章　预备知识 ····· 9
2.1　次调和函数与多次调和函数 ····· 9
2.2　Lelong 数 ····· 15
2.3　拟凸性与全纯域 ····· 17
2.4　解析集 ····· 20
2.5　Stein 流形 ····· 22
2.6　向量丛、联络和曲率 ····· 24
2.7　Bergman 核 ····· 28
2.8　Green 函数的基本性质 ····· 30
2.9　解析容量 ····· 31
第 3 章　Cauchy-Riemann 方程与 L^2 方法 ····· 33
3.1　无界线性算子 ····· 33
3.2　完备流形 ····· 36
3.3　$\bar{\partial}$-算子的 L^2 估计 ····· 39
3.4　乘子理想层 ····· 44
3.5　Ohsawa-Takegoshi L^2 延拓定理 ····· 48
第 4 章　全纯截面的带权逼近 ····· 52
4.1　问题背景 ····· 52
4.2　Stein 流形上的带权逼近 ····· 52
4.3　超凸流形上的带权逼近 ····· 63
第 5 章　最优 L^2 延拓定理与 Suita 猜想 ····· 67

5.1 问题背景 ····· 67
5.2 $\mathbb{C}^n$ 中区域上的 L^2-jet 延拓 ····· 67
5.3 Stein 流形中非约化解析集上的 L^2 延拓 ····· 75
5.4 应用 ····· 78
5.5 定理 5.3.1 的证明 ····· 86
5.6 主要推论的证明 ····· 92
参考文献 ····· 116

第 1 章 引 言

1.1 研究背景

构造全纯对象一直是多复变与复几何中的重要问题. 在一维的情况下, 因为对应的 Cauchy-Riemann 方程是恰定方程, 所以有很多的工具可以应用. 但是, 在高维情况下, 因为对应的 Cauchy-Riemann 方程是超定方程, 同样的工具并不适用. 在文献 [1] 中, Garabedian 和 Spencer 给出了一种方法, 可是这种方法在实施的过程中会有很多困难. 直到 1958 年, Morrey[2] 在这种方法中发现了证明 L^2 估计的一般方法. 他的方法分别被 Kohn[3] 和 Ash[4] 做了推广和简化. 在文献 [5] 中, Kohn 得到了关于边界正则性的一些结果, 这些结果的证明可以参考文献 [6]. 之后, Hörmander 在文献 [7] 中通过穷竭和逼近的方法避免了 Kohn 所讨论的边界正则性的问题, 这些方法在文献 [8] 和文献 [9] 中已经有所体现. 此外, Hörmander 还得到了平面区域上的 Morrey-Kohn 型不等式, 用 L^2 方法得到了 Andreotti 和 Grauert 在文献 [10] 中结果的新证明, 并且文献 [10] 中的结论还可以用来构造满足一定增长条件的全纯函数, 而利用经典的方法构造这种函数是不容易的. 现在, L^2 方法作为多复变与复几何中的一种统一的处理方法, 已经成功地应用于乘子理想、Kähler-Einstein 流形、全纯延拓以及全纯逼近等方面, 并得出了诸多结论, 如乘子理想层的解析凝聚性 [11]、乘子理想层的强开性质 [12]、多种 Oka-Weil 型稠密性定理 [13-15]、具有最优常数的 L^2 延拓定理 [16] 等. 最近, 以 L^2 理论的逆理论为代表的研究取得了丰硕的成果, 并获得了诸多应用, 如向量丛奇异度量及其消没定理等.

1.2 全纯逼近

全纯逼近理论在复分析、全纯动力系统、欧氏空间中的极小曲面以及其他相关的数学领域中有重要的应用. 全纯逼近提供了构造复流形之间具有特定性质的全纯映射的不可或缺的工具.

全纯逼近理论的源头可以追溯到 1885 年的两个经典定理, 其中一个是 Runge 定理, 这个定理考虑了有理函数逼近.

定理 1.2.1 (参考文献 [17]) 令 $K \subset \mathbb{C}$ 是一个紧集. 每一个定义在 K 的一个邻域上的全纯函数都可以被极点不在 K 中的有理函数一致逼近. 如果 $\mathbb{C} \setminus K$ 是连通的, 则可以被全纯多项式一致逼近.

定理 1.2.1 的一种证明方法是利用 Cauchy-Green 公式: 对于任何具有紧支集的函数 $f \in C_0^1(\mathbb{C})$,

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{z - \zeta} \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad z \in \mathbb{C}, \zeta = u + \mathrm{i}v. \tag{1.2.1}$$

这里 $\overline{\partial} f(\zeta) = (\partial f / \partial \overline{\zeta})(\zeta)$.

另一个重要的经典定理是 Weierstrass 定理的推广.

定理 1.2.2 (参考文献 [18]) 假设 f 是有界闭区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上的一个连续函数. 那么对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在多项式 $p(x)$ 使得对于任意的 $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

这个定理的一个复分析版本的推广是 Mergelyan 定理.

定理 1.2.3 (参考文献 [19]) 令 $K \subset \mathbb{C}$ 是一个紧集并且 $\mathbb{C} \setminus K$ 是连通的. 那么对于每一个在 K 上连续, 且在 K° 上全纯的函数 f 都可以在 K 上由全纯多项式一致逼近.

定理 1.2.3 可以看作定理 1.2.1 和定理 1.2.2 的推广. 但是在高维中, 定理 1.2.3 一般是不成立的. 但是更一般地有 Oka-Weil 定理.

定理 1.2.4 (参考文献 [20] 或 [21]) 如果 X 是一个 Stein 流形, $K \subset X$ 是一个全纯凸的紧子集, 那么每一个在 K 的一个邻域内全纯的函数都可以被 X 上的全纯函数一致逼近.

定理 1.2.4 最初是由 Cartan 延拓定理证明的. 在文献 [7] 中, Hörmander 用 L^2 方法证明了一个更加广泛的定理.

定理 1.2.5 (参考文献 [7] 或 [15]) 设 X 是一个 Stein 流形, ρ 是一个光滑的严格多次调和函数,

$$\Omega = \{z \in X : \rho(z) < 0\}$$

是一个相对紧区域, 并且在 $\partial\Omega$ 上 $\mathrm{d}\rho \neq 0$. 令 $\mathrm{d}V$ 是 X 上的一个光滑的体积形式, f 是 Ω 上的一个全纯函数并且

$$\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}V < \infty,$$

那么, 存在 X 上的全纯函数 $f_j (j = 1, 2, \cdots)$ 使得

$$\lim_{t \to \infty} \int_\Omega |f - f_j|^2 \, \mathrm{d}V = 0.$$

注意, 在定理 1.2.5 中, 一般不能要求 f 是 X 上的平方可积的全纯函数. 因为 X 上可能不存在非平凡的平方可积全纯函数. 于是, 在文献 [22] 中, Taylor 提出了一个问题: 如果在加权的情况下, 并且在权函数变动的情况下, 是不是有类似的稠密性结果? 他给出了如下结论.

定理 1.2.6 (参考文献 [22])　假设 $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的多次调和函数, $\varphi(z) = \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j(z)$, 并且假设对于任意的紧集 K, 有 $\int_K \exp(-\varphi_1)\mathrm{d}\lambda < \infty$, 那么

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A^2(\mathbb{C}^n, \varphi_j(z) + \log(1+|z|^2)).$$

Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{C}^n, \varphi(z)+\log(1+|z|^2))$ 中的闭包包含 $A^2(\mathbb{C}^n, \varphi(z)+\log(1+|z|^2))$. 其中 $A^2(\mathbb{C}^n, \varphi(z)+\log(1+|z|^2))$ 是在权函数 $\varphi(z)+\log(1+|z|^2)$ 下平方可积的全纯函数的集合.

最近, Fornaess 和 Wu 改进了定理 1.2.6, 参考文献 [23] .

定理 1.2.7 (参考文献 [23])　令 $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \varphi_3 \cdots$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的多重次调和函数. 设 $\varphi(z) = \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j(z)$, 那么对于任意的 $\epsilon > 0$, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A^2(\mathbb{C}^n, \varphi_j(z)+\epsilon\log(1+|z|^2))$ 在 $A^2(\mathbb{C}^n, \varphi(z)+\epsilon\log(1+|z|^2))$ 中稠密.

其他关于 C^k 拓扑或者 L^p 拓扑的介绍可以参考文献 [24]$\sim$ [30].

本书尝试改进定理 1.2.6 和定理 1.2.7 中的结果, 并且尝试找出一类区域使得 Taylor 在文献 [22] 中提出的稠密性问题是成立的. 具体地, 本书的主要结论如下.

定理 1.2.8　令 (X,ω) 是 Stein Kähler 流形, ω 是 X 上的 Kähler 度量, Ψ 是 X 上的一个有下界的多次调和穷竭函数. 令 L 是 X 上的一个全纯线丛, $\{h_k\}, h$ 是 L 上的 (奇异) 度量, 并且

(1) $\sqrt{-1}\Theta_{(L,h_k)} \geqslant 0$ 和 $\sqrt{-1}\Theta_{(L,h)} \geqslant 0$ (在 current 意义下);

(2) 对于任意的 $K_X \otimes L$ 的全纯截面 v, $|v|_{h_k,\omega}$ 单调递减收敛到 $|v|_{h,\omega}$,

那么 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A^2(X, K_X\otimes L, h_k\mathrm{e}^{-\Psi})$ 在 $A^2(X, K_X\otimes L, h\mathrm{e}^{-\Psi})$ 中稠密.

定理 1.2.8 可以覆盖定理 1.2.6 和定理 1.2.7, 且有如下推论.

推论 1.2.1　令 (X,ω) 是一个超凸的 Kähler 流形, ω 是 X 上的一个 Kähler 度量. 令 L 是 X 上的一个全纯线丛, $\{h_k\}, h$ 是 L 上的 (奇异) 度量, 并且

(1) $\sqrt{-1}\Theta_{(L,h_k)} \geqslant 0$ 和 $\sqrt{-1}\Theta_{(L,h)} \geqslant 0$ (在 current 意义下);

(2) 对于任意的 $K_X \otimes L$ 的全纯截面 v, $|v|_{h_k,\omega}$ 单调递减收敛到 $|v|_{h,\omega}$,

那么 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A^2(X, K_X\otimes L, h_k)$ 在 $A^2(X, K_X\otimes L, h)$ 中稠密.

上述推论说明了 Taylor 在文献 [22] 中提出的稠密性问题在超凸流形上是成立的.

1.3 非约化解析集上的 L^2 延拓

令 M 是一个复流形, $V \subset M$ 是一个解析簇, V 上定义的全纯函数或者全纯截面在 M 上的全纯延拓问题一直是多复变与复几何领域中的基本问题. 在 M 是 Stein 流形的情形下, 著名的 Cartan 定理保证了全纯延拓的存在性. 作为 Cartan 定理的推广, Ohsawa-Takegoshi L^2 延拓定理 [31] 考虑的是带有 L^2 条件的全纯函数或者全纯截面的延拓. Demailly [32] 把 Ohsawa-Takegoshi L^2 延拓定理推广到了弱拟凸流形. L^2 延拓定理有一系列应用, 如拟多次调和函数的 Demailly 逼近定理、Siu 的多亏格不变定理 [33]、Demailly 强开性猜想的解决 [12] 等.

在文献 [16] 中, 关启安教授和周向宇院士在 Stein 流形上得到了一个一般的具有最优估计的 L^2 延拓定理.

假设 M 是一个 n 维复流形, $S \subset M$ 是流形 M 的一个复子簇. 令 $\mathrm{d}V_M$ 是流形 M 上的一个连续. 我们考虑从流形 M 到区间 $[-\infty, A)$ 的函数 Ψ, 其中 $A \in (-\infty, +\infty]$, Ψ 满足下面的条件:

(1) $\Psi^{-1}(-\infty) \supset S$, 且 $\Psi^{-1}(-\infty)$ 是流形 M 的闭子集;

(2) 假设 S 在 $x \in S_{\mathrm{reg}}$ 附近是 l 维的 (S_{reg} 是子簇 S 的正则部分),

那么在点 x 处存在邻域 U 和上面的局部坐标 $(z_1, \cdots, z_n)$ 使得在 $S \cap U$ 上, 有 $z_{l+1} = \cdots = z_n = 0$, 并且

$$\sup_{U \setminus S} |\Psi(z) - (n-l)\log \sum_{l+1}^{n} |z_j|^2| < \infty.$$

我们把这样的函数 Ψ 称为极函数, 并且用集合 $\#_A(S)$ 来表示. 我们用记号 $\Delta_A(S)$ 表示极函数集合 $\#_A(S)$ 中的多次调和函数.

对于每一个 $\Psi \in \#_A(S)$, 我们都可以在 S_{reg} 上定义测度 $\mathrm{d}V_M[\Psi]$. $\mathrm{d}V_M[\Psi]$ 可被定义为满足下面条件的偏序集中的最小正测度 $\mathrm{d}\mu$:

$$\int_{S_l} f \mathrm{d}\mu \geqslant \limsup_{t \to \infty} \frac{2(n-l)}{\sigma_{2n-2l-1}} \int_M f \mathrm{e}^{-\Psi} \mathbb{I}_{\{-1-t<\Psi<-t\}} \mathrm{d}V_M,$$

其中 f 是任意的非负函数并且 $\mathrm{supp} f \Subset M$, $\mathbb{I}_{\{-1-t<\Psi<-t\}}$ 是集合 $\{-1-t<\Psi<-t\}$ 的特征函数. 下面我们用 S_l 表示 S_{reg} 的 l 维分支, σ_m 表示 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中单位球面的表面积.

设 $c_A(t)$ 是一个定义在 $(-A, +\infty)$ 上的光滑函数, 其中 $A \in (-\infty, +\infty]$, 并且满足

(1) $\left(\int_{-A}^{t} c_A(t_1)\mathrm{e}^{-t_1}\mathrm{d}t_1\right)^2 > c_A(t)\mathrm{e}^{-t}\int_{-A}^{t}\int_{-A}^{t_2} c_A(t_1)\mathrm{e}^{-t_1}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$;

(2) $\int_{-A}^{+\infty} c_A(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t < \infty$.

定理 1.3.1 (参考文献 [16]) 假设 M 是一个 Stein 流形, $S \subset M$ 是一个解析子簇, 函数 Ψ 是集合 $\Delta_A(S) \cap C^\infty(M \setminus S)$ 中的一个多次调和函数. 设 E 是流形 M 上秩为 r 的全纯向量丛, h 是向量丛 E 上的一个光滑 Hermite 度量. 假设 $h\mathrm{e}^{-\Psi}$ 在集合 $M \setminus S$ 上是 Nakano 正的 (当 E 是线丛的时候, h 也可以是半正的奇异度量), 于是存在一个一致的常数 $C = 1$, 使得对于 S 上 $K_M \otimes E|_S$ 的任意满足下面可积性条件

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k}{k!}\int_{S_{n-k}} |f|_h^2 \mathrm{d}V_M[\Psi] < \infty$$

的全纯截面 f, 都存在流形 M 中 $K_M \otimes E$ 的全纯截面 F 使得在 S 上, 有

$$F = f,$$

并且有估计

$$\int_M c_A(-\Psi)|F|_h^2 \mathrm{d}V_M \leqslant C\int_{-A}^{\infty} c_A(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k}{k!}\int_{S_{n-k}} |f|_h^2 \mathrm{d}V_M[\Psi].$$

进一步, 这里的一致常数 $C = 1$ 是最优的.

后来, 朱朗峰教授和周向宇院士合作得到了弱拟凸 Kähler 流形上的具有最优估计的 L^2 延拓定理 [34]. 具有最优估计的 L^2 延拓定理有着许多重要的应用, 包括 Berndtsson 关于相对 Bergman 核的对数多次调和性定理 [35]、Suita 猜想的完全解决 [16].

上面提到的一些结果主要考虑的是约化解析子集上的 L^2 延拓. 在文献 [32] 中, Demailly 得到了非约化解析子集上的 L^2 延拓结果, 并且提出了这样一个问题: 是否可以利用文献 [16] 中的方法得到一个类似的结果.

在本书中, 我们在 Stein 流形的情况下得到了上述 Demailly [32] 定理的一个最优估计版本. 这个推广的结果考虑了非约化解析子集上的 L^2 延拓, 其主要区别在于: 对于待延拓的函数或截面, 我们允许有更灵活的范数选取.

下面我们假设 Ψ 是复流形 M 上具有解析奇点的多次调和函数, 并且假设存在一串离散的跳跃数

$$0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_k < \cdots,$$

对于 $m \geqslant 0$, 令 $Y^{(m)} := V(\mathcal{I}(m\Psi))$. 注意, 凝聚层 $\mathcal{I}(m_k\Psi)/\mathcal{I}(m_{k+1}\Psi)$ 的支集 Z_{k+1} 是 $Y^{(m_{k+1})}$ 的一个约化解析子集. 因此, $\mathcal{I}(m_k\Psi)/\mathcal{I}(m_{k+1}\Psi)$ 可以被看作 Zariski 开集 $Z_{k+1}^{\circ} \subset Z_{k+1}$ 上的向量丛.

令 $\mathrm{d}V_M$ 是复流形 M 上的一个连续的体积形式, L 是复流形 M 上的一个 Hermite 全纯线从. 正如文献 [32] 那样, 对于一个给定的全纯截面

$$f \in H^0(Y^{(m_{k+1})}, \mathcal{O}_M(K_M \otimes L) \otimes \mathcal{I}(m_k\Psi)/\mathcal{I}(m_{k+1}\Psi)),$$

其中 K_M 是复流形 M 上的典则丛, 我们可以定义 L^2 测度

$$|f|^2\mathrm{d}V_M[m_{k+1}\Psi]$$

为满足条件

$$\int_{Z_{k+1}^{\circ}} g\mathrm{d}\mu \geqslant \limsup_{t\to\infty} \int_{\{x\in M:-1-t<\Psi<-t\}} \tilde{g}|\tilde{f}|^2\mathrm{e}^{-m_{k+1}\Psi}\mathrm{d}V_M$$

的正测度偏序集中的极小元素, 其中 $0 \leqslant g \in C_c(Z_{k+1}^{\circ})$, $\tilde{g} \in C_c(M)$ 是 g 的一个非负连续延拓, $\tilde{f}$ 是 f 在复流形 M 上满足条件 $\tilde{f} - f \in \mathcal{I}(m_{k+1}\Psi) \otimes_{\mathcal{O}_M} C^{\infty}$ 的光滑延拓.

定理 1.3.2 令 M 是 Stein 流形, $\mathrm{d}V_M$ 是 M 上的一个光滑的体积形式, 令 $\Psi < A$ (其中 $A \in (-\infty, +\infty]$) 是流形 M 上的具有解析奇点的多次调和函数. 设 $0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_k < \cdots$ 是关于 Ψ 的一个跳跃数序列. 令 L 是流形 M 上的全纯线从, 并且在 L 上有一个奇异 Hermite 度量 h 使得它的曲率算子 (分布意义下) 在 $M \setminus Y^{(m_{k+1})}$ 上满足

$$\sqrt{-1}\Theta_{(L,h)} \geqslant 0,$$

其中 $Y^{(m_{k+1})} = V(\mathcal{I}(m_{k+1}\Psi))$, 那么对于 $\mathcal{O}_M(K_M \otimes L) \otimes \mathcal{I}'(m_k\Psi)/\mathcal{I}(m_{k+1}\Psi)$ 限制在 $Y^{(m_{k+1})}$ 上的任意全纯截面 f, 并且 f 满足下面的可积性条件

$$\int_{Y^{(m_{k+1})}} |f|_h^2\mathrm{d}V_M[m_{k+1}\Psi] < +\infty,$$

在 M 上存在 $\mathcal{O}_M(K_M \otimes L) \otimes \mathcal{I}'(m_k\Psi)$ 的整体截面 F, 使得 F 在同态 $\mathcal{I}'(m_k\Psi) \to \mathcal{I}'(m_k\Psi)/\mathcal{I}(m_{k+1}\Psi)$ 下的像是 f, 且

$$\int_M |F|_h^2 c_A(-\Psi)\mathrm{d}V_M \leqslant \left(\int_{-A}^{+\infty} c_A(t)\mathrm{e}^{-m_{k+1}t}\mathrm{d}t\right) \int_{Y^{(m_{k+1})}} |f|_h^2\mathrm{d}V_M[m_{k+1}\Psi].$$

后面我们会看到, 上述定理中的估计是最优的.

利用这个推广的结果, 我们可以得到一类 jet 型的最优 L^2 延拓定理、一类推广的 Bergman 核取得下界的充分必要条件、一个关于 Riemann 曲面的刚性结果.

在文献 [36] 中, Suita 提出了一个比较 Bergman 核函数与对数容量的猜想. 令 Ω 是一个开 Riemann 曲面, 并且有一个非平凡的 Green 函数 G_Ω. 令 w 是 $z_0 \in \Omega$ 的邻域 V_{z_0} 中的局部坐标, 并且满足 $w(z_0) = 0$. 令 κ_Ω 是 Ω 上全纯 $(1,0)$ 形式的 Bergman 核. 我们定义

$$B_\Omega(z)|\mathrm{d}w|^2 := \kappa_\Omega(z)|_{V_{z_0}},$$

$$B_\Omega(z,\bar{t})\mathrm{d}w \otimes \mathrm{d}\bar{t} := \kappa_\Omega(z,\bar{t})|_{V_{z_0}}.$$

令 $c_\beta(z)$ 是 Riemann 曲面 Ω 的对数容量, 其局部定义为

$$c_\beta(z_0) := \exp\left\{\lim_{z_0 \to z}(G_\Omega(z,z_0) - \log|w(z)|)\right\}.$$

注意, 对数容量 c_β 是典则线丛 K_Ω 的度量.

Suita 猜想指的是对于任意开 Riemann 曲面 Ω,

$$(c_\beta(z_0))^2 \leqslant \pi B_\Omega(z_0). \tag{1.3.1}$$

在此之前, 很多学者都试图证明 Suita 猜想, Ohsawa 在文献 [37] 中发现了 L^2 延拓定理与 Suita 猜想之间的联系, 这也成了研究具有最优常数的 Ohsawa-Takegoshi 延拓定理的初衷之一. 证明 Suita 猜想的思想在文献 [38] 中就已经有所体现. 之后, 几乎在同一时间, Błocki 根据文献 [38] 的方法, 在文献 [39] 中证明了平面区域上的 Suita 猜想. 关启安和周向宇 [16] 利用最优常数 L^2 延拓定理证明了 Riemann 曲面上的 Suita 猜想. 更重要的是, 关启安和周向宇还证明了 Suita 猜想等号成立的必要条件是: Riemann 曲面 Ω 共形等价于单位圆盘 (去掉一个可能的内容量为零的集合). 对比式 (1.3.1) 中的不等号, 这个必要条件是更加难以建立的.

Bergman 引进了一种高阶导数的 Bergman 核. 这种 Bergman 核考虑了全纯函数的导数. 令 Ω 是一个 Riemann 曲面, $z_0 \in \Omega$ 为任意一点, 固定一个以 z_0 为中心的局部坐标, 定义

$$B_\Omega^{(k)}(z_0) = \sup\left\{\left|\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\right|^2 : f \in \mathcal{O}(\Omega),\ \int_\Omega f \wedge \bar{f} \leqslant 1, f(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0\right\}. \tag{1.3.2}$$

在文献 [40] 中, Błocki 在平面区域上给出了高阶导数的 Bergman 核函数的类似 Suita 猜想的下界估计:

$$K_{\Omega}^{(k)}(w) \geqslant \frac{k+1}{\pi}\left(c_{\beta}(w)\right)^{2k+2}, \quad k=0,1,2,\cdots. \tag{1.3.3}$$

本书应用文献 [16] 中的方法给出了式 (1.3.3) 中等号成立的必要条件. 更具体地说, 我们有如下定理.

定理 1.3.3 假设 Ω 是一个 Riemann 曲面并且具有非平凡的 Green 函数, $B_{\Omega}^{(k)}(z)$ 是 Ω 上的 k-阶导数的 Bergman 核. 于是,

$$B_{\Omega}^{(k)}(z) \geqslant \frac{k+1}{\pi}\left(c_{\beta}(z)\right)^{2k+2}, \quad k=0,1,2,\cdots.$$

进一步, 存在非负整数 k 和 $z_0 \in \Omega$ 使得 k-阶导数的 Bergman 核在 z_0 处使得上面不等式中等号成立的充分必要条件是: 在 Riemann 曲面 Ω 上存在全纯函数 g 使得在 z_0 点的 Green 函数 $G_{\Omega}(\cdot, z_0)$ 可以表示为

$$G_{\Omega}(\cdot, z_0) = \frac{1}{k+1}\log|g|.$$

注记 1.3.1 由文献 [16] 可知, 如果不等式 (1.3.3) 的等号对 $k=0$ 和某一个 Ω 中的点成立, 那么 Ω 共形等价于单位圆盘 (去掉一个可能的内容量为零的集合). 特别地, 对于所有的 $k \in \mathbb{N}$, 不等式 (1.3.3) 的等号也成立. 然而, 对于高阶导数的 Bergman 核, 当 $k \geqslant 2$ 时, 并不能由不等式 (1.3.3) 的等号在一点处成立得到 Ω 共形等价于单位圆盘 (去掉一个可能的内容量为零的集合).

本书部分结果参考自文献 [41]~[42].

第 2 章　预 备 知 识

我们将在这一章介绍一些多复变函数论最基本的概念, 包括多次调和函数、拟凸域与全纯域、解析集、Stein 流形、Bergman 核等.

2.1　次调和函数与多次调和函数

次调和函数是解决平面区域上 Dirichlet 方程的重要工具, 是由 Hartogs [43] 首先引入的. 多次调和函数由 Oka 在研究 Levi 问题时引入 (几乎同时, Lelong 也独立地提出了多次调和函数的概念), 是多复变中最重要的概念之一, 也是研究复流形的一种不可或缺的工具. Oka 引入多次调和函数之后, 成功地用其刻画了多复变中另一个非常重要的对象——全纯域, 从而解决了著名的 Levi 问题. 此外, 由于多次调和函数具有一种天然的正性, 其自然地将多复变与复微分几何、复代数几何等领域联系在了一起. 多复变中的拟凸性是与多次调和函数直接相关的一种区域的凸性, 其与全纯凸性之间深刻的关系很早就为 Levi 所认识, 由实函数定义的拟凸性与由全纯函数定义的全纯凸性的等价性无疑是多复变中最精彩的结果之一. 在本节中, 我们仅介绍一些相关的基本知识.

定义 2.1.1　设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个开集. Ω 上的函数 $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 称为次调和函数 (subharmonic function), 如果 u 满足下面的条件:

(1) u 是上半连续的;

(2) u 满足次平均值不等式, 即对于任意的 $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, 如果圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \Subset \Omega$, 那么

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \tag{2.1.1}$$

我们把 Ω 上的次调和函数的全体记为 $\mathrm{SH}(\Omega)$.

多次调和函数是多复变函数论中特有的研究对象. 简单地说, 多次调和函数限制在每一条复直线上都是一个次调和函数.

定义 2.1.2　设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个开集. Ω 上的函数 $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 称为多次调和函数 (plurisubharmonic function), 如果 u 满足下面的条件:

(1) u 是上半连续的;

(2) u 限制在任何复直线与 Ω 的交集上都是次调和的, 即对于任意的 $z_0 \in \Omega$ 和 $w \in \mathbb{C}^n$, u 限制在 $\{z_0 + tw | t \in \mathbb{C}\} \cap \Omega$ 上是 t 的次调和函数.

我们把 Ω 上的多次调和函数的全体记为 $\mathrm{PSH}(\Omega)$.

定义 2.1.3 区域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的一个多次调和函数 u 称为强多次调和函数 (strictly plurisubharmonic function), 如果对于 Ω 上任意的具有紧支集的 C^2 函数 $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于任意满足 $|t| < \varepsilon$ 的实数 t, $u + t\rho$ 都是多次调和的.

区域 Ω 上的强多次调和函数的全体记为 $\mathrm{SPSH}(\Omega)$.

事实上, 次调和函数和多次调和函数的许多性质都是类似的. 我们知道, 对于 Ω 上的实值 C^2 函数 u, u 是次调和或者强次调和的, 当且仅当 u 的复 Hessian 矩阵在每个点的迹是非负的或者正的. 对于多次调和函数, 我们的要求更强, 即每个特征值都是非负的或者正的.

对于 Ω 上的实值 C^2 函数 $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, u 是 (强) 欧氏凸的, 当且仅当 f 的实 Hessian 矩阵在每个点都是半正定 (正定) 的. 对于多次调和函数, 我们也有类似的性质, 具体如下.

定理 2.1.1 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个区域且 $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, u 是 (强) 多次调和的当且仅当 u 的 Levi 形式 (Levi form)

$$L_z(u) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad \xi \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z_k}}(z) \xi_i \overline{\xi_j}$$

对于任意点 $z \in \Omega$ 都是半正定 (正定) 的.

事实上, 对于局部可积的上半连续函数, 也有类似的性质.

定理 2.1.2 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个区域, u 是 Ω 上的一个多次调和函数, 那么对于任意的 $\xi \in \mathbb{C}^n$,

$$Lu(\xi) := \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \xi_j \bar{\xi}_k \in \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.1.2}$$

是个正测度.

我们下面不加证明地列出一些多次调和函数的性质, 请参考文献 [13] 和 [15].

定理 2.1.3 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个区域, u 及序列 $\{u_k\}$ 都是从 Ω 到 $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 的映射.

(1) u 在 Ω 中是 (强) 多次调和的, 当且仅当 u 在 Ω 中任意一点的一个开邻域中是 (强) 多次调和的.

(2) 如果 u_1, u_2 是 (强) 多次调和的, c_1, c_2 是两个正实数, 则 $c_1u_1 + c_2u_2$ 是 (强) 多次调和函数.

(3) 如果 $\{u_k\}$ 是一个单调递减或者紧一致收敛的多次调和函数序列, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} u_k$ 是多次调和的.

(4) 如果 $\{u_k\}$ 是一列局部一致上有界的多次调和函数, 且 $\sup\limits_k u_k$ 是上半连续的, 则 $\sup\limits_k u_k$ 是多次调和的.

(5) 如果 $u_1, \cdots, u_p \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ 且 $\chi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ 是关于每个变量 t_j 单调递增的凸函数, 那么, $\chi(u_1, \cdots, u_p) \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. 特别地, $u_1 + \cdots + u_p$, $\max\{u_1, \cdots, u_p\}$, $\log(\mathrm{e}^{u_1} + \cdots + \mathrm{e}^{u_p})$ 都是 Ω 上的多次调和函数.

(6) 极大模原理: 如果 $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ 且存在某个 $z_0 \in \Omega$ 使得 $u(z_0) = \sup\limits_{z\in\Omega} u(z)$, 则 u 在 Ω 上是常数.

下面的命题告诉我们多次调和函数是局部可积的.

命题 2.1.1　设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个区域. 如果 u 是 Ω 上的多次调和函数并且 $u \not\equiv -\infty$, 那么 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 特别地,

$$\{z \in \Omega : u(z) = -\infty\}$$

是 Lebesgue 零测集.

证明　因为 $u \not\equiv -\infty$, 所以存在 $z \in \Omega$ 使得 $u(z) > -\infty$. 取一个以 z 为圆心且包含在区域 Ω 内的小球 $B(z, r)$. 因为 u 是多次调和的, 所以有

$$-\infty < u(z) < \frac{1}{\sigma_{2n} r^{2n}} \int_{B(z,r)} u \mathrm{d}V,$$

其中 σ_{2n} 是实 $2n$ 维单位球的体积. 因为 u 是上半连续的, 所以 u 在 $B(z, r)$ 有上界, 于是

$$\int_{B(z,r)} u \mathrm{d}V$$

是存在的. 这就说明了 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

令

$$E = \{z \in \Omega;\ u \text{ 在 } z \text{ 的一个邻域内可积}\}.$$

显然 E 是一个非空开集. 如果 $a \in \Omega \setminus E$, 那么存在一个 a 的邻域使得 u 在这个邻域上等于负无穷. 因此 $\Omega \setminus E$ 也是开集. 又因为 Ω 是一个区域, 所以 $\Omega = E$. □

引理 2.1.1 假设 u 是圆盘 $\{|z-a|<\rho\}$ 上的次调和函数, 那么

$$A(u,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$

在区间 $0<r<\rho$ 上是不减的.

证明 设 $\Delta(r)=\{|z-a|<r\}$, 并且假设 $0<r_1<r_2<\rho$. 假设函数 φ 是 $\partial\Delta(r_2)$ 上的连续函数, 并且在 $\partial\Delta(r_2)$ 上满足 $\varphi\geqslant u$. 根据 Dirichlet 问题的解, 我们可以假设 φ 是 $\overline{\Delta(r_2)}$ 上的连续函数并且在 $\Delta(r_2)$ 上是调和的. 根据平均值性质,

$$A(\varphi,r)=\varphi(a),$$

其中 $r<r_2$. 根据 u 的次调和性质, 我们可以知道在 $\Delta(r_2)$ 上, $u\leqslant\varphi$. 因此

$$A(u,r_1)\leqslant A(\varphi,r_1)=A(\varphi,r_2).$$

于是

$$A(u,r_1)\leqslant\inf\left\{A(\varphi,r_2):\varphi\in C(\Delta(r_2))\text{ 并且在}\partial\Delta(r_2)\text{ 上}\varphi\geqslant u\right\}=A(u,r_2).\qquad\square$$

下面的定理说明: 一般的多次调和函数可以用光滑的多次调和函数进行一定意义下的逼近.

定理 2.1.4 设集合 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, $D_j=\{z\in D:|z|<j\}\cap\left\{\delta_D(z)>\dfrac{1}{j}\right\}$. 假设函数 u 是区域 D 上的多次调和函数并且不恒等于 $-\infty$, 那么存在函数列 $\{u_j\}\subset C^\infty(D)$ 且

(1) 函数 u_j 在区域 D_j 上是强多次调和的;

(2) 对于 $z\in D_j$, $u_j(z)\geqslant u_{j+1}(z)$;

(3) 对于 $z\in D$, $\lim\limits_{j\to\infty}u_j(z)=u(z)$;

(4) 如果函数 u 是连续的, 那么 (3) 中的收敛是内闭一致收敛.

证明 假设函数 $\varphi\in C_c^\infty(B(0,1))$, 其中 $B(0,1)$ 是以 0 为圆心, 1 为半径的球. 我们还假设 $\varphi\geqslant0$, φ 是径向函数, 也就是对于任意的两点 z 和 z', 只要 $|z|=|z'|$, 就有

$$\varphi(z)=\varphi(z').$$

根据上面的结果, 我们知道对于每一个 $j=1,2,\cdots$, $u\in L^1(D_j)$, 于是, 对于任意的 $z\in\mathbb{C}^n$, 卷积

$$v_j(z)=\int_{D_j}u(\zeta)\varphi(j(z-\zeta))j^{2n}\mathrm{d}V(\zeta)$$