弘深 科学技术文库

泛函方程的稳定性

STABILITY OF FUNCTIONAL EQUATIONS

王志华 著

重庆大学出版社

泛函方程的稳定性

王志华 著

重庆大学出版社

内容提要

本书基于作者近些年关于泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性研究工作的成果整理而成. 本书较为系统地研究了在不同空间结构上的几类泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性问题. 本书共6章. 第1章介绍 Hyers-Ulam 稳定性有关概念及其相关问题的研究进展. 第2章研究可加泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性. 第3章研究两类 Jensen 型二次泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性. 第4章研究混合型二次与四次泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性及其在相关空间中的应用. 第5章研究混合型可加、三次与四次泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性. 第6章研究两类三次模糊集值泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性.

本书可供数学专业高年级本科生、研究生、教师作为科研素材使用,也可供相关科研人员和数学爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

泛函方程的稳定性/王志华著. --重庆:重庆大学出版社,2023.7

ISBN 978-7-5689-3937-9

Ⅰ.①泛… Ⅱ.①王… Ⅲ.①泛函方程—研究 Ⅳ.①O177

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第119428号

泛函方程的稳定性

FANHAN FANGCHENG DE WENDINGXING

王志华 著

策划编辑:杨粮菊

责任编辑:杨育彪 版式设计:杨粮菊

责任校对:王 倩 责任印制:张 策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:饶帮华

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:720mm×1020mm 1/16 印张:9.25 字数:133千

2023年7月第1版 2023年7月第1次印刷

ISBN 978-7-5689-3937-9 定价:78.00元

前　言

稳定性是泛函方程理论的重要研究课题之一，在数学与自然科学中占据着重要的地位，在动力系统、控制论、数学物理、生物数学及经济决策等领域都有着十分重要的应用. 对稳定性的研究始于一个多世纪以前，稳定性就是未知量对已知量的依赖关系. 在具体的数学物理或工程技术理论应用中，对不同类型的方程及其相关的应用背景，需要考虑不同类型的稳定性，比如渐近稳定性、全局稳定性、迭代稳定性、Hyers-Ulam 稳定性及超稳定性等. 同一个方程可以同时具有多种形式的稳定性.

近些年，随着非线性科学的发展及泛函方程理论的进一步深入，泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性问题逐渐成为众多数学学者关注的一个重要的研究方向，且取得了大量的研究成果，尤其是不同空间结构上的不同类型的泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性研究. 作者从事这个方向的研究工作多年，本书的主要内容基本是作者近些年来的研究成果.

本书较为系统地研究了在不同空间结构上的几类泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性问题，其中主要包括可加泛函方程、两类 Jensen 型二次泛函方程、两类混合型泛函方程、两类三次集值泛函方程等. 应用的方法主要是直接法与不动点的择一性方法. 本书力求结构分明，内容简洁明了，不仅在主要定理的证明上尽可能详细、严密并突出主要的思想方法，而且还编写了必要的入门专业基础知识. 每一章基本独立，但彼此之间有联系. 全书共分 6 章.

第 1 章对 Hyers-Ulam 稳定性问题的起源、研究背景与意义和研究进展进行了简要系统的介绍，内容主要包括 Hyers-Ulam 稳定性问题的起源、研究背景与意义，泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性与超稳定性，以及微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性等相关问题的研究进展，其主要目的是让读者从宏观上能够把握稳定性

问题研究的几个重要方面.

第 2 章研究 non-Archimedean 随机 C^*-代数上更一般的可加泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性. 本章通过构造完备的广义度量空间,利用不动点的择一性方法证明了更一般的可加泛函方程在 non-Archimedean 随机 C^*-代数上的同态与导子 Hyers-Ulam 稳定性. 同时应用所获得的稳定性相关定理的结果进一步讨论了可加泛函方程在 non-Archimedean 随机 Lie C^*-代数上的同态与导子 Hyers-Ulam 稳定性问题.

第 3 章研究直觉模糊赋范空间上两类 Jensen 型二次泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性. 在本章中,首先介绍了直觉模糊赋范空间的定义及有关结果. 其次在针对映射 f 满足偶函数的情形下,研究了两类 Jensen 型二次泛函方程中之一的泛函方程在直觉模糊赋范空间上的 Hyers-Ulam 稳定性,进而针对映射 f 在没有奇偶性条件假设的情形下,在直觉模糊赋范空间上对这两类方程 Jensen 型二次泛函方程的稳定性也分别进行了研究.

第 4 章研究 non-Archimedean 模糊赋范空间上混合型二次与四次泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性. 本章在给出 non-Archimedean 模糊赋范空间的概念及有关结果的基础上,利用直接法研究了混合型二次与四次泛函方程在 non-Archimedean 模糊赋范空间上的 Hyers-Ulam 稳定性. 本章还通过弱化定理的条件,将所获得的稳定性的结果应用到 non-Archimedean 赋范空间中进一步讨论了该泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性,且通过例子说明定理中的有关条件对保证泛函方程具备 Hyers-Ulam 稳定性是不可缺的.

第 5 章研究不同类型的矩阵赋范空间上混合型可加、三次与四次泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性. 在本章中,首先引入矩阵赋范空间与矩阵模糊赋范空间的定义及相关结果. 利用直接法在矩阵赋范空间上研究了混合型可加、三次与四次泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性,并利用不动点的择一性方法分别在矩阵赋范空间与矩阵模糊赋范空间上讨论了该泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性,改进了所获得的稳定性结果,得到了稳定性更好的误差估计.

第6章研究两类三次模糊集值泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性. 本章首先介绍 Hausdorff 度量与模糊集的概念及相关性质,且借助于 Jensen 型三次泛函方程和 n 维三次泛函方程,引入两类三次模糊集值泛函方程的定义,进而利用不动点的择一性方法分别研究 Jensen 型三次模糊集值泛函方程和 n 维三次模糊集值泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性,所得到的结果可分别作为单值泛函方程和集值泛函方程的稳定性推广.

衷心感谢内江师范学院石勇国教授对本书内容顺利完成的帮助. 本书的出版与湖北工业大学相关部门的领导在各方面对我极大的帮助和支持是分不开的,在此向他们表示诚挚的感谢。

本书的出版得到了国家自然科学基金项目(11401190)的经费资助,课题内容曾获得湖北省教育厅科研项目(D20161401)和湖北工业大学高层次人才科研启动项目(BSQD12077)的资助,特此说明并致谢。

囿于作者的学识水平和视野,书中难免有不妥之处,敬请广大专家、学者批评指正.

王志华

2022年6月

目 录

第1章　绪　论

本章简要地介绍了 Hyers-Ulam 稳定性问题的起源、研究背景与意义及有关研究进展、本书研究工作的主要内容. 具体内容包括 Hyers-Ulam 稳定性问题的起源、研究背景与意义,泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性与超稳定性,以及微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性等相关问题的研究进展.

1.1　Hyers-Ulam 稳定性

在数学的诸多研究领域中,具备某种"特定性质"的研究对象往往难以真正找到,那么,在目标对象"附近"是否存在具备这种"特定性质"或具备与这种"特定性质"近似的数学对象? 若存在的话,成立的条件又是什么? 如果把注意力转向泛函方程,我们就可以把这一问题特殊化:在何种情况下,和给定方程存在"微小"差别的方程的解一定接近于给定方程的解? 换言之,如果尝试用一个泛函不等式逼近某一泛函方程,在什么条件下才能使这个泛函不等式的近似解的附近领域内存在这个泛函方程的解?

上面所提到的问题就是泛函方程的一种重要稳定性:Hyers-Ulam 稳定性. 它刻画了一种特殊的近似解与精确解之间的逼近与跟踪依赖程度关系,且与伪轨跟踪、密码学、混沌控制及误差分析等相关问题有着密切的关联. 1940 年,在威斯康星(Wisconsin)大学举行的数学会议上,数学家 Ulam[236] 首次提出了如下关于群同态的稳定性问题:

给定一个群 G_1，一个度量群 $(G_2,\cdot,\rho)$ 以及一个正常数 ε，我们问：是否存在一个依赖于 ε 的常数 $\delta>0$，使得映射 $f:G_1\to G_2$ 对所有的 $x,y\in G_1$ 都满足不等式 $\rho(f(xy),f(x)f(y))\leqslant\delta$，则存在一个同态 $g:G_1\to G_2$ 使得对所有 $x\in G_1$，不等式 $\rho(f(x),g(x))\leqslant\varepsilon$ 成立？

上述问题通常被称为 Ulam 问题，如果 Ulam 问题的答案是肯定的，那么我们就称 $g:G_1\to G_2$ 是稳定的，或称关于同态的 Cauchy 方程 $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ 是稳定的.

1941 年，Hyers[67] 通过证明可加 Cauchy 泛函方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 在 Banach 空间上的 Hyers-Ulam 稳定性这一结果，最早且非常成功地回答了 Ulam 问题，得到了泛函方程的稳定性问题的最初结果. 具体地说，Hyers 的结果证明了下面关于群同态的稳定性定理：

定理 1.1.1 设 $\delta>0$，$f:X\to Y$ 是从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 中的一个映射，若对任意的 $x,y\in X$ 都满足不等式

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|\leqslant\delta, \tag{1.1.1}$$

则对任意的 $x\in X$ 有极限

$$A(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f(2^n x) \tag{1.1.2}$$

存在，且存在唯一的可加映射 $A:X\to Y$ 满足

$$\|f(x)-A(x)\|\leqslant\delta,\ \forall x\in X. \tag{1.1.3}$$

在这种意义下，称可加 Cauchy 泛函方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 在空间偶对 (X,Y) 上具有 Hyers-Ulam 稳定性，或者称可加 Cauchy 泛函方程在 Hyers 和 Ulam 意义下是稳定的.

Hyers 证明定理 1.1.1 所提出的构造可加映射 A 的方法称为“直接法”，又称为“Hyers 序列法”. 该方法作为研究各种类型泛函方程的稳定性是非常有力的证明工具之一，被众多学者广泛应用，且这一稳定性的提出极大地促进了其在泛函方程领域的推广和研究. 有关此主题的文章不断涌现见文献[47,51,71,

73,94,202,204]. 它们从不同方向推广了 Ulam 问题和 Hyers 定理. 1978 年, Rassias[202]在弱化 Cauchy 差分的有界性条件下,给出了 Ulam 问题另一个更一般化的解答,拓深了 Hyers 定理的结果.

定理 1.1.2 设 $f:X\to Y$ 是从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 中的一个映射,如果存在 $\theta\geqslant 0, 0\leqslant p<1$,使得

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|\leqslant \theta(\|x\|^p+\|y\|^p), \forall x,y\in X, \tag{1.1.4}$$

那么存在唯一的可加映射 $A:X\to Y$ 满足

$$\|f(x)-A(x)\|\leqslant \frac{2\theta}{2-2^p}\|x\|^p, \forall x\in X. \tag{1.1.5}$$

进而,若对任意给定的 $x\in X$, $f(tx)$ 在 $t\in\mathbb{R}$ 连续,则 A 是线性的.

鉴于 Ulam, Hyers, Rassias 的结果对泛函方程的稳定性发展起到了很大的推动作用,在这种意义下,称可加 Cauchy 泛函方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 在空间偶对 (X,Y) 上具有 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性,或者称为具有广义的 Hyers-Ulam 稳定性. 事实上, Hyers-Ulam 稳定性是 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性的一种特殊情况.

定理 1.1.2 是对定理 1.1.1 进行了较大的推广,同时也引起了众多数学家对泛函方程的稳定性问题的关注. Aoki[5]给出了 Rassias 定理的一个特殊情形,利用直接法给出了可加映射的稳定性证明,但是 Aoki 没有给出 Rassias 在定理 1.1.2 中最后提及的关于线性映射的稳定性断言的证明. Rassias[203]注意到该定理的证明也适合 $p<0$ 的情形,且问是否有对 $p\geqslant 1$ 的情形这样的定理也可以被证明? 1991 年, Gajda[52]通过对式(1.1.2)进行了稍微的修改,回答了 Rassias 对 $p>1$ 的情形,同时通过构造一个反例证明了此定理对 $p=1$ 这一临界值情形是不成立的. Găvruta[53] 进一步推广了 Rassias 上述定理的结果: 假设 G 是一 Abelian 群和 Y 是一 Banach 空间,映射 $\varphi:G\times G\to[0,\infty)$满足

$$\Phi(x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j+1}}\varphi(2^jx,2^jy)<\infty, \forall x,y\in G.$$

如果映射 $f:G\to Y$ 满足不等式

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leqslant \varphi(x,y), \forall x,y \in G,$$

那么存在唯一的可加映射 $A: G \to Y$ 满足

$$\|f(x)-A(x)\| \leqslant \Phi(x,x), \forall x \in G.$$

在这种意义下,称可加 Cauchy 泛函方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 在 (G,Y) 上具有 Hyers-Ulam-Găvruta-Rassias 稳定性,或者直接称为具有 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性.

随后,各种类型泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性被广泛研究,Cauchy 泛函方程的稳定性伴随着 Hyers-Ulam 稳定性的研究而发展,其原始的 Ulam 问题得到了推广,并且随着对 Hyers-Ulam 稳定性研究的逐渐深入,Hyers-Ulam 稳定性这一概念也被进一步推广[83,91,118,119,120,142],相继出现了多种稳定性概念,比如 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性、Ger 意义下的稳定性、限制区域上的稳定性及超稳定性等. 自然地,可以把 Hyers-Ulam 稳定性的概念推广到更为一般化的泛函方程上去. 如同文献[117]中所述,若泛函方程

$$F_1(\varphi)=F_2(\varphi), \tag{1.1.6}$$

对任意满足

$$|F_1(\varphi_s)(x)-F_2(\varphi_s)(x)| \leqslant \delta$$

的近似解 φ_s,方程(1.1.6)都存在解 φ 使得

$$|\varphi(x)-\varphi_s(x)| \leqslant \varepsilon,$$

其中 $\delta \geqslant 0, \varepsilon > 0$ 为常数且 ε 依赖于 δ,则称方程(1.1.6)具有 Hyers-Ulam 稳定性. 若对任意满足不等式

$$|F_1(\varphi_s)(x)-F_2(\varphi_s)(x)| \leqslant \psi(x)$$

的近似解 φ_s,方程(1.1.6)都存在解 φ 满足

$$|\varphi(x)-\varphi_s(x)| \leqslant \Phi(x),$$

其中 $\psi(x)$,$\Phi(x)$ 为给定函数且 $\Phi(x)$ 依赖于 $\psi(x)$,则称方程(1.1.6)具有广义 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性. 若对任意满足不等式

$$\left|\frac{F_1(\varphi_s)(x)}{F_2(\varphi_s)(x)}-1\right| \leqslant \psi(x)$$

的近似解 φ_s，方程(1.1.6)都存在解 φ 满足

$$\alpha(x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{\varphi_s(x)} \leqslant \beta(x),$$

其中 $\psi(x)$，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 为给定函数且 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 依赖于 $\psi(x)$，则称方程(1.1.6)具有 Ger 意义下的稳定性. 按在文献[12]中所述，对任意满足不等式

$$|F_1(\varphi)(x) - F_2(\varphi)(x)| \leqslant \delta$$

的解 φ，若 φ 无界意味着 φ 为方程(1.1.6)的真解，即 $F_1(\varphi)(x)-F_2(\varphi)(x)=0$，则称方程(1.1.6)具有超稳定性.

另一方面，近些年来，关于泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性的研究成果层出不穷，出现了诸多内涵相同的表述泛函方程的稳定性概念，为了更好地将各种类型泛函方程的稳定性统一起来，Jung 在文献[109]中也曾引入如下泛函方程的稳定性定义.

定义 1.1.1 (cf. [109]). 设 E_1 和 E_2 是两个适当的空间，$p,q \in \mathbb{N}$，$i \in 1,\cdots,p$，且

$$g_i: E_1^q \to E_1 \quad \text{和} \quad G: E_2^p \times E_1^q \to E_2$$

为定义在对应空间上的映射. 设 $\phi,\Phi: E_1^q \to [0,\infty)$ 是满足某些给定条件的两个映射，对任意的 $x_1\cdots,x_q \in E_1$，映射 $f: E_1 \to E_2$ 满足不等式

$$\|G(f(g_1(x_1,\cdots,x_q)),\cdots,f(g_p(x_1,\cdots,x_q)),x_1,\cdots,x_q)\| \leqslant \phi(x_1,\cdots,x_q). \quad (1.1.7)$$

如果对每一个满足式(1.1.7)的映射 f，对任意的 $x_1\cdots,x_q \in E_1$ 都存在一个映射 $H: E_1 \to E_2$ 使得

$$G(H(g_1(x_1,\cdots,x_q)),\cdots,H(g_p(x_1,\cdots,x_q)),x_1,\cdots,x_q) = 0,$$

且对任意的 $x \in E_1$，有

$$\|f(x) - H(x)\| \leqslant \Phi(x,\cdots,x) \quad (1.1.8)$$

成立，那么称泛函方程

$$G(f(g_1(x_1,\cdots,x_q)),\cdots,f(g_p(x_1,\cdots,x_q)),x_1,\cdots,x_q) = 0 \quad (1.1.9)$$

在 (E_1,E_2) 上具有 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性，或者称泛函方程(1.1.9)在

Hyers, Ulam 和 Rassias 意义下是稳定的.

在定义 1.1.1 中,若用 δ 和 $K\delta$ 分别代替式(1.1.7)及式(1.1.8)中的 $\phi(x_1,\cdots,x_q)$ 与 $\Phi(x,\cdots,x)$,则称泛函方程(1.1.9)在(E_1,E_2)上具有 Hyers-Ulam 稳定性.

1.2 Hyers-Ulam 稳定性的研究进展

Hyers-Ulam 稳定性作为泛函方程的一种重要的稳定性,是泛函方程理论研究中的重要热点问题之一,愈加受到学者们的关注,激励了众多学者的深入探索和研究,出现了诸多关于泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性方面的有价值研究成果[16,39,56,71,79,94,166,167,183,184,200,207].

关于泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性研究,主要集中在单变量泛函方程与多变量泛函方程. 大量的稳定性研究结果主要是针对多变量泛函方程的,而对单变量泛函方程的稳定性的结果却相对较少. 随着对单变量泛函方程研究的深入,相应稳定性结果也不断涌现,并已取得了一些有意义的成果(可见文献[14,22,24,25,49,78,84,85,87,117,141,234,235]). 文献[245]较为详细地研究了非线性迭代泛函方程

$$G(f(x),f^2(x),\cdots,f^n(x))=F(x) \tag{1.2.1}$$

的 Hyers-Ulam 稳定性,并对多项式型迭代泛函方程

$$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)+\cdots+\lambda_n f^n(x)=F(x) \tag{1.2.2}$$

的 Hyers-Ulam 稳定性也进行了讨论. 随后,在文献[1]中给出了包含线性泛函方程、非线性泛函方程和迭代方程等单变量泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性的研究成果. 2007 年,徐冰和张伟年[246]对多项式迭代方程

$$f^m(x)=\lambda_{m-1}f^{m-1}(x)+\cdots+\lambda_1 f(x)+F(x) \tag{1.2.3}$$

的首项系数问题进行了研究,给出了连续解的构造及其稳定性,并讨论了迭代根的 Hyers-Ulam 稳定性. 差分方程可以看成是离散型的单变量泛函方程. 2005

年，Popa[193]研究了一阶变系数线性差分方程

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n$$

的 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性. 借助文献[193]所获得的结果，Popa[194]针对 p 阶常系数线性差分方程

$$x_{n+p} = a_1 x_{n+p-1} + \cdots + a_p x_n + b_n$$

的 Hyers-Ulam 稳定性进行了进一步的研究. 文献[20,21,23,168]也对线性差分方程与非线性差分方程的 Hyers-Ulam 稳定性进行了详细的研究.

有关多变量泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性研究的文章相比单变量泛函方程要多很多，因此相继出现了一些关于研究多变量泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性的文章综述：Hyers[68]发表了关于等距的稳定性的综述，随后 Hyers 与 Rassias[69]合作又发表了关于同胚的稳定性的综述，进而，Forti[48]发表了多变量泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性的综述，其间概括了发表于 1980—1995 年的大量相关文章中的结果. 2000 年，Rassias[208]发表了关于多变量泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性、Hyers-Ulam-Rassias 稳定性、Ger 意义下的稳定性、限制区域上的稳定性以及超稳定性的综述. 2009 年，Moszner[169]又发表了关于泛函方程的稳定性的综述. 针对多变量泛函方程的稳定性的研究，从泛函方程的具体类型来讲，主要是关于 Cauchy、Jensen、二次、三次及四次等类型泛函方程的研究. Rassias[205,206]等人研究了 Cauchy 泛函方程的稳定性. 关于 Cauchy 泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性更为深入、更一般化的研究成果也可见文献[55,74,88,198]，并且这些研究成果也已被应用到非线性分析中一些重要问题的研究上，比如非线性映射在锥上不动点的存在性问题研究. Jung 等人在文献[90,133]中研究了 Jensen 泛函方程

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y) \tag{1.2.4}$$

的稳定性，且 Faĭziev 和 Riede[46]在半群上对 Jensen 泛函方程(1.2.4)的稳定性也进行了研究. 关于二次泛函方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \tag{1.2.5}$$

的稳定性问题,Skof[223]首次针对从赋范空间到 Banach 空间的映射 f 研究了二次泛函方程(1.2.5)的稳定性. 之后,Cholewa[33]利用交换群代替赋范空间进一步推广了 Skof 在文献[223]中的结果,并且 Czerwik 在文献[38]中对二次泛函方程(1.2.5)的稳定性也给出了详细的研究. 此外,有关其他类型的二次泛函方程(如:Deeba 二次泛函方程、Pexider 型二次泛函方程等)的 Hyers-Ulam 稳定性的研究更多成果可见文献[43,89,92,93]. Jun 和 Kim[80]给出了三次泛函方程

$$f(2x+y)+f(2x-y)=2f(x+y)+2f(x-y)+12f(x) \tag{1.2.6}$$

的通解且在 Banach 空间上研究方程(1.2.6)的 Hyers-Ulam 稳定性. 然而,文献[34,81,82,171,175,176,190]中关于某些其他类型的三次泛函方程的通解及其稳定性问题也得到了很好的研究. Lee,Im 和 Hwang[140]及 Najati[172]研究了四次泛函方程

$$f(2x+y)+f(2x-y)=4f(x+y)+4f(x-y)+24f(x)-6f(y) \tag{1.2.7}$$

的通解及其稳定性. Lee 和 Chung[139],Kang[111]和 Rassias[199]也对其他类型的四次泛函方程做了进一步的研究工作.

然而,关于其他类型泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性也逐渐地开展了一些研究,取得了非常多的新研究成果,主要包括:五次泛函方程与六次泛函方程的一般解及其稳定性[248]、2-变量可加泛函方程的一般解及其稳定性[10,211]、3-变量二次泛函方程的一般解及其稳定性[212]、2-变量三次泛函方程的一般解及其稳定性[213]等. 此外,文献[15,57,232,180,229]对 Hosszú's 泛函方程、指数方程、对数泛函方程、Pexider 泛函方程及正弦和余弦泛函方程等泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性问题进行了相应的研究. 最近,有关混合型多变量泛函方程(如:混合型可加与二次泛函方程,混合型可加与三次泛函方程,混合型二次与四次泛函方程,混合型三次与四次泛函方程,混合型可加、二次与三次泛函方程,混合型可加、三次与四次泛函方程等)的稳定性也在文献[30,60,61,62,64,173,174]中

得到了研究,同时在不同空间上(如:模糊赋范空间、概率赋范空间、随机赋范空间、直觉模糊赋范空间、non-Archimedean 随机赋范空间及矩阵赋范空间等空间结构)对各种不同类型多变量泛函方程的 Hyers-Ulam 稳定性的研究不断更新,得到了许多重要的研究结果[4,18,19,36,45,63,113,134,147,150,153,189,216,238],丰富了泛函方程的稳定性问题的研究对象,拓展了泛函方程理论的研究领域与方向. 这些结果已被广泛应用到非线性分析中一些重要问题的研究上,成为相关领域重要的研究工具.

在某些实际问题的研究与应用中,如果想要考虑某一系统的稳定性,但有时系统的局部区域会存在信息部分缺失,也即"灰箱"区域. 那么怎样去修补"灰箱"区域,进而讨论系统全局范围内的稳定性问题,这就是多变量泛函方程的另一种稳定性:在限制区域上的稳定性. 1983 年,Skof[223,224]分别在限制区域$\mathbb{R}^N$的子集上当 $N=1$ 时及在$|x|+|y|>a$($a>0$ 是给定的常数)的条件下对可加泛函方程的稳定性进行了研究,并且在$\|x\|+\|y\|>a$ 的条件下也对可加泛函方程的稳定性进行了研究,同时进一步将相关的结果应用到讨论可加泛函方程的渐近性行为上. 1989 年,Kominek[133]对文献[224]中的工作进行了较好的补充,考虑了当 N 取任意正整数的情形下的稳定性,获得了较为完整的结果,且在文献[70,95]中对可加泛函方程在限制区域上的稳定性及方程的渐近性行为也进行了研究. 1987 年,Skof 和 Terracini[225]研究了二次泛函方程(1. 2. 5)在限制区域上的稳定性. Jung[89]在$\|x\|+\|y\|>d$ 的条件下研究了二次泛函方程(1. 2. 5)的稳定性. 有关可加泛函方程与二次泛函方程在限制区域上的稳定性的研究所取得的成果,为进一步研究其他类型的泛函方程在限制区域上的稳定性提供了很好的支持与帮助. Jensen 泛函方程(1. 2. 4)作为可加泛函方程的一种特殊形式,Jung[90,95,133]讨论了它在限制区域上的稳定性. Rassias 等人[200]针对 Jensen 与 Jensen 型泛函方程在限制区域上的稳定性,以及方程的渐近性行为进行了进一步的讨论. Jung[100]还讨论了指数泛函方程 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 在限制区域上的稳定性.