多元非理想插值的计算方法及应用

Computational Methods and Applications for Multivariate Non-ideal Interpolation

崔 凯◎著

重庆大学出版社

多元非理想插值的计算方法及应用

Computational Methods and Applications for Multivariate Non-ideal Interpolation

崔 凯◎著

重庆大学出版社

内容提要

本书主要总结了作者近年来在多元非理想插值方面的相关工作，主要包括以下三方面的研究成果：提出了更一般的多元插值格式，得到了插值格式几乎正则的一个必要条件和正则的一个充分条件；将单项微分插值条件的插值问题拓展到了多项式微分插值条件的情形，并将计算理想插值的 BM 算法推广到了多元非理想插值问题上；给定摄动结点集，得到了计算任意单项序下稳定单项基的算法，并将该算法应用在曲面重建中.

本书的成果进一步丰富了多元非理想插值理论，可供高等学校计算数学及应用数学等相关专业的教师和研究生使用.

图书在版编目（CIP）数据

多元非理想插值的计算方法及应用 / 崔凯著. -- 重庆：重庆大学出版社，2023.5

ISBN 978-7-5689-3963-8

Ⅰ. ①多… Ⅱ. ①崔… Ⅲ. ①插值—计算方法 Ⅳ. ①O174.42

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 104269 号

多元非理想插值的计算方法及应用

DUOYUAN FEILIXIANG CHAZHI DE JISUAN FANGFA JI YINGYONG

崔　凯　著

策划编辑：杨粮菊

责任编辑：文　鹏　　版式设计：杨粮菊

责任校对：关德强　　责任印制：张　策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：饶帮华

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401331

电话：(023) 88617190　88617185(中小学)

传真：(023) 88617186　88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆华林天美印务有限公司印刷

*

开本：720mm×1020mm　1/16　印张：5.25　字数：76 千

2023 年 5 月第 1 版　　2023 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5689-3963-8　定价：49.00 元

前　言

多项式插值作为重要的逼近工具之一,其理论和算法一直以来受到研究者们的广泛关注。按照插值条件的不同,多项式插值又可以分为 Lagrange 插值、Hermite 插值及 Birkhoff 插值 3 种类型. 前两种插值,由于满足齐次插值条件的多项式可以构成一个理想,因此也被称为理想插值;而后一种插值,满足齐次插值条件的多项式不能构成理想,因此也被称为非理想插值. 近几十年以来,Groebner 基理论的快速发展促进了理想插值理论的进一步完善,但其理论不能直接应用到非理想插值上,加之非理想插值条件的复杂性,使得研究成果远不如理想插值那么丰富. 尤其是多元的非理想插值,虽然已有一些专著做了深入探讨,但多数是基于传统逼近论角度讨论 Birkhoff 插值求积公式、余项表示以及插值多项式的收敛性等问题,从代数几何角度出发研究插值基结构的成果较少;另一方面,所讨论的问题多限制在单项微分插值条件的情形,对于更一般的多项式微分插值条件的研究成果很少,且多数研究成果建立在精确插值结点集的基础上,未考虑结点的摄动. 基于此,笔者从代数几何的角度出发,对多项式微分插值条件及摄动结点集的非理想插值问题进行研究,得到了若干研究成果,整理出《多元非理想插值的计算方法及应用》一书,呈现给读者,可供相关领域的研究者及高校教师参考,也可作为学习数值分析的学生的参考书.

本书内容安排如下:第 1 章绪论,主要介绍了 Birkhoff 插值问题的研究历史和现状,本书的主要研究成果及相关预备知识;第 2 章提出了更一般的多元 Birkhoff 插值格式,给出了插值格式正则性及奇异性的判定方法;第 3 章提出了基于多项式微分插值条件的多元非理想插值问题,并将理想插值中计算极小单项基的经典算法推广到非理想插值情形;第 4 章主要讨论了基于摄动结点集的非理想插值问题,给出了计算稳定单项基的 BSMB 算法,辅以数值算例,并将该

算法应用于曲面重建,与传统算法相比,BSMB 算法在结点摄动的情形下对曲面的逼近度更高.

在本书出版之际,衷心地感谢沈阳师范大学学术文库出版基金以及数学与系统科学学院对本书的资助;感谢数学学院的王贺元教授对系列丛书的大力支持;感谢数学学院的姜雪副教授对本书初稿所做的大量编辑与修改工作;同时,还要感谢重庆大学出版社的编辑同志和相关人员为本书的出版所付出的艰辛劳动.

崔 凯

2022 年 12 月

目 录

第1章 绪 论

1.1 多项式插值简介

在离散数据基础上补插出简单的连续函数,从而近似地替代复杂的连续函数,这种方法称为插值方法.插值方法是计算数学中常用的手段,也是函数逼近的重要方法.插值问题最初的提法是:假定已知区间$[a,b]$上的实值函数$f(x)$在该区间中$(n+1)$个互不相同的点$x_0,x_1,\cdots,x_n$的值是$f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$,要求估算$f(x)$在$[a,b]$中某点$x=\tilde{x}$处的值.插值的作法是:在事先选定的一个由简单函数所张成的线性空间P中求出满足条件

$$p(x_i)=f(x_i),i=0,1,\cdots,n \tag{1.1}$$

的函数$p(x)$,并以$p(\tilde{x})$作为$f(\tilde{x})$的估值.此处,函数$f(x)$称为被插函数,

$$x_0,x_1,\cdots,x_n$$

称为插值结点,函数值$f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$称为插值型值,$P$称为插值空间,式(1.1)称为插值条件,$p(x)$称为满足条件(1.1)插值函数.误差函数

$$r(x)=f(x)-p(x)$$

称为插值余项,标志着插值函数的逼近精度.

满足插值条件的函数可以是多项式、有理函数,也可以是任意光滑函数或分段光滑函数.若选择多项式作为插值函数,则称为多项式插值.由于多项式是

一种特别简单的连续函数,微分运算和积分运算都易于实行,因此,作为重要的逼近工具之一,多项式插值的理论和算法一直以来受到研究者们的高度关注[1-6].

随着理论与实践的需要,插值函数所要满足的插值条件也变得越来越复杂. 条件(1.1)只要求插值函数与被插函数在结点上的函数值相等,这样的插值问题被称为 Lagrange 插值. 若插值条件除了要求结点上的函数值相等,还要求从 1 阶直到 i 阶的微商值也相等,这样的插值问题被称为 Hermite 插值. 若结点上的微商条件是不连续的,即插值函数与被插函数在结点上的 i 阶微商值相等,0 到 $i-1$ 阶的微商值并非全部相等,则这样的插值问题被称为 Birkhoff 插值. Birkhoff 插值的一个简单例子是给定两个结点 x_1, x_2,要求插值此两点处的函数值和二阶导数值(不要求插值一阶导数值). Birkhoff 插值可以看作 Hermite 插值的延伸,因此很多学者也称之为 Hermite-Birkhoff 插值.

Birkhoff 插值有着较为广泛的应用背景,例如微分方程初边值问题的求解[7,8,9],应用密码学的分级(图像)秘密共享问题[10]以及离散数据的拟合问题[11,12]等. 随着 Birkhoff 插值在相关领域应用的发展,其自身的理论研究越来越被人们所关注. 本书所研究的就是多项式空间中多元 Birkhoff 插值问题的相关理论及算法,下一节将简单介绍 Birkhoff 插值问题的研究历史及现状.

1.2 Birkhoff 插值问题研究历史及现状

继 Newton, Lagrange 和 Hermite 之后, Birkhoff 于 1906 年[13]提出了微商条件不连续的插值问题,即 Birkhoff 插值. 对于一元 Lagrange 插值和 Hermite 插值,给定$(n+1)$个插值条件,则存在唯一的 n 次多项式满足插值条件. 然而,对于 Birkhofff 插值,不连续的微商条件使得插值多项式的存在性成为一个不确定性问题. 例如,给定插值空间 $P=Span_{\mathbb{R}}\{1,x,x^2\}$,不存在二次多项式 $f(x)\in P$ 满足插值条件

$$f(-1)=0,\ f(1)=0,\ f'(0)=1.$$

另一方面,对任给的型值 $c_i \in \mathbb{R}$,$i=1,2,3$,存在唯一的一个二次多项式 $p(x) \in P$ 满足插值条件

$$p'(-1)=c_1,p'(0)=c_2,p(1)=c_3.$$

因此,一元 Birkhoff 插值面临的首要问题是:什么样的插值条件使得插值多项式存在且唯一,也即插值的可解性问题. 1931 年,Pólya 给出了两点 Birkhoff 插值问题可解性的刻画,即对结点的任意选择,插值问题存在唯一解当且仅当插值条件满足 Pólya 条件. 从 1955 年起,Turan 及其学生开始系统地研究一类简单而又重要的插值问题:一元(0-2)插值(即只给结点上的函数值和二阶微商值)及其推广[14-20],得到了一系列的重要结果,包括插值多项式的存在性及显式表达式,插值多项式的收敛性结论及误差估计等.

1966 年 Schoenberg[21] 提出了一元 Birkhoff 插值格式:

(1)一组结点集 Z,$Z=\{x_i\}_{i=1}^{m}$;

(2) 插值空间 $\prod_n^1 = \{p \mid p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\}$;

(3)关联矩阵 $\boldsymbol{E}_{m\times(n+1)}=\{e_{q,\alpha}\}$,$e_{q,\alpha}=0$ 或 1,$q=1,\cdots,m$,$\alpha=0,\cdots,n$. 假定 $\boldsymbol{E}$ 中 1 的个数恰好为 $n+1$.

对满足 $e_{q,\alpha}=1$ 的 (q,α),一元Birkhoff插值问题是寻求多项式 $p \in \prod_n^1$ 满足插值条件

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}p(x_q)=c_{q,\alpha},c_{q,\alpha}\in\mathbb{R}. \tag{1.2}$$

插值条件由关联矩阵给出,因此,对于插值问题的可解性研究可以转化为对关联矩阵性质的研究. 方程(1.2)是一个以多项式 p 的系数 a_i 为未知变元的线性方程组,系数矩阵记为 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Z})$,被称为 Vandermonde 矩阵. 对任给的型值 $c_{q,\alpha}$,方程组(1.2)有唯一解当且仅当 Vandermonde 矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Z})$ 可逆. 一个重要问题是:什么样的插值条件会使得对任意的结点分布,插值问题都有唯一的解,也

即关联矩阵满足什么样的条件时,Vandermonde 矩阵不依赖于结点 Z 的选择,总是可逆的,此时称插值格式是正则的. 若对结点集 Z 的任意选择,插值问题都不存在唯一解,则称插值格式是奇异的. 若对结点集 Z 的几乎所有选择($\mathbb{R}^{mn}$ 中的 Lebesgue 测度下),插值问题存在唯一解,则称插值格式是几乎正则的.

事实上,自从 Schoenberg 提出了上面的插值格式并指出可由给定关联矩阵的性质直接判定插值格式正则性之后,人们便展开了对这类问题的广泛研究[22-28]. 由 Pólya 于 1931 年提出的 Pólya 条件在插值格式的正则性判断中起着重要作用. 用关联矩阵的语言描述 Pólya 条件则有如下表述:称关联矩阵 $\boldsymbol{E}_{m\times(n+1)}$ 满足 Pólya 条件,若对任意的 $0\leqslant r\leqslant n$,有

$$\sum_{\alpha=0}^{r}\sum_{q=1}^{m}e_{q,\alpha}\geqslant r+1.$$

Schoenberg 证明了对任意数目的结点,Pólya 条件是插值格式正则的必要条件. Ferguson[29] 和 Nemeth[30] 证明了 Pólya 条件是插值格式几乎正则的充分必要条件.

此外,对一元问题,由于结点具有天然的排序关系,因此所谓的按序正则经常被讨论,即插值问题满足结点组 $x_1<x_2<\cdots<x_m$ 情形下的正则性. Schoenberg 讨论了一种特殊的 Birkhoff 插值,即在中间结点 $x_2<x_3<\cdots<x_{m-1}$ 上的插值条件是 Hermite 型的(微商条件连续),只有在两端的结点 x_1,x_m 上的微商条件是不连续的,并证明了 Pólya 条件是该插值格式按序正则的充分必要条件. 对一般的一元 Birkhoff 插值,Atkinson 和 Sharma[31] 给出了插值格式按序正则的一个充分条件:关联矩阵满足 Pólya 条件且不含可支撑的奇序列. Karlin 和 Karon[32] 以及 Lorentz[33] 给出了插值格式不是按序正则的充分条件:关联矩阵满足强 Pólya 条件且 $\boldsymbol{E}$ 的某行含有一个可支撑的奇序列. Palacios 等人[34] 讨论了缺项多项式的 Birkhoff 插值问题,即插值空间是由不连续的单项序列张成的,并提出了比按序正则更弱的条件正则. 设 $K=[k_1,k_2,\cdots,k_n]$ 为插值空间中单项的次数序列, $Q(\boldsymbol{E})=[q_1,q_2,\cdots,q_n]$ 为微商条件的求导阶序列,则插值格式条件正则当且仅

当关联矩阵满足 Pólya K-条件：$q_i \leqslant k_i, i=1,\cdots,n$. 2009 年，Rubió 等人[35]研究缺项多项式插值的正则性问题，给出了一个结点的 Birkhoff 插值格式正则的充分必要条件，以及包含零结点的两点 Birkhoff 插值按序正则的充分必要条件.

一元 Birkhoff 插值的另一个研究方向是：从传统逼近论的角度探讨 Birkhoff 插值求积公式，余项表示以及插值多项式的收敛性等问题[36-40]. Turan 及其学生在这方面做了很多重要工作并于 1980 年提出了关于 Birkhoff 插值求积公式及收敛性的若干公开问题[41]，Varma[42]对问题 37-39 给出了部分回答，史应光等人给出了问题 37-39 的完全解[43]，以及问题 35，40，41 的否定回答[44]，并提出了两个猜想. 对其他的公开问题，史应光也做了系统的研究[45-48]，并将研究成果总结在专著[49]中.

虽然关于一元 Birkhoff 插值的研究还有很多，但大多是针对特定插值结点或插值条件比较特殊的插值问题[50-58]. 与发展较为成熟的一元 Lagrange 插值和 Hermite 插值相比，一元 Birkhoff 插值理论还有许多不完善之处，而已有的一元的结论并不都能很好地推广到多元 Birkhoff 插值问题上，因此多元 Birkhoff 插值理论还有很广阔的研究空间. 从 20 世纪 80 年代起，人们才开始关注多元 Birkhoff 插值问题. 1987 年，Hack[59]讨论了二元 Birkhoff 插值的唯一可解性问题. 1990 年，Gasca[60]用矩阵方法给出了二元 Birkhoff 插值问题唯一可解的必要条件. 1993 年 Lorentz 在其专著[61]中系统地介绍了多元 Birkhoff 插值问题，尤其是在插值格式几乎正则时，给出了构造适定结点组的大量例子.

从研究方向上看，多元 Birkhoff 插值面临的一个主要问题依然是解的唯一存在性，在 Lorentz 沿用 Schoenberg 关联矩阵的语言描述多元 Birkhoff 插值格式之后，解的唯一存在性的研究也就转为对插值格式正则性的讨论. 一个多元的 Birkhoff 插值格式$(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{E},P_S)$包含了 3 个部分：

（1）一组结点集 $\boldsymbol{Z}$，

$$\boldsymbol{Z}=\{z_i\}_{i=1}^{m}=\{(x_{i1},\cdots,x_{in})\}_{i=1}^{m}\subset\mathbb{R}^n.$$

（2）插值空间 P_S，

$$P_S = \{f \mid f(X)=f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i\in S} a_i x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\},$$

其中 $S\subset\mathbb{N}^n$.

(3)关联矩阵 $\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{E}=(e_{q,\alpha}),q=1,\cdots,m,\alpha\in S,$$

其中 $e_{q,\alpha}=0$ 或 1.

对于满足 $e_{q,\alpha}=1$ 的(q,α),给定实数 $c_{q,\alpha}$,则与插值格式$(Z,\boldsymbol{E},P_S)$对应的 Birkhoff 插值问题为求一多项式$f\in P_S$ 满足插值条件

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}f(z_q)=c_{q,\alpha},$$

此处 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

多元情形不再像一元理论中那样有那么多关于正则性的结论,多元情形下的结点并没有唯一的排序标准,因此很自然地也没有按序正则这样的讨论.

对给定的插值格式$(Z,\boldsymbol{E},P_S)$,在 S 为 lower 集的限定下,Lorentz[62] 给出了插值格式几乎正则的一个必要条件:关联矩阵 $\boldsymbol{E}$ 满足多元 Pólya 条件,即对 S 的任意 lower 集 A, $\sum_{q=1}^{m}\sum_{\alpha\in A} e_{q,\alpha}\leqslant|A|$,其中 $|A|$ 为 A 中元素的个数. 1989 年, Lorentz[63] 证明了多元 Birkhoff 插值格式是正则的当且仅当定义插值条件的关联矩阵是阿贝尔矩阵,Jia 等人[64] 将这个结论推广到了张成插值空间的单项集不是 lower 集的情形. Crainic 定义了二元 UR Birkhoff 插值问题,即插值结点为矩形分布且各结点上的插值条件相同,并对该类问题做了大量的研究工作[65-71],得到了这种特殊插值格式几乎正则的若干个条件.

多元 Birkhoff 插值另一个主要研究方向是:对给定的插值结点和插值条件,如何构造一个合适的插值空间(插值基),使得在该空间中插值时,总是存在唯一满足插值条件的多项式. 这样的插值空间称为适定的插值空间,该空间的一组基称为适定的插值基. 关于 Lagrange 插值和 Hermite 插值的适定插值基的构造问题,已有大量的研究成果. 早在 1982 年时,Buchberger 等人提出了 BM 算

法[72]，在计算多元消逝理想的 Groebner 基的同时还可以得到多元 Lagrange 插值问题的单项基和牛顿基. 事实上，由于满足齐次插值条件的多项式构成一个理想，因此 Lagrange 插值和 Hermite 插值也被统称为理想插值[73]. Marinari 等人[74]证明了使得理想插值问题适定的插值空间同构于多项式环模理想所得的商环. 因此通过计算给定单项序下的 Groebner 基，从而得到商环基，在商环基中选择合适的代表元则得到适定的插值基.

以 Lagrange 插值为例，设给定结点 $z_1, z_2, \cdots, z_s \in \mathbb{R}^n$，插值型值分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_s \in \mathbb{R}$，插值问题为求一按序最小的多项式 p，满足

$$p(z_i) = b_i, i = 1, \cdots, s.$$

若定义泛函 $L_i: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$，

$$L_i(f) = f(z_i), i = 1, 2, \cdots, s,$$

则满足齐次插值条件 $L_i(f) = f(z_i) = 0$ 的多项式集合记为

$$I = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid L_i(f) = 0, i = 1, \cdots, s\}.$$

容易证明 I 是个理想，且 $I_i = Ker(L_i)$ 为点 z_i 处的消逝理想，于是

$$I = \cap Ker(L_i) = \cap I_i,$$

从而

$$\mathbb{R}[X]/I \cong (\mathbb{R}[X]/I_1, \cdots, \mathbb{R}[X]/I_s).$$

若插值多项式满足 $p(z_i) = b_i$ 当且仅当 $p \equiv b_i \bmod I_i, i = 1, \cdots, s$. 因此若计算出理想 I 在给定单项序下的 Groebner 基，从而得到商环 $\mathbb{R}[X]/I$ 的基底，按给定的单项序选择商环基的代表元 $t_1, t_2, \cdots, t_s$，则单项集 $\{t_1, t_2, \cdots, t_s\}$ 为该插值问题的适定单项基. 设插值多项式 $p = \sum_{i=1}^{s} a_i t_i$，于是由 $p \equiv b_i \bmod I_i, i = 1, \cdots, s$，可得线性方程组

$$\begin{pmatrix} t_1(z_1) & \cdots & t_s(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ t_1(z_s) & \cdots & t_s(z_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}.$$

系数矩阵是可逆的，因此可以解出唯一的多项式 p 满足 $p(z_i)=b_i$.

近几十年来，随着 Groebner 基理论的发展[75-78]，多元理想插值的基本理论也得到了进一步完善[79-82]. 然而对于 Birkhoff 插值，微商插值条件的不连续性使得满足齐次插值条件的多项式构不成理想. 以最简单的两个结点上的一元 Birkhoff 插值为例，设插值条件泛函为

$$L_1(f)=f'(z_1),L_2(f)=f'(z_2),z_1,z_2\in\mathbb{R},$$

则满足齐次插值条件的多项式集记为

$$Q=\{f\in\mathbb{R}[x]\mid L_i(f)=0,i=1,2\}.$$

若 $f\in Q$，对任意的多项式 $g\in\mathbb{R}[x]$，

$$L_i(fg)=f'(z_i)g(z_i)+f(z_i)g'(z_i)=f(z_i)g'(z_i),$$

由于插值条件只有一阶导数信息而没有函数值，故一定存在多项式 $g\in\mathbb{R}[x]$ 使得 $L_i(fg)\neq 0$，即 fg 不在多项式集 Q 中，Q 构不成理想. 因此 Birkhoff 插值也被称为非理想插值，适用于理想插值的 Groebner 基理论不能用来解决 Birkhoff 插值问题. 柴俊杰等[83]证明了虽然满足齐次插值条件的多项式构不成理想，但构成了多项式环的一个子空间，且当插值条件泛函线性无关时，由多项式环模子空间所得的商空间与适定的插值空间同构. 因此可以通过计算商空间的基间接地得出适定的插值基. 王筱颖等[84]针对多元 Birkhoff 插值问题提出了插值条件的连通性及连通闭包概念，并针对插值条件为连通集的情况构造了插值问题的 Newton 基. 雷娜等[85]基于 MB 算法[86]，提出了 B-MB 算法来计算 Birkhoff 插值问题在字典序下的极小单项基. 该算法由于仅包含数的比较和加法，因此计算量较低.

以上介绍的插值问题，插值条件都是由单项微分算子给定，本书研究了更一般的多元 Birkhoff 插值问题，即插值条件由多项式微分算子给定，下一节将介绍本书的主要内容及相关结果.

1.3 本书的主要内容和结果

虽然国内外的诸多学者对多元 Birkhoff 插值问题已展开了一系列的讨论，但多数研究的问题对插值条件有所限制，或插值结点组比较特殊. Lorentz 提出的多元 Birkhoff 插值格式，定义插值条件的微分算子是单项微分算子. 本书将研究的问题拓展为具有多项式微分插值条件的多元 Birkhoff 插值，并分别从 3 个方面展开了详细的讨论：

(1)给定插值空间和定义插值条件的关联矩阵，判定插值格式的正则性或奇异性；

(2)给定插值结点和定义插值条件的关联矩阵，求适定的插值基；

(3)对给定的插值结点和插值条件，考虑结点摄动的情形下，求稳定的单项基.

主要获得了以下几个结果：

(1)给出了一般性多元 Birkhoff 插值格式的数学描述，其中多项式微分插值条件算子由给定的单项序列 S 和关联矩阵唯一确定，对提出的一般性插值格式，不限定 S 为 lower 集，得到了插值格式几乎正则的一个必要条件和正则的一个充分条件.

(2)给定插值结点和插值条件，给出一般性 Birkhoff 插值问题的恰当提法，将计算理想插值的 BM 算法推广到多元 Birkhoff 插值问题上，得到了计算分次序下极小单项基的算法.

(3)对给定的一般性 Birkhoff 插值问题，定义了一个单项序列 S 的正则链，并证明了当关联矩阵具有某些好的性质时，其适定的插值基(不一定是单项的)可以由关联矩阵和单项序列 S 直接确定.

(4)结点上的插值条件相同时，给出了插值空间适定的一个充要条件.

(5)给定结点和多项式微分算子定义的插值条件，得到了计算任意单项序

下稳定单项基的算法,即这组单项基满足插值结点在一定误差范围内摄动时,依然保持适定性.

1.4 预备知识与符号说明

本节我们介绍有关计算机代数的一些基本概念和理论,感兴趣的读者可以参考文献[87-90].

设 K 表示特征为零的域,包括实数域$\mathbb{R}$ 和复数域$\mathbb{C}$,$\mathbb{N}$ 表示非负整数集. K^n 表示通常的 n 维向量空间,K^n 中的元素称为向量空间中的点.

$$K[X]=K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$$

表示所有以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为未定元的多项式构成的集合,即 K 上的 n 元多项式环.

$X^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ 表示多项式环 $K[X]$ 中的一个单项,其中

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n,|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

有限集合 $B\in\mathbb{N}^n$ 称为 lower 集. 若对任意的 $\alpha\in B$, $\alpha-\beta$ 的各个分量都为非负整数,有 $\beta\in B$. T^n表示 $K[X]$ 中所有单项式的集合.

多元情形下,单项的排列方式并不唯一,因此首先给出单项序的定义是必要的.

定义 1.4.1[87](**单项序**) 定义在 T^n上的单项序为单项间满足下述条件的任何关系$<$,

(1) $<$为 T^n上的全序;

(2) 若 $x^\alpha<x^\beta$, $x^\gamma\in T^n$, 则 $x^\alpha x^\gamma<x^\beta x^\gamma$;

(3) 对任意的 $x^\alpha\in T^n$,有 $1<x^\alpha$.

定义 1.4.2[87](**字典序**$<_{\text{lex}}$) 令 $x^\alpha,x^\beta\in T^n$,若 $\alpha-\beta$ 最左端的非零元为正,则称 $x^\beta<_{\text{lex}}x^\alpha$.