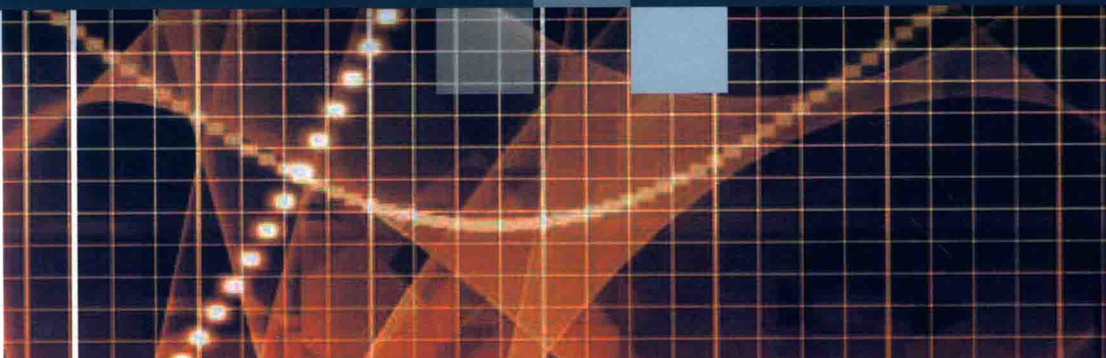
凌寅生
徐震宇　编著
方建兴

数学物理方法

SHUXUE WULI FANGFA



苏州大学出版社
Soochow University Press

数学物理方法

凌寅生　徐震宇　方建兴　编著

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/凌寅生，徐震宇，方建兴编著. —苏州：苏州大学出版社，2023.3
ISBN 978-7-5672-3993-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①凌…②徐…③方… Ⅲ.①数学物理方法 Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 123902 号

数学物理方法
凌寅生　徐震宇　方建兴　编著
责任编辑　周建兰

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街1号　邮编:215006)
江苏凤凰数码印务有限公司印装
(地址:南京市栖霞区尧新大道399号　邮编:210046)

开本 787 mm×1 092 mm　1/16　印张 14.25　字数 298 千
2023 年 3 月第 1 版　2023 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-3993-7　定价:46.00 元

图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话:0512-67481020
苏州大学出版社网址　http://www.sudapress.com
苏州大学出版社邮箱　sdcbs@suda.edu.cn

前言

Preface

“数学物理方法”是物理专业的一门工具课. 革命导师马克思有一句名言:“一门科学,只有当它成功地运用数学时,才能达到真正完善的地步”[摘自“弗·梅林. 马克思传(上,下)[M]. 北京:人民出版社,1965:871]. 物理学是自然科学中数学用得最多的一门学科. 本书作为物理专业的工具课程,在内容的选取和表述中,应该尽量结合物理学习的需要,教材内容应适时充实更新. 本着这一目的,本书除介绍传统的复变函数和数学物理方程内容外,还介绍了物理上有用的一些新的内容和方法. 例如,利用伯努利数和回路积分计算了玻色积分和费米积分;用1形式和广义函数引入δ函数,推出它的多种表达式;较早地介绍了在级数展开中非常方便的Ket-Bra记号;介绍了格林函数的算符表达式和它在量子物理中的应用;等等. 附录介绍了近代理论物理中广泛应用的现代微分几何的基本概念和运算方法. 限于作者水平有限,文中的错误在所难免,欢迎同行批评指正.

目录中打 * 的章节可以作为物理专业研究生学习,本科生只作参考.

本书第一部分“复变函数”由徐震宇、方建兴编著,第二部分“数学物理方程”由凌寅生编著.

在编著过程中,姜礼尚、李振亚、高雷诸教授给予了热情的鼓励,苏州大学物理科学与技术学院给予了大力支持,在此深表感谢! 谢惠民、周建伟教授对书中的一些问题提出了宝贵的意见,在此一并感谢!

苏州大学出版社周建兰编辑在本书编辑工作中付出了很多精力,也深表感谢!

目录

Contents

第一部分 复变函数

第二部分 数学物理方程

第 6 章 数学物理方程的导出

第 7 章 行波法与分离变量法

第 8 章 傅里叶变换

第 9 章 贝塞尔方程与勒让德方程

第一部分

复变函数

第 1 章

复　数

§1.1　复　数

一、复数的定义

设 C 为所有有序实数对的全体：

$$C=\{[a,b]:a,b\in\mathbf{R}\}$$

在 C 中定义下列加法与乘法：

$$[a_1,b_1]+[a_2,b_2]=[a_1+a_2,b_1+b_2] \tag{1.1.1}$$

$$[a_1,b_1]\cdot[a_2,b_2]=[a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1] \tag{1.1.2}$$

称 $[a,b]$ 为复数 z，

$$z=[a,b] \tag{1.1.3}$$

C 为复数环. 用逆运算引入减法与除法后，C 为复数域. a 与 b 分别称为复数 z 的实部与虚部，记为

$$a=\mathrm{Re}z,\quad b=\mathrm{Im}z.$$

当且仅当两复数的实部与虚部对应相等时，两复数相等. 实部 $=0$ 的复数 $[0,b]$ 称为纯虚数. 虚部 $=0$ 的复数 $[a,0]$ 称为实数. 虚部 $=0$ 的复数的全体 $\{[a,0]:a\in\mathbf{R}\}$ 可与全体实数的集合 $\mathbf{R}=\{a\}$ 一一对应：

$$[a,0]\leftrightarrow a$$

并且在上述对应下保持四则运算规律不变. 我们说复数域 $\{[a,0]:a\in\mathbf{R}\}$ 与实数域 $\mathbf{R}$ 同构，作四则运算时彼此可以取代，所以，今后可以把复数 $[a,0]$ 就看成实数 a，即

$$[a,0]=a \tag{1.1.4}$$

实部与虚部都为零的复数 $[0,0]$ 与任一复数 $[a,b]$ 之和仍为该复数，即

$$[0,0]+[a,b]=[a,b]$$

所以 $[0,0]$ 称为零复数. 在式(1.1.4)的约定下，零复数 $[0,0]$ 可以写成实数 0，即

$$[0,0]=0 \tag{1.1.5}$$

由乘法规律(1.1.2)易证：

$$[0,1]\cdot[0,1]=[-1,0]=-1 \tag{1.1.6}$$

因此，纯虚数$[0,1]$就是熟知的虚单位：

$$[0,1]=\mathrm{i} \tag{1.1.7}$$

复数 $z=[a,b]$ 可写成熟知的代数表示式：

$$z=[a,b]=[a,0]+[0,b]=a+[0,1]b=a+\mathrm{i}b \tag{1.1.8}$$

即

$$z=[a,b]=a+\mathrm{i}b \tag{1.1.9}$$

当 $z=a+\mathrm{i}b$ 时，称

$$z^*=a-\mathrm{i}b \tag{1.1.10}$$

为 z 的共轭复数. 易证

$$z\cdot z^*=a^2+b^2 \tag{1.1.11}$$

$|z|=\sqrt{z\cdot z^*}$，称为复数 z 的模. 显然 $a\leqslant|z|$，$b\leqslant|z|$，有些书中 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$.

二、复数的四则运算

设 $z_1=a_1+\mathrm{i}b_1$，$z_2=a_2+\mathrm{i}b_2$，由式(1.1.1)，可得

$$z_1+z_2=(a_1+\mathrm{i}b_1)+(a_2+\mathrm{i}b_2)=a_1+a_2+\mathrm{i}(b_1+b_2) \tag{1.1.12}$$

即复数相加时，实部与实部相加，虚部与虚部相加.

$$z_1\cdot z_2=(a_1+\mathrm{i}b_1)\cdot(a_2+\mathrm{i}b_2)=a_1a_2-b_1b_2+\mathrm{i}(a_1b_2+a_2b_1) \tag{1.1.13}$$

只要记住 $\mathrm{i}^2=-1$，用复数的代数表示式，加法和乘法运算可像多项式一样进行.

减法可定义为加法的逆运算. 即若

$$z_1+z_2=z_3 \tag{1.1.14}$$

则称 z_2 为 z_3 与 z_1 之差，记为

$$z_2=z_3-z_1 \tag{1.1.15}$$

将复数的代数表示式代入，式(1.1.14)可化成

$$a_1+a_2+\mathrm{i}(b_1+b_2)=a_3+\mathrm{i}b_3$$

由此可得

$$\begin{cases}a_1+a_2=a_3\\ b_1+b_2=b_3\end{cases} \tag{1.1.16}$$

解上述联立方程，可得

$$\begin{cases}a_2=a_3-a_1\\ b_2=b_3-b_1\end{cases}$$

由此可得

$$z_2=z_3-z_1=a_3-a_1+\mathrm{i}(b_3-b_1) \tag{1.1.17}$$

除法定义为乘法的逆运算. 设 $z_1\neq0$，

$$z_1 \cdot z_2 = z_3 \tag{1.1.18}$$

称 z_2 为 z_3 与 z_1 之商,记为

$$z_2 = \frac{z_3}{z_1} \tag{1.1.19}$$

用 z_1, z_2, z_3 的代数表示式代入(1.1.18),比较等式两边的实部与虚部,可得 a_2, b_2 满足的联立方程组,解之,即得商 z_2. 实际计算时用以下方法更为方便:

$$z_2 = \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_3 \cdot z_1^*}{z_1 \cdot z_1^*} = \frac{(a_3 + \mathrm{i}b_3) \cdot (a_1 - \mathrm{i}b_1)}{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2}} = \frac{a_1 a_3 + b_1 b_3}{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2}} + \mathrm{i}\,\frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2}} \tag{1.1.20}$$

因此

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1 a_3 + b_1 b_3}{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2}} \\ b_2 = \dfrac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2}} \end{cases}$$

商的上列结果不需硬记. 掌握推导过程,结果自然出来.

例 1.1 计算 $\dfrac{3-5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

解 $\dfrac{3-5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \dfrac{(3-5\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} = \dfrac{3-10-\mathrm{i}(5+6)}{1+2^2} = -\dfrac{7}{5} - \mathrm{i}\,\dfrac{11}{5}$.

三、复平面

复数 $z=[x,y]$ 为满足一定运算规律的一对有序实数,它可以用平面上的点 $P(x,y)$ 来表示. P 的横坐标 x 为 z 的实部,纵坐标 y 为 z 的虚部. 其上的点代表复数的平面,称为复平面. 复平面上的 x 轴称为实轴,标为 $\mathrm{Re}z$; y 轴称为虚轴,标为 $\mathrm{Im}z$.

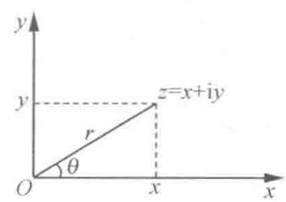


图 1.1 复平面

平面上点 P 的位置除用直角坐标(x,y)确定以外,也可用极坐标(r,θ)来表示(图 1.1). 两者之间的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1.1.21}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} + 2n\pi \end{cases} \tag{1.1.22}$$

这里 r 即为复数 z 的模,即 $r=|z|$. 幅角 θ 在哪个象限中取值,尚需根据 x,y 的正负号来决定. 引进极坐标后,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可表示成

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.1.23}$$

这叫作复数的三角表示式.

注意 将复数写成三角表示式时,幅角 θ 上可加上 2π 的整数倍.

当复数用三角表示式时,两复数相乘,只要模相乘,幅角相加;两复数相除,只要模相

除，幅角相减.

例如，已知

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

则

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{1.1.24}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.1.25}$$

例 1.2 已知 $z_1 = 1-\mathrm{i}, z_2 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$，计算 $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$.

解 先把 z_1, z_2 化成三角表示式：

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi - \mathrm{i}\sin\frac{7}{12}\pi\right) \end{aligned}$$

利用欧拉(Euler)公式

$$\exp(\mathrm{i}\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \tag{1.1.26}$$

复数的三角表示式(1.1.23)可改写成指数表示式：

$$z = r\exp(\mathrm{i}\theta) \tag{1.1.27}$$

和三角表示式一样，幅角 θ 上可加上 2π 的整数倍.

将复数写成指数表示式后，对乘法与除法运算，只要应用指数运算法则. 若最后要写出实部与虚部，可再一次用欧拉公式.

例如，若 $z_1 = r_1\exp(\mathrm{i}\theta_1), z_2 = r_2\exp(\mathrm{i}\theta_2)$，则

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\exp(\mathrm{i}\theta_1) \cdot r_2\exp(\mathrm{i}\theta_2) = r_1 r_2\exp[\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)] \tag{1.1.28}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\exp(\mathrm{i}\theta_1)}{r_2\exp(\mathrm{i}\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\exp[\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.1.29}$$

再一次应用欧拉公式，就可以得三角表示式的计算结果式(1.1.24)和式(1.1.25).

在例 1.2 中，$z_1 = 1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\exp(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}), z_2 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\right)$. 所以

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) \cdot \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}\right)}{\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{7}{12}\pi\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{7}{12}\pi\right).$$

四、乘方与开方

设 $z=r\exp(\mathrm{i}\theta)$. 由乘法规律,得

$$z^n=r^n\exp(\mathrm{i}n\theta) \tag{1.1.30}$$

这是复数的乘方规律.

若 $w^n=z$,则称 w 为 z 的 n 次方根,记为

$$w=\sqrt[n]{z} \tag{1.1.31}$$

若 $z=r\exp(\mathrm{i}\theta)$,$w=\rho\exp(\mathrm{i}\psi)$,则

$$\rho^n\exp(\mathrm{i}n\psi)=r\exp(\mathrm{i}\theta) \tag{1.1.32}$$

当两个复数相等时,模相等,幅角可以相差 2π 的整数倍. 因此有

$$\rho^n=r,\quad \rho=\sqrt[n]{r} \tag{1.1.33}$$

$$n\psi=\theta+2k\pi,\quad \psi=\frac{\theta}{n}+k\,\frac{2\pi}{n}\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1) \tag{1.1.34}$$

k 可以取任意整数值. 但是仅当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时可得出 n 个不同的根:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt[n]{z})_0=\sqrt[n]{r}\\
&(\sqrt[n]{z})_1=\sqrt[n]{r}\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}\right)\\
&(\sqrt[n]{z})_2=\sqrt[n]{r}\exp\left(\mathrm{i}2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\\
&\cdots\\
&(\sqrt[n]{z})_{n-1}=\sqrt[n]{r}\exp\left[\mathrm{i}(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]
\end{aligned} \tag{1.1.35}$$

一般可表示为

$$(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\exp\left(\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{n}\right)\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1) \tag{1.1.36}$$

实数 1 的 n 次根可记为

$$\varepsilon_k=(\sqrt[n]{1})_k=\exp\left(\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{n}\right)\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1) \tag{1.1.37}$$

因为

$$\exp\left[\mathrm{i}(n-k)\frac{2\pi}{n}\right]=\exp\left[\mathrm{i}(-k)\frac{2\pi}{n}\right]$$

因此

$$\varepsilon_{n-k}=\varepsilon_{-k}.$$

当 n 为奇数时,1 的 n 次根亦可记为

$$\varepsilon_k\left(k=-\frac{n-1}{2},-\frac{n-3}{2},\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\right) \tag{1.1.38}$$

当 n 为偶数时,1 的 n 次根可记为

$$\varepsilon_k\left[k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\left(\frac{n}{2}-1\right),\frac{n}{2}\right] \tag{1.1.39}$$

例如,1 的 5 次根可记为

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_1=\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}\right),\quad \varepsilon_2=\exp\left(\mathrm{i}2\cdot\frac{2\pi}{5}\right)=\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\varepsilon_3=\exp\left(\mathrm{i}3\cdot\frac{2\pi}{5}\right)=\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{6\pi}{5}\right),\quad \varepsilon_4=\exp\left(\mathrm{i}4\cdot\frac{2\pi}{5}\right)=\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{8\pi}{5}\right)$$

亦可记为

$$\varepsilon_{-2}=\exp\left[\mathrm{i}\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right],\quad \varepsilon_{-1}=\exp\left[\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right],\quad \varepsilon_0=1$$

$$\varepsilon_1=\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}\right),\quad \varepsilon_2=\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{5}\right).$$

1 的 6 次根可表示为

$$\varepsilon_k=(\sqrt[6]{1})_k=\exp\left(\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{6}\right)(k=0,1,2,\cdots,5)$$

亦可表示为

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_{\pm1}=\exp\left[\mathrm{i}\left(\pm\frac{2\pi}{6}\right)\right]=\exp\left[\mathrm{i}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{\pm2}=\exp\left[\mathrm{i}\left(\pm\frac{4\pi}{6}\right)\right]=\exp\left[\mathrm{i}\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right],\quad \varepsilon_{\pm3}=\exp\left[\mathrm{i}\left(3\cdot\frac{2\pi}{6}\right)\right]=-1$$

例 1.3 试证实数 1 的 n 个不同的 n 次根 $\varepsilon_k=\exp\left(\mathrm{i}k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 满足:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k=0 \tag{1.1.40}$$

证 *方法一* $\varepsilon_k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 为方程

$$\varepsilon^n-1=0$$

的 n 个根. $-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k$ 为方程左端 ε^{n-1} 项的系数. 现在该项系数为 0,所以

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k=0.$$

方法二 令 $S=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\exp\left[\mathrm{i}\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)\right]$,有

$$\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]\cdot S=\sum_{k=1}^{n}\exp\mathrm{i}\left(k\,\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}\right)-1\right]S=\exp(\mathrm{i}2\pi)-1=0.$$

因此,$S=0$.

例 1.4 计算 $\cos\frac{2\pi}{5}$.

解 由实数 1 的 5 个 5 次根之和等于 0,得

$$\exp\left(-\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}\right)+\exp\left(-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}\right)+1+\exp\left(\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}\right)+\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}\right)=0$$

$$2\cos\frac{4\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}+1=0$$

$$4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$$

解之,得

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

§1.2 平面点集的概念

一、距离

欧氏空间中,平面上点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$间的距离为

$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{1.2.1}$$

我们把式(1.2.1)称为复数 $z_1=(x_1,y_1)$与 $z_2=(x_2,y_2)$间的距离:

$$\rho(z_1,z_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{1.2.2}$$

显然式(1.2.2)就是 z_2-z_1 的模:

$$|z_2-z_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{1.2.3}$$

$$\rho^2(z_1,z_2)=(z_2-z_1)\cdot(z_2-z_1)^* \tag{1.2.4}$$

二、邻域

所有与点 z_0 的距离小于 δ 的点的全体称为点 z_0 的 δ 邻域,记为 $C_\delta(z_0)$.

三、内点、外点、边界点

设 D 为二维空间 $\mathbf{R}^2$ 中的非空子集:$D\subset\mathbf{R}^2$;P 为 D 中的某一点:$P\in D$. 若存在点 P 的某一邻域 $C_\delta(p)$,该邻域中的所有点都属于子集 D:$C_\delta(P)\subset D$,则称 P 为 D 的一个内点;若 $P\notin D$,可以找到点 P 的一个邻域 $C_\delta(P)$,其中所有点都不属于 D:$C_\delta(P)\not\subset D$,则称 P 为 D 的一个外点. 若点 P 的任一邻域内既有 D 内的点,也有 D 外的点,则称点 P 为 D 的边界点. D 的边界记为 ∂D. 边界点可能属于 D,也可能不属于 D.

如果 D 的点都是内点,则称 D 为开集;如果 D 的边界属于 D:$\partial D\subset D$,则称 D 为闭

集. $D\cup\partial D$ 称为 D 的闭包，记为

$$\overline{D}=D\cup\partial D$$

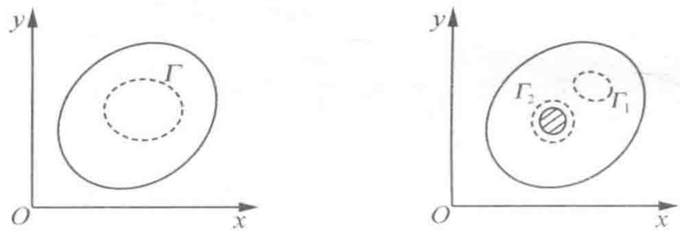
当 D 为闭集时

$$\overline{D}=D$$

四、区域与连通域

不包含孤立点的平面点集称为区域.类似地，可定义开区域与闭区域.

若区域 D 内任两点可用全在 D 内的一条折线或曲线相连，则称该区域为连通域. 若连通域 D 内，任何一条闭线都可以收缩成一点，则连通域 D 称为单连域. 若 D 内有洞，D 内的闭曲线可分成两类：一类为 Γ_1，它不包围洞，在 D 内可以缩成一点；另一类为 Γ_2，它包围洞，在 D 内不能缩成一点. 当 Γ_2 只环绕洞一圈时，这种连通域称为双连域. 如果允许闭曲线环绕洞多次，环绕洞次数不同的闭曲线不能相互连续变形，它们属于不同的类. 因此，只含一个洞的区域，可以认为是更多度连通的区域(图 1.2).



(a) 单连域　　(b) 多连域

图 1.2　连通域

习　题

1. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{3+4\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}$；

(2) $\dfrac{5\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

2. 将下列复数化成指数形式，并求幅角的一般值：

(1) $z=2-2\mathrm{i}$；

(2) $z=-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

3. 解下列方程：

(1) $z^3=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$；

(2) $z^4=-1$.