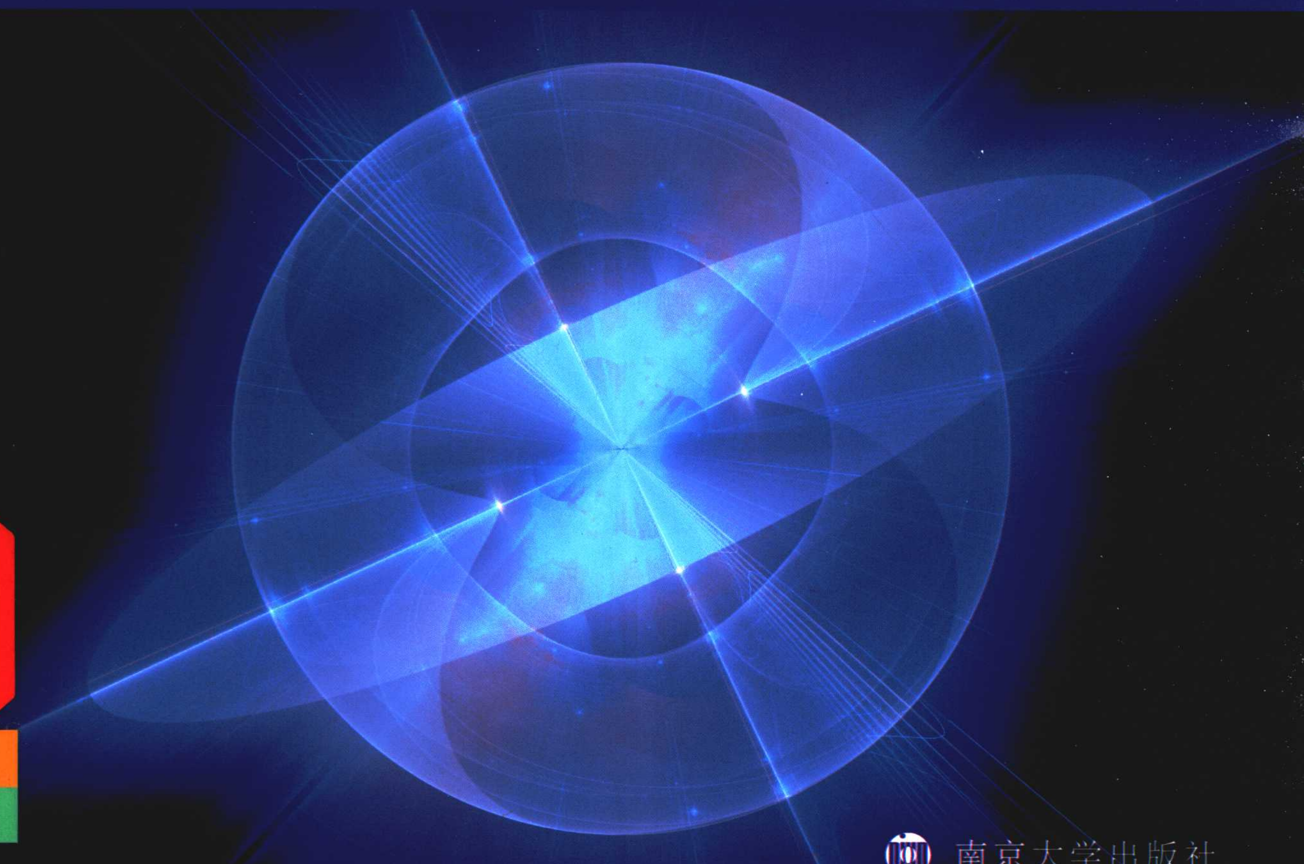
“十四五”高等教育课程改革新形态教材
全国大学生数学建模竞赛培训教材

数学建模

主编　王小才　姜红燕



南京大学出版社

“十四五”高等教育课程改革新形态教材
全国大学生数学建模竞赛培训教材

数学建模

主　编　王小才　姜红燕
副主编　刘绪庆　徐兴波　冯前胜　林洪伟
参　编　安凤仙　厉筱峰　邱　崇　曹晓菲
　　　　邓春华　刘金桂　王红专　严文利
　　　　张　莉　方　琳

特配电子资源

微信扫码
- 拓展案例
- 视频学习
- 互动交流

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模 / 王小才，姜红燕主编. —南京 ：南京大学出版社，2023.1

ISBN 978 - 7 - 305 - 25947 - 0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①王… ②姜… Ⅲ. ①数学模型—高等学校—教材 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 131283 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 数学建模
主　　编 王小才　姜红燕
责任编辑 刘　飞　　编辑热线 025 - 83592146

照　　排 南京开卷文化传媒有限公司
印　　刷 南京人民印刷厂有限责任公司
开　　本 787 mm×1092 mm　1/16　印张 18.75　字数 453 千
版　　次 2023 年 1 月第 1 版　2023 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 25947 - 0
定　　价 49.80 元

网　　址:http://www.njupco.com
官方微博:http://weibo.com/njupco
微信服务号:njuyuexue
销售咨询热线:(025)83594756

前 言

数学建模课程的开设有助于培养学生的创新能力，提高学生应用数学知识、计算机技术解决实际问题的能力。它涉及对问题积极思考的习惯，理论联系实际和善于发现问题、提出问题、分析问题的能力，清楚表达自己思想、熟练使用计算机的技能和集体合作的团队精神等，所有这些对提高学生的科学素养很有帮助，并且符合素质教育的要求。

为了使学生真正做到知识、能力与素质的结合，更好地开展数学建模教学，我们结合了多年的教学研究与实践，编写了这本数学建模教材。

全书共分为9章，内容包含数学建模概论、插值与拟合、最优化模型、微分方程模型、差分方程模型、数学建模中的统计分析方法、图论、计算机仿真、智能算法。第6章的内容由姜红燕老师编写，其余章节由王小才老师编写。另外刘绪庆、徐兴波、冯前胜、安凤仙、厉筱峰、曹晓菲、邱崇、邓春华、王红专、刘金桂、严文利、张莉、方琳、林洪伟老师对本书进行了校稿，修改了初稿中一些疏忽。

本教材依据OBE的教学理念，采用“知识主导、能力驱动”的教学设计思路，通过案例教学的目标驱动，创设问题情境，激发学

生的求知欲，提高学生的学习兴趣，并以案例式教学为切入点，以学生应用能力培养为目标导向，弱化对复杂理论的推导。教师在教学中可以采用探究案例式教学、启发问答式教学、分组研讨式教学方法，通过对一个个生动案例的分析、讨论、建模、求解一整套的过程，帮助学生梳理案例背后的建模方法、思路以及知识点（我们将案例背后的知识点放在每个案例的最后部分），建立自己的认知结构，从而达到“以点扩面”的效果。每个案例后配备有一定挑战度的思考题，做到学有所思，学有所获。

在教材的编写过程中，还注重挖掘课程知识点与社会主义核心价值观的内容映射，实现从专业知识点的讲解升华到教育引导学生形成正确的世界观、人生观、价值观，实现知识传授与价值塑造、人格培育相统一。

本教材服务于数学建模竞赛，对竞赛常见的问题，给出一些模块化代码，学生可以直接套用求解。本书可作为高等院校本、专科数学建模课程教材，也可作为大学生数学建模竞赛培训教材或参考书，还可供对数学建模感兴趣的广大科技工作者和自学者参考。由于水平有限，书中难免有不当之处，恳请广大读者指正。

编　者

2022 年 8 月

目 录

第1章 数学建模概论

本章介绍数学建模的基本概念和常用方法，并通过三个建模实例给出建立数学模型的主要步骤及建模时要注意的一些问题，最后简单说明数学模型的分类。通过本章的学习，可以使读者对数学建模的一些基本问题有初步的认识。

1.1 数学建模的基本概念

1.1.1 数学建模

在现实世界中，人们会遇到各种各样的实际问题，这些问题往往不会直接地以现成的数学形式呈现。通常人们为了一个特定目的，需要对实际问题进行深入分析，抓住问题的本质，根据其内在规律，做出必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到一个数学结构。这样抽象出来的数学问题就是所谓的**数学模型**。数学建模是指建立数学模型的全过程，包括问题的表述、分析、模型的建立、求解、结果的解释与检验等。数学建模是利用数学工具解决实际问题的主要手段，是联系数学与实际问题的桥梁。

1.1.2 数学建模的一般步骤

1. 模型准备

主要是了解实际背景、明确建模目的、搜集必需的各种信息，尽量弄清对象的特征，形成一个比较清晰的问题。

2. 模型的假设

现实世界的问题往往比较复杂，在我们从实际问题中抽象出数学问题的过程中，针对问题特点和建模目的，抓住主要因素，忽略一些次要因素，做出合理的、简化的假设，从而使抽象得到的数学问题变得越来越清晰。由于问题的复杂性，应抓住本质的因素，忽略次要的因素，从而对现实问题做一些简化或者理想化，这是个十分困难的步骤，也是建模过程中十分关键的一步。

3. 模型的建立

一般而言,建模的方法分为三类。

根据假设分析问题的因果关系,揭示问题的内在规律,运用数学方法建立各变量之间的关系式或数学结构,这种建立数学模型的方法称为**机理分析法**(即分析问题的内部机理规律)。使用这种方法的前提是对研究对象的机理有一定的了解。

当对研究对象的机理不清楚的时候,可以把研究对象视为一个“黑箱”系统,通过对量测数据的统计分析,找出与数据拟合最好的模型。这种方法称为**测试分析法**。

对于某些实际问题,有时候还可以将上述两种建模方法结合起来使用。也就是用机理分析建立模型结构,用测试分析确定模型中的参数。

在建模时究竟采用什么样的方法,使用什么样的数学工具,要根据问题的特征、建模的目的以及建模者自身的知识储备而定。同一个实际问题也可采用不同数学方法建立起不同的数学模型。但应遵循这样一个原则:尽量采用简单的数学工具,以便得到的模型被更多的人了解和使用。

4. 模型求解

模型建好后,采用合适的数学工具(如 MATLAB 软件、Lingo 软件等)对模型求解,这要求建模者掌握相应的计算机技术和计算技巧。

5. 模型的分析

对模型求解的结果进行数学上的分析,有时是根据问题的性质,分析各变量之间的依赖关系或稳定性态;有时是根据所得结果给出数学上的预测;有时是给出数学上的最优决策或控制。

6. 模型检验

将模型分析的结果“翻译”回实际对象中,用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性,即验证模型的正确性。通常一个较成功的模型不仅应当能解释已知现象,还应当能预言一些未知的现象并能被实践所证明。如果检验结果与实际不符或部分不符,且建模和求解过程中无误的话,一般来说,问题就出在模型假设上,应该修改或补充假设,重新建模。如果检验结果正确,满足问题所要求的精度,认为模型可用,便可进行最后一步“模型的应用”。

7. 模型的应用

也就是用得到的数学模型去解决实际问题。

应当指出,以上仅仅给出了建立数学模型的大体步骤。但务请读者注意,不要拘泥于上述模式。事实上,并非所有的建模都需要上面的步骤。一般来说,建立数学模型没有固定的模式,关键的是根据实际问题的特征和建模的目的做到抓住主要因素,分析数量关系建立数学模型,使我们关心的问题得到满意的解决或者比较满意的解决。

1.2　基本数学建模示例

1.2.1　酵母培养物的增长

问题的描述　表 1-2-1 中的数据是从测量酵母培养物增长的实验收集来的，请根据数据，给出酵母培养物数量随时间的变化关系。

表 1-2-1　酵母数量随时间的观测数据

时间/时	0	1	2	3	4	5	6	7
酵母数量/个	9.6	18.3	29.0	47.2	71.1	119.1	174.6	257.3

模型的假设与符号说明　用 $x(t)$ 表示 t 时刻酵母数量。通过观察所给的数据发现，酵母单位时间的数量变化与当前数量成正比，即

$$x(n+1)-x(n)\approx rx(n)$$

这里 $r\approx 0.5$。因此，可以假设酵母种群增长率 r 为常数。

模型的建立　由增长率的定义（即单位时间内种群数量变化再除以种群数量），可得

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t x(t)}=r$$

令 $\Delta t\to 0$，可得微分方程模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{1-2-1}$$

模型的求解　解微分方程(1-2-1)可得

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{rt}$$

模型的参数根据　通过表 1-2-1 的数据和数据拟合的方法（具体程序代码见第二章例题），可得酵母培养物数量随时间的变化关系为

$$x(t)=10.975\,7\mathrm{e}^{0.463\,6t}$$

由模型(1-2-1)的结果看：当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to\infty$，这是可疑的。

注：(1) 用机理分析建立模型结构，用测试分析确定模型参数是很常用的一种数学建模方法。

(2) 模型(1-2-1)本质上是马尔萨斯(Malthus)模型。该模型是英国人口学家马尔萨斯(Malthus，1766—1834)于 1798 年提出的著名的人口指数增长模型。19 世纪以前

(1790—1890),人们用此模型与西方一些国家(如美国)的人口变化趋势进行了比较,是十分吻合的,但19世纪以后有了很大的差异,即不再符合。事实上马尔萨斯模型可以做短期的预测。因为种群净增长率短期变化不大,可以视为常数,但长期而言,种群的增长率不能简单作为常数处理,由于资源、环境等因素的限制,种群数量不可能无限增长。

模型的改进 表1-2-1仅仅给出了8个时间的观测值,表1-2-2进一步给出后续11个时刻的观测值。

表1-2-2 后续11个时刻酵母数量随时间的观测数据

时间/时	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
酵母数量/个	350.7	441.0	513.3	559.7	594.8	629.4	640.8	651.1	655.9	659.6	661.8

画出酵母数量随时间的观测数据如图1-2-1所示。

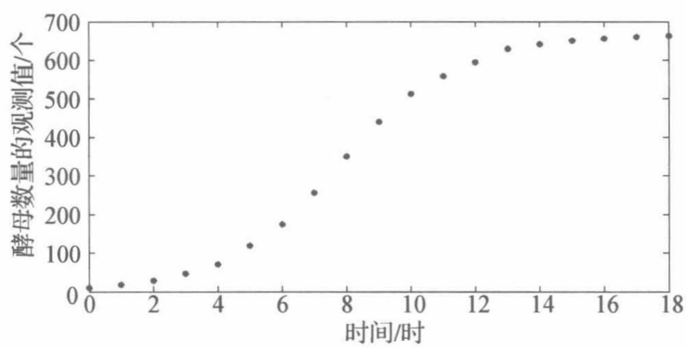


图1-2-1 酵母数量随时间的观测数据

从图1-2-1可以看出,酵母数量的增加量随着时间先快后慢,酵母数量的曲线显现"S"形状。是什么原因导致了这种现象呢?

当一个种群增长到一定数量后,资源、环境(如食物、生存空间)等因素会对种群的增长起阻滞作用,从而导致增长率下降。

种群数量越大,自身之间的竞争也会越来越激烈,阻滞作用也会随种群数量增加而变大。所以,可以假设种群的增长率 r 是种群数量 x 的减函数。为了简单起见,用下面的线性函数来刻画增长率 r 与种群数量 x 的关系:

$$r(x)=r-sx$$

其中 $r>0, s>0$ 为常数。

假设资源、环境能容纳种群的最大数量为 x_m,则 $r(x_m)=r-sx_m=0$,所以有

$$s=\frac{r}{x_m} \qquad r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$$

利用增长率的定义,类似可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\dfrac{x}{x_m}\right)\\ x(0)=x_0\end{cases} \tag{1-2-2}$$

解微分方程(1－2－2)可得

$$x(t)=\frac{x_m}{1+\left(\dfrac{x_m}{x_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}}$$

根据表 1－2－1 和表 1－2－2 的数据，通过数据拟合的方法(具体程序代码见第二章例题)，可得酵母培养物数量随时间的变化关系为

$$x(t)=\frac{663.022\,0}{1+\left(\dfrac{663.022\,0}{9.135\,5}-1\right)\mathrm{e}^{-0.547\,0t}}$$

拟合的效果图如图 1－2－2。

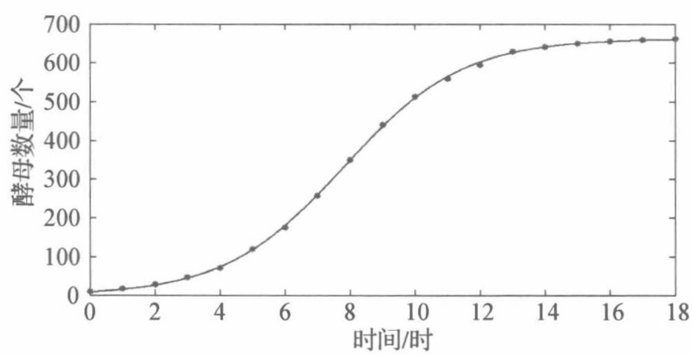


图 1－2－2　阻滞增长模型(Logistic 模型)的拟合的效果图

注:模型(1－2－2)称为**阻滞增长模型(Logistic 模型)**。阻滞增长模型是考虑到自然资源、环境条件等因素对种群增长的阻滞作用，对马尔萨斯(指数增长)模型的基本假设进行修改后得到的。阻滞增长模型(Logistic 模型)不仅可以用于刻画种群的增长，在其他领域也有许多应用，如第二次世界大战后，日本家电业界曾经使用 Logistic 模型建立的电饭煲销售模型，解决了产品的推广问题。事实上，现实生活中具有先快后慢，显现 S 形状增长的问题，都可以使用 Logistic 模型来刻画。

1.2.2　椅子能在不平的地面上放稳吗

问题的描述　椅子是大家经常用到的一件日常用品，当把一把椅子放在不平的地面上时，通常只有三只脚着地，放不稳，那么，能否通过挪动几次或旋转多次(或一次)就可以使椅子的四只脚同时着地而放稳？由日常生活经验，将椅子挪动几次或旋转多次就应该是可以放稳的。关于这一问题，如何用严格的数学语言来论证呢？

模型的假设 为了讨论问题方便，先做一些必要的假设：当椅子放在不平的地面上时，通常只有三只脚着地，此时椅子没有放稳，如果四只脚同时着地，则认为椅子被放稳；椅子四条腿一样长，椅脚与地面点接触，四脚连线呈正方形；地面相对平坦，使椅子在任意位置至少三只脚同时着地。

模型的建立 椅子在地面上移动可用旋转和平移两个变量来刻画。为简便起见，仅考虑旋转的情况。

首先，要把椅子位置用数学语言描述出来。设椅脚的连线为正方形 $ABCD$。取对角线 CA 为 x 轴，对角线 DB 为 y 轴，AC 与 BD 的交点 O 为原点，建立直角坐标系。

将椅子绕中心点 O 按逆时针方向旋转角度 θ 后的位置记为 $A'B'C'D'$（如图 1-2-3 所示）。记 $A'C'$ 两脚与地面的距离之和为 $f(\theta)$，$B'D'$ 两脚与地面的距离之和为 $g(\theta)$。

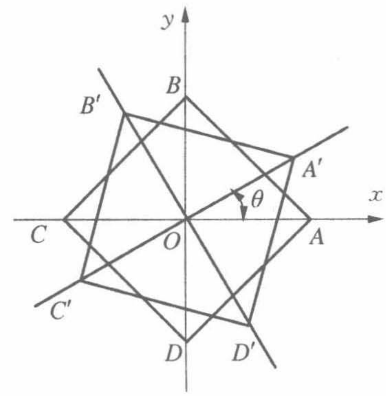


图 1-2-3 椅子的位置关系

由于地面为连续曲面，所以 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 是关于 θ 的连续函数。椅子在任意位置至少三只脚着地，即对任意 θ，有

$$f(\theta)g(\theta)=0$$

假设初始时刻椅子没有放稳，不妨假设 $g(0)=0$，$f(0)>0$，则椅子能否在不平的地面上放稳的问题转化为以下的数学问题。

已知：$f(\theta)$，$g(\theta)$ 是非负的连续函数，对任意 θ，有 $f(\theta)g(\theta)=0$，并且 $g(0)=0$，$f(0)>0$。 **求证**：存在 θ_0，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

证明：将椅子旋转90°，对角线 AC 和 BD 互换，由 $g(0)=0$，$f(0)>0$ 可知

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$$

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(0)>0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$。由 f，g 的连续性知，h 为连续函数，根据连续函数的基本性质，必存在 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得

$$h(\theta_0)=f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$$

因为对任意 θ，有 $f(\theta)g(\theta)=0$，所以

$$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$$

思考题

请大家进一步思考以下问题：

(1) 如果椅子的四脚连线呈长方形（或者为等腰梯形）时，如何建模与求解？

(2) 当四脚连线呈现什么一般形状时，椅子一定可以放稳？即寻找椅子能在不平的地面上放稳的充要条件。

1.2.3　商人们怎样安全过河

商人过河模型

问题的描述(智力游戏)　三名商人各带一个随从乘船渡河，一只小船只能容纳两人，由他们自己划行。随从们密约，在河的任一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货。但是如何乘船渡河的大权掌握在商人们手中，商人们怎样才能安全渡河呢？

1.3　全国大学生数学建模竞赛及其论文的写法

数学建模竞赛根据学生提交的论文评奖，以“假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰性”为主要评价标准，因此论文的撰写非常重要。关于论文的格式、内容和撰写方法，详细介绍如下。

1. 题目

论文题目是一篇论文给出的涉及论文范围及水平的第一个重要信息。要求简短精练、高度概括、准确得体。既要准确表达论文内容，恰当反映所研究的范围和深度，又要尽可能概括、精练。

2. 摘要

摘要是论文内容不加注释和评论的简短陈述，其作用是使读者不阅读论文全文即能获得必要的信息。在数学建模竞赛论文中，摘要是非常重要的一部分，摘要在整篇论文评阅中占有重要权重，需要认真书写。在地区和全国评阅时，首先根据摘要和论文整体结构及概貌对论文优劣进行初步筛选，然后再根据论文的内容确定获奖等级。

一般在写摘要时，可以按照以下的格式：首先用一两句话总体概括本文研究的内容；然后针对竞赛的几个问题分别叙述研究的思路、使用什么样的方法、建立什么样的模型、求解模型的方法、获得的基本结果等。论文摘要需要用概括、简练的语言反映这些内容，尤其要突出模型的优点，如建模方法、快速有效的算法、合理的推广等亮点。

3. 关键词

关键词 3 到 5 个，一般研究的对象、使用的方法技巧、建立的模型等都可以作为关键词。在数学建模竞赛论文中，题目、摘要、关键词单独占一页。

4. 问题重述

数学建模竞赛要求解决给定的具体问题，所以论文中应叙述给定问题。撰写这部分内容时，有的学生不动脑筋，照抄原题，这样不太好，应把握住问题的实质，用较精练的语言叙述原问题，并提出数学建模需要解决的问题。

5. 模型假设与符号说明

在数学建模时，要根据问题的特征和建模目的，抓住问题的本质，忽略次要因素，对问

题进行必要的简化,做出一些合理的假设。模型假设部分要求用精练、准确的语言列出问题中所给出的假设,以及为了解决问题作者所做的必要、合理的假设。假设做得不合理或太简单,会导致错误的或无用的模型;假设做得过分详尽,试图把复杂对象的众多因素都考虑进去,会使工作变得很难或无法继续下去,因此常常需要在合理与简化之间作出恰当的折中。因为这一项是论文评奖中的重要指标之一,所以必须逐一书写清楚。

6. 问题一的建模与求解

(1) 模型分析

针对第一个具体问题,首先进行**模型的分析**,通过分析,发现了什么规律、得到了什么有价值的线索。

(2) 模型建立

根据假设分析、建立模型,用数学的语言、符号描述对象的内在规律,得到一个数学结构。数学建模时应尽量采用简单的数学工具,使建立的模型易于被人理解。在撰写这一部分内容时,对所用的变量、符号、计量单位如果在第5部分没有说明,则在正文应做解释,**特定的变量和参数应在整篇文章中保持一致**。为使模型易懂,可借助于适当的图形、表格来描述问题或数据。因为这一部分是论文的核心内容,也是评奖中的重要指标之一,主要反映在“建模的创造性”上,所以必须认真撰写。

(3) 模型求解

使用各种数学方法或软件包求解数学模型。此部分应包括求解过程的公式推导、算法步骤及计算结果。为求解而编写的计算机程序应放在附录部分。有时需要对求解结果进行数学上的分析,如结果的误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏度分析等。因为这一项也是论文评奖中的重要指标之一,如果模型求解结果不正确,即使建模再有创造性,也影响评奖的结果。

注意:应把求解和分析结果翻译回实际问题中,与实际的现象、数据相比较,以检验模型的合理性和适用性。如果结果与实际不符,问题常出在模型假设上,应该修改、补充假设,重新建模、求解。

针对后面的问题二、三等分别做类似的叙述。建议大家把一个问题的模型分析、模型建立、模型求解写在一起,这样符合一般的习惯;不建议把几个问题的模型分析、建立、求解一股脑地放在一起。

7. 模型评价与推广

将自己论文中所建的模型与现有模型进行比较,以评价其优劣。将所建的模型推广到解决更多的类似问题,或讨论给出该模型的更一般情况下的解法,或指出可能的深化、推广及进一步研究的建议。

8. 参考文献

在正文中,引用文献资料论述某个观点时,应在所引用段落或句子的右上角,用方括弧进行脚注,并用阿拉伯数字注明资料的出处。正文中每引用一次文献资料,脚注时应用1,2,3……阿拉伯数字按先后次序分别排序,如××××××[1];××××××[2]。如引用两篇或两篇以上文献资料论述同一个观点时,应在所引用段落或句子的右上角方括弧中用以下方法注明,如××××××[4,5];×××××[6~8]。正文中进行脚注的数字序号应

与文后参考文献表中所列出的文献资料序号相对应。

专著的表述方式为:

[编号] 作者.书名.出版地:出版社,出版年

期刊论文的表述方式为:

[编号] 作者.篇名.刊名,出版年卷(期):页码

网上资源的表述方式为:

[编号] 作者.文章名.网页.下载年 月 日

例如:

[1] 赵静.数学建模与数学建模实验[M].北京:高等教育出版社,2008.

[2] 华罗庚,王元.论一致分布与近似分析[J].中国科学,1973(4):339~357.

[3] 王进.基于GIS的公路两侧土壤重金属污染空间分布及评价研究[J].http://d.g.wanfangdata.com.cn/Thesis_Y1394895.aspx,2011.9.11.

[4] 张筑生.微分半动力系统的不变集研究[D].北京:数学系统学研究所,1983.

习 题

1. 某人带狗、鸡、米用小船过河,船需要人划,另外至多还能载一物,而当人不在时,狗要吃鸡,鸡要吃米。问人、狗、鸡、米怎样过河?

2. 夫妻过河问题(阿拉伯早期的一道趣味数学题):有三对夫妻要过河,船最多能载两人,由于封建意识严重,要求任一女子不能在丈夫不在场的情况下与另外的男子在一起,如何安排三对夫妻过河?

3. 假设给你一杯咖啡和一杯牛奶,盛在杯子里的咖啡和牛奶数量相等,先从牛奶杯里舀出一满匙牛奶放入咖啡杯里搅匀,然后再从掺有牛奶的咖啡杯里舀出一满匙的咖啡放入牛奶杯里搅匀。此时,两个杯子里的液体在数量上相等。这样,咖啡杯里的牛奶和牛奶杯里的咖啡相比,哪个多呢?

4. 某人早上8:00从山下旅店出发沿一条路径上山,下午18:00到达山顶并留宿,次日早上8:00沿同一路径下山,下午18:00回到旅店,试证该人必在两天中的同一时刻经过路径中的同一地点。

5. 北方城镇的窗户玻璃是双层的,这样做的目的是使室内保温,试用数学建模的方法给出双层玻璃能减少热量损失的定量分析结果。

6. 将一块积木作为基础,在它上面叠放其他积木,问上、下积木之间的“向右前伸”可以达到多少?

7. 雨中行走问题:人们外出行走,途中遇雨,未带雨伞,势必淋雨,走多快才会少淋雨呢?

8. 有若干个鸟窝,它们之间的距离不等,如果从每个鸟窝都有一只鸟飞落到离它最近的另一鸟窝,试证每个鸟窝飞落下的鸟不超过五只。

9. 如果银行存款年利率为3.5%,问要求到2020年本利积累为两千万元,那么在2000年应在银行存入多少元?

10. 一昼夜有多少时刻互换长短针后仍表示一个时间?如何求出这些时间?