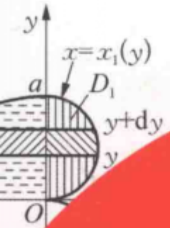
全无敌

一书多用 学练一体 考研复习

高等数学高分必备

解题方法和技巧分析



主编 殷锡鸣

以问题为主线，串联核心内容，突出解题应用

全面归纳+重点突出+题型经典+方法实用

关注微信公众号
获取习题参考答案

扫码线上练习和自测
让你的学习更精准

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学高分必备解题方法和技巧分析 / 殷锡鸣主编. —上海：华东理工大学出版社，2022.02

ISBN 978-7-5628-6063-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①殷… Ⅲ.①高等数学-高等学校-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 184500 号

内 容 提 要

本书按照教育部颁布的"高等数学"教学大纲要求进行编写，注重数学思想、方法和技巧三位一体，结合了作者在教学一线总结出的高等数学学习中所需的认知规律与解题方法。

本书的重点是各章典型例题分析中给出的解题指导与错误辨析。典型例题是为解决学生在学习过程中暴露出的普遍问题而精心安排的，力求具有代表性，由浅入深，通过对不同问题、不同解法的讨论以及对初学者易犯错误进行的剖析，使学生加深对高等数学中概念、定理的理解，并学会对解题方法与技巧进行归纳和总结，提高分析问题和解决问题的能力。

本书中题型典型、全面，且所给出的例题和习题难度系数不尽相同，因此本书适合高等院校各层次的学生使用，也可作为考研者的复习资料。

项目统筹 / 吴蒙蒙
责任编辑 / 吴蒙蒙
责任校对 / 石 曼 陈 涵
装帧设计 / 徐 蓉
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地址：上海市梅陇路 130 号，200237
电话：021-64250306
网址：www.ecustpress.cn
邮箱：zongbianban@ecustpress.cn
印 刷 / 常熟市华顺印刷有限公司
开 本 / 889 mm×1194 mm 1/16
印 张 / 48
字 数 / 1718 千字
版 次 / 2022 年 2 月第 1 版
印 次 / 2022 年 2 月第 1 次
定 价 / 198.00 元

前　言

长期以来,高等数学课程以学分高、概念抽象、内容多、习题量大、范围广、解题方法多、技巧性强等特点成为大学课程学习和研究生入学考试的一道"坎".当前学生存在的普遍问题是拿到习题时无从下手,对问题不会分析,不知用什么方法和工具来求解.究其原因,是学生在平时的学习中缺乏对高等数学习题所涉及问题的归类和整理;缺乏对习题特点和解题方法特点的归纳总结;缺乏对概念、定理、公式等解题工具如何运用、为什么运用的理解;缺乏对问题进行思考、分析等能力的培养和训练.因此,如何让学生在课程学习和考研复习中能够全面了解高等数学中的主要问题;理解和掌握其中的主要解题方法和解题技巧;知晓方法运用的所以然;掌握分析问题的思考方法;能举一反三跨越考试这道"坎",实现高分的目标,就成为我们要解决的问题.

本书正是在这一目标的指引下组织编写的,它是一本针对高等数学解题方法、解题技巧方面的学习指导书.希望本书的尝试和探索能为广大学生提供富有成效的指导和帮助,让高等数学这道"坎"变成他们走向成功的起跑点.

本书的编写主要具有以下特点.

1. 以问题为主线,将概念、定理、公式融入对问题的求解方法中,突出解题应用

高等数学的一大特点是"三多",即"概念多、定理多、公式多",许多初学者在遇到问题时,普遍感到的困难是无法确定这些概念、定理、公式应该在什么场合运用,如何运用以及为什么要运用.因此,本书在内容体系的安排上选择了更贴近学生的方式.以章为单元,以每章中的主要问题求解方法来串联该章的概念、定理、公式,从而把每章的主要概念、定理、公式融入问题的解决方法中.这样处理的好处是使学生更清晰地看到各章节中的主要问题是什么,章节中的各个数学概念、定理、公式等工具是怎么使用的,它们通常用来解决什么问题,从而使学生掌握每一章的核心内容与方法.

2. 围绕主要问题,归纳解题方法,重点突出对解题思想和解题方法的分析

高等数学的另一大特点是习题量大、涉及面广,所以归纳出每一章的主要问题对高等数学的学习是极其重要的.同时,我们认为对解题方法、解题思路、解题经验的分析和总结比解题过程更为重要.所以本书在每一章的内容安排上采用了以下形式:

首先,给出这一章要解决的主要问题.

然后,针对每一个要解决的主要问题,介绍这一问题求解的基本方法.

接着,在"方法运用注意点"中给出这些基本方法的特点、运用时的注意点以及对一些基本概

念的理解等内容.

紧接着,运用基本方法求解典型问题.我们对每一个例题都给出了详尽的解题方法分析,讲清楚本题为什么是这样解的,力求把所以然交代给学生.

最后,给出运用这一基本方法的小结.小结中包含运用这一基本方法求解这类问题的分析思考的步骤、这一方法的适用场合以及方法的运用经验等内容.我们认为把解题方法、解题思路进行归纳和总结,并把长期积累的解题经验归纳后传授给学生,这对他们解题能力的提高非常有效.

全书做到每章中的主要问题典型,基本方法清晰完整,解题方法分析透彻,归纳总结全面的编写目的.

3. 例题和习题典型、丰富,体现问题和解题方法的完整性

全书共列举了 923 个例题,它们来自一些经典教材中的例题和一些能够体现方法特点的习题,以及历年考研数学中的典型原题.

全书提供了 513 个书后练习题,这些练习题与书中例题及方法相配套,学生在理解了例题之后,通过举一反三,就可求解这些练习题.

本书中题型典型、全面,且题目的难度系数也不尽相同,因此本书适合各层次的学生使用,同时也可作为考研学生的参考资料.

4. 引入“千笔考研”网,提供网上个性化练习和测试,形成“学练”完整体系

学好高等数学的基本前提是多做习题.只有对各种题型、各种难度的习题进行充分的练习,才能在考试中“见多识广”,应付自如.当前学生自我练习遇到的最大困难是,练习只能对答案,得不到批改,也不知出错的原因,使用错误的知识点也得不到纠正,不能准确了解自己的实际解题能力和水平.

由于看书学习和练习是一个不可分割的统一体,为了解决学生在练习中出现的以上困难,本书将书中每一目所表示的问题与“千笔考研”App 的对应练习章节相关联.通过与网上练习平台的结合,我们希望为有进一步深入学习计划和准备考研的学生提供一个方便的、个性化的网上自我练习和自我测试平台.

“千笔考研”App 有以下功能特点:

(1) 能够根据学生的知识水平、薄弱环节,智能化、循序渐进地为其量身定制练习卷.推出的每份练习卷都能够准确贴近学生的实际水平和薄弱知识点,使学生能做到有针对性的、循序渐进的练习.

(2) 不需要在线上输入解题结果,只需对线上分步显示的“选项”,按照自己在该步的解题结果进行“选项”选择,选完即完成提交.

(3) 自动向学生反馈在练习中出现的问题,指出解题错在哪一步,反馈使用错误的知识点.

(4) 提供“错题和错误知识点收藏夹”,供学生收藏自己做错的题和曾经出错的知识点,方便复习.

(5) 能够根据学生在每章节中的练习情况,给出学生对每章节的内容综合熟练度、综合计算能力、综合技巧水平等解题能力指标的评价,帮助学生掌握自己的学习水平.

本书引入高等数学线上练习平台，这是线下解题辅导书与线上练习的一次功能优势互补的实践和探索.需要的读者可以通过访问网址 http：//www.qpenedu.com/或扫描二维码，安装“千笔考研”App，注册后即可进行学习（注："千笔考研"App 提供的服务不属于本书的服务范畴）.

本书由华东理工大学理学院组织编写.全书共分 14 章，其中第 2、3、5、12、13 章由殷锡鸣教授编写；第 6、7、10 章由李红英副教授编写；第 8、14 章由江志松副教授编写；第 4、11 章由孟雅琴副教授编写；第 9 章由宋洁副教授编写；第 1 章由方民副教授编写.全书由殷锡鸣统稿和定稿.在编写过程中，得到了华东理工大学理学院李建奎院长、数学系主任郭继民教授及出版社领导的大力关心和支持，在此表示衷心的感谢.同时，我们还要感谢长期从事高等数学教学的苏纯洁、杨勤民、邵方明、赵建丛、贺秀霞、吕雪芹、胡海燕、李继根、李义龙等老师，他们在本书的编写过程中提出了许多宝贵的建议.

由于编者水平有限，书中难免留存错漏和不妥之处，敬祈专家、读者予以指正.

编者　于华理园

2021 年 3 月

目　　录

第 1 章 函数

函数是高等数学研究的主要对象，也是高等数学中最重要的基本概念之一.掌握函数的基本概念和基本运算，了解函数的基本性质，对高等数学的学习非常重要.

1.1 本章解决的主要问题

(1) 确定函数的定义域；

(2) 函数的运算及其表达式计算；

(3) 函数的几何性质及其应用.

1.2 典型问题解题方法与分析

1.2.1 函数定义域的确定

▶▶▶基本方法

利用基本初等函数、函数的运算性质，计算复合函数和反函数的定义域.

(1) 复合函数的定义域：

由函数 $y=f(u)$（定义域为 D_1）与 $u=\varphi(x)$（定义域为 D_2，值域为 Z）复合而成的函数 $y=f[\varphi(x)]$，当 $D_1\cap Z\neq\varnothing$ 才有意义，且复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $D=\{x \mid x\in D_2,\ \varphi(x)\in D_1\cap Z\}$.

(2) 反函数的定义域：

若 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z，则其反函数的定义域为 Z，值域为 D.

▶▶▶重要结论

(1) $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，$y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ 的定义域是 $|x|\leqslant 1$.

(3) $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 的定义域是 $x>0$.

(4) 函数含分式,则使分母为零的实数不属于函数的定义域.

(5) 函数含偶次根式,则使根式中的表达式为负的实数不属于函数的定义域.

方法运用注意点

(1) 求函数的定义域是要寻找使得函数有意义的自变量的范围,特别要注意含分式、根式、对数和反三角函数.

(2) 对于由 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,其定义域中的点一定要使 x 所确定的 $u=\varphi(x)$ 包含在 $y=f(u)$ 的定义域内.

典型例题解析

例 1-1 求函数 $y=\ln\left[\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$ 的定义域.

分析: 寻找使 $\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$ 的 x 的范围.

解: 函数定义域中的点首先需满足 $x^2-1\geqslant 0$, $\left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant 1$. 解不等式组

$$x\leqslant -1,\ x\geqslant 1,\text{且}-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},$$

得 $1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$. 此时 $\frac{1}{2}\leqslant x-\frac{1}{2}\leqslant 1$, $\frac{\pi}{6}\leqslant\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{\pi}{2}$,从而$\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$. 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

例 1-2 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $y=f\left(1-\frac{4}{\pi}\arctan x\right)$; (2) $y=f\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\right)+f\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{2}\right)$.

分析: (1) 寻找使 $0\leqslant 1-\frac{4}{\pi}\arctan x\leqslant 1$ 的 x 的范围.

(2) 寻找同时满足 $0\leqslant\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\leqslant 1$, $0\leqslant\frac{3}{2}-\frac{x}{2}\leqslant 1$ 的 x 的范围.

解: (1) 解不等式 $1-\frac{4}{\pi}\arctan x\geqslant 0$,得 $x\leqslant 1$; 解不等式 $1-\frac{4}{\pi}\arctan x\leqslant 1$,得 $x\geqslant 0$. 所以函数的定义域为$[0,1]$.

(2) 解不等式 $0\leqslant\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\leqslant 1$,得 $-2\leqslant x\leqslant 2$; 解不等式 $0\leqslant\frac{3}{2}-\frac{x}{2}\leqslant 1$,得 $1\leqslant x\leqslant 3$. 所以函数的定义域为 $[1,2]$.

例 1-3 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & -1<x\leqslant 0\\ x-1, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$,求函数 $f(x^2-1)$ 的定义域.

分析：分段函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1, 2]$，故 $f(x^2-1)$ 定义域中的点应要求 $x^2-1\in(-1, 2]$.

解：令 $u=x^2-1$，要使 $u\in(-1, 2]$，即 $-1<x^2-1\leqslant 2$，需满足 $0<x^2\leqslant 3$，即 $|x|\leqslant\sqrt{3}$，$x\neq 0$. 所以函数的定义域为 $[-\sqrt{3}, 0)\cup(0, \sqrt{3}]$.

例 1-4 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1-2x}{1+x}, & x>0\end{cases}$ 的反函数 $\varphi(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的定义域.

分析：由于 $f(x)$ 是分段函数，故应先确定每一区间段上 $f(x)$ 的值域，在每一值域段上求该段上的反函数，再合起来.

解：当 $x\leqslant 0$ 时，$1\leqslant f(x)<+\infty$，且 $f(x)$ 单调减少. 从 $y=x^2+1$ 中解得 $x=-\sqrt{y-1}$，反函数 $y=-\sqrt{x-1}$，$x\geqslant 1$.

当 $x>0$ 时，$f(x)=1-\dfrac{3x}{1+x}<1$，又 $f(x)=-2+\dfrac{3}{1+x}>-2$，即 $-2<f(x)<1$，且 $f(x)$ 单调减少. 从 $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$ 中解得 $x=\dfrac{1-y}{2+y}$，反函数 $y=\dfrac{1-x}{2+x}$，$-2<x<1$. 所以 $f(x)$ 的反函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{2+x}, & -2<x<1\\ -\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases},$$

其定义域为 $(-2, +\infty)$.

▶▶▶方法小结

(1) 对于初等函数的定义域，由于初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合运算而成的函数，所以先要求出使函数各部分有意义的自变量范围，再取其公共部分就可得到初等函数的定义域.

(2) 分段函数的定义域是把不同表达式的自变量范围合并起来.

(3) 反函数的定义域就是函数的值域，对于分段函数，还需逐段确定其值域再进行合并.

1.2.2 函数的运算及其表达式的计算

▶▶▶基本方法

(1) 利用基本初等函数的性质求函数表达式；

(2) 利用复合函数的定义求复合函数表达式及其复合函数的分解；

(3) 利用函数关系求反函数表达式；

(4) 利用变量代换求函数表达式；

(5) 曲线的极坐标表示及常见的极坐标曲线.