



高等数学

高分必备

解题方法和技巧分析

主编 殷锡鸣

以问题为主线，串联核心内容，突出解题应用

全面归纳+重点突出+题型经典+方法实用



关注微信公众号
获取习题参考答案



扫码线上练习和自测
让你的学习更精准

图书在版编目(CIP)数据

高等数学高分必备解题方法和技巧分析 / 殷锡鸣主编. —上海: 华东理工大学出版社, 2022.02
ISBN 978-7-5628-6063-1

I. ①高… II. ①殷… III. ①高等数学-高等学校-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 184500 号

内 容 提 要

本书按照教育部颁布的“高等数学”教学大纲要求进行编写,注重数学思想、方法和技巧三位一体,结合了作者在教学一线总结出的高等数学学习中所需的认知规律与解题方法。

本书的重点是各章典型例题分析中给出的解题指导与错误辨析。典型例题是为解决学生在学习过程中暴露出的普遍问题而精心安排的,力求具有代表性,由浅入深,通过对不同问题、不同解法的讨论以及对初学者易犯错误进行的剖析,使学生加深对高等数学中概念、定理的理解,并学会对解题方法与技巧进行归纳和总结,提高分析问题和解决问题的能力。

本书中题型典型、全面,且所给出的例题和习题难度系数不尽相同,因此本书适合高等院校各层次的学生使用,也可作为考研者的复习资料。

项目统筹 / 吴蒙蒙

责任编辑 / 吴蒙蒙

责任校对 / 石 曼 陈 涵

装帧设计 / 徐 蓉

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地址: 上海市梅陇路 130 号, 200237

电话: 021-64250306

网址: www.ecustpress.cn

邮箱: zongbianban@ecustpress.cn

印 刷 / 常熟市华顺印刷有限公司

开 本 / 889 mm × 1194 mm 1/16

印 张 / 48

字 数 / 1718 千字

版 次 / 2022 年 2 月第 1 版

印 次 / 2022 年 2 月第 1 次

定 价 / 198.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

长期以来,高等数学课程以学分高、概念抽象、内容多、习题量大、范围广、解题方法多、技巧性强等特点成为大学课程学习和研究生入学考试的一道“坎”.当前学生存在的普遍问题是拿到习题时无从下手,对问题不会分析,不知用什么方法和工具来求解.究其原因,是学生在平时的学习中缺乏对高等数学习题所涉及问题的归类和整理;缺乏对习题特点和解题方法特点的归纳总结;缺乏对概念、定理、公式等解题工具如何运用、为什么运用的理解;缺乏对问题进行思考、分析等能力的培养和训练.因此,如何让学生在课程学习和考研复习中能够全面了解高等数学中的主要问题;理解和掌握其中的主要解题方法和解题技巧;知晓方法运用的所以然;掌握分析问题的思考方法;能举一反三跨越考试这道“坎”,实现高分的目标,就成为我们要解决的问题.

本书正是在这一目标的指引下组织编写的,它是一本针对高等数学解题方法、解题技巧方面的学习指导书.希望本书的尝试和探索能为广大学生提供富有成效的指导和帮助,让高等数学这道“坎”变成他们走向成功的起跑点.

本书的编写主要具有以下特点.

1. 以问题为主线,将概念、定理、公式融入对问题的求解方法中,突出解题应用

高等数学的一大特点是“三多”,即“概念多、定理多、公式多”,许多初学者在遇到问题时,普遍感到的困难是无法确定这些概念、定理、公式应该在什么场合运用,如何运用以及为什么要运用.因此,本书在内容体系的安排上选择了更贴近学生的方式.以章为单元,以每章中的主要问题求解方法来串联该章的概念、定理、公式,从而把每章的主要概念、定理、公式融入问题的解决方法中.这样处理的好处是使学生更清晰地看到各章节中的主要问题是什么,章节中的各个数学概念、定理、公式等工具是怎么使用的,它们通常用来解决什么问题,从而使学生掌握每一章的核心内容与方法.

2. 围绕主要问题,归纳解题方法,重点突出对解题思想和解题方法的分析

高等数学的另一大特点是习题量大、涉及面广,所以归纳出每一章的主要对高等数学的学习是极其重要的.同时,我们认为对解题方法、解题思路、解题经验的分析和总结比解题过程更为重要.所以本书在每一章的内容安排上采用了以下形式:

首先,给出这一章要解决的主要问题.

然后,针对每一个要解决的主要问题,介绍这一问题求解的基本方法.

接着,在“方法运用注意点”中给出这些基本方法的特点、运用时的注意点以及对一些基本概

念的理解等内容。

紧接着,运用基本方法求解典型问题.我们对每一个例题都给出了详尽的解题方法分析,讲清楚本题为什么是这样解的,力求把所以然交代给学生。

最后,给出运用这一基本方法的小结.小结中包含运用这一基本方法求解这类问题的分析思考的步骤、这一方法的适用场合以及方法的运用经验等内容.我们认为把解题方法、解题思路进行归纳和总结,并把长期积累的解题经验归纳后传授给学生,这对他们解题能力的提高非常有效。

全书做到每章中的主要问题典型,基本方法清晰完整,解题方法分析透彻,归纳总结全面的编写目的。

3. 例题和习题典型、丰富,体现问题和解题方法的完整性

全书共列举了 923 个例题,它们来自一些经典教材中的例题和一些能够体现方法特点的习题,以及历年考研数学中的典型原题。

全书提供了 513 个书后练习题,这些练习题与书中例题及方法相配套,学生在理解了例题之后,通过举一反三,就可求解这些练习题。

本书中题型典型、全面,且题目的难度系数也不尽相同,因此本书适合各层次的学生使用,同时也可作为考研学生的参考资料。

4. 引入“千笔考研”网,提供网上个性化练习和测试,形成“学练”完整体系

学好高等数学的基本前提是多做习题.只有对各种题型、各种难度的习题进行充分的练习,才能在考试中“见多识广”,应付自如.当前学生自我练习遇到的最大困难是,练习只能对答案,得不到批改,也不知出错的原因,使用错误的知识点也得不到纠正,不能准确了解自己的实际解题能力和水平。

由于看书学习和练习是一个不可分割的统一体,为了解决学生在练习中出现的以上困难,本书将书中每一目所表示的问题与“千笔考研”App 的对应练习章节相关联.通过与网上练习平台的结合,我们希望为有进一步深入学习和准备考研的学生提供一个方便的、个性化的网上自我练习和自我测试平台。

“千笔考研”App 有以下功能特点:

(1) 能够根据学生的知识水平、薄弱环节,智能化、循序渐进地为其量身定制练习卷.推出的每份练习卷都能够准确贴近学生的实际水平和薄弱知识点,使学生能做到有针对性的、循序渐进的练习。

(2) 不需要在线上输入解题结果,只需对线上分步显示的“选项”,按照自己在该步的解题结果进行“选项”选择,选完即完成提交。

(3) 自动向学生反馈在练习中出现的问题,指出解题错在哪一步,反馈使用错误的知识点。

(4) 提供“错题和错误知识点收藏夹”,供学生收藏自己做错的题和曾经出错的知识点,方便复习。

(5) 能够根据学生在每章节中的练习情况,给出学生对每章节的内容综合熟练度、综合计算能力、综合技巧水平等解题能力指标的评价,帮助学生掌握自己的学习水平。

本书引入高等数学线上练习平台,这是线下解题辅导书与线上练习的一次功能优势互补的实践和探索.需要的读者可以通过访问网址 <http://www.qpenedu.com/>或扫描二维码,安装“千笔考研”App,注册后即可进行学习(注:“千笔考研”App提供的服务不属于本书的服务范畴).



本书由华东理工大学理学院组织编写.全书共分14章,其中第2、3、5、12、13章由殷锡鸣教授编写;第6、7、10章由李红英副教授编写;第8、14章由江志松副教授编写;第4、11章由孟雅琴副教授编写;第9章由宋洁副教授编写;第1章由方民副教授编写.全书由殷锡鸣统稿和定稿.在编写过程中,得到了华东理工大学理学院李建奎院长、数学系主任郭继民教授及出版社领导的大力关心和支持,在此表示衷心的感谢.同时,我们还要感谢长期从事高等数学教学的苏纯洁、杨勤民、邵方明、赵建丛、贺秀霞、吕雪芹、胡海燕、李继根、李义龙等老师,他们在本书的编写过程中提出了许多宝贵的建议.

由于编者水平有限,书中难免留存错漏和不妥之处,敬祈专家、读者予以指正.

编者 于华理园

2021年3月

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 本章解决的主要问题	1
1.2 典型问题解题方法与分析	1
1.2.1 函数定义域的确定	1
1.2.2 函数的运算及其表达式的计算	3
1.2.2.1 利用基本初等函数的性质求函数表达式	4
1.2.2.2 利用复合函数的定义求复合函数的表达式及复合函数的分解	6
1.2.2.3 利用函数关系求反函数表达式	9
1.2.2.4 利用变量代换求函数表达式	11
1.2.2.5 曲线的极坐标表示及常见的极坐标曲线	12
1.2.3 函数的几何性质及其应用	15
1.2.3.1 函数奇偶性的判别	15
1.2.3.2 函数周期性的判别	17
1.2.3.3 函数单调性的判别	20
1.2.3.4 函数有界性的判别	22
1.3 习题一	24
第 2 章 导数与极限	26
2.1 本章解决的主要问题	26
2.2 典型问题解题方法与分析	26
2.2.1 函数极限的计算	26
2.2.1.1 利用极限的四则运算法则求极限	27
2.2.1.2 利用两个重要极限求极限	29
2.2.1.3 利用等价无穷小代换求极限	32
2.2.1.4 利用变量代换求极限	34
2.2.1.5 利用“有界量与无穷小的乘积仍为无穷小”的结论求极限	35
2.2.1.6 利用“极限基本定理”求极限	36
2.2.1.7 利用函数的连续性求极限	38

2.2.1.8	利用“夹逼准则”求极限	39
2.2.2	分段函数在分段点处极限的计算	41
2.2.3	数列极限的计算	44
2.2.3.1	利用数列极限的性质以及计算函数极限的一些方法计算	44
2.2.3.2	利用“夹逼准则”求数列极限	46
2.2.3.3	利用“单调有界收敛准则”计算数列极限	49
2.2.3.4	利用数列极限的定义计算极限	51
2.2.4	无穷小的比较及其阶数和主部的计算	53
2.2.4.1	利用无穷小的阶的定义比较或确定无穷小的阶	53
2.2.4.2	利用等价无穷小代换求无穷小的阶数和主部	55
2.2.4.3	利用“无穷小等价的充要条件”求无穷小的阶数和主部	57
2.2.5	函数连续性的判别	59
2.2.5.1	利用函数连续的定义讨论函数连续性	59
2.2.5.2	利用初等函数的连续性性质讨论函数连续性	61
2.2.5.3	利用连续与左右连续间的等价关系讨论函数连续性	62
2.2.6	函数间断点类型的判别	64
2.2.7	闭区间上连续函数的性质及其应用	67
2.2.7.1	闭区间上连续函数性质在方程根的存在性问题中的应用	67
2.2.7.2	闭区间上连续函数性质在等式证明问题中的应用	68
2.2.8	显函数的导数计算	72
2.2.8.1	利用导数的定义求导数	72
2.2.8.2	利用导数的四则运算法则、复合函数求导法则、反函数求导法则求导数	76
2.2.8.3	利用对数求导法则求导数	81
2.2.9	分段函数的导数计算及其在分段点处的可导性问题	83
2.2.10	隐函数的导数计算	87
2.2.11	由参数方程、极坐标方程确定的函数的导数计算	90
2.2.12	高阶导数的计算	93
2.2.12.1	显函数的高阶导数计算	93
2.2.12.2	隐函数的高阶导数计算	101
2.2.12.3	由参数方程、极坐标方程确定的函数的高阶导数计算	103
2.3	习题二	106
第3章	微分学的基本定理	111
3.1	本章解决的主要问题	111
3.2	典型问题解题方法与分析	111
3.2.1	微分的计算	111

3.2.2	微分在近似计算中的应用	115
3.2.2.1	利用函数的线性近似计算函数近似值	115
3.2.2.2	微分在函数增量估计中的应用	117
3.2.3	罗尔定理、费马定理在证明函数零点问题中的应用	119
3.2.4	微分中值定理在等式证明问题中的应用	125
3.2.4.1	运用函数恒等于常数的条件证明恒等式	125
3.2.4.2	运用函数的零点问题证明等式	126
3.2.4.3	运用拉格朗日、柯西中值定理证明等式	129
3.2.5	拉格朗日、柯西中值定理在不等式证明问题中的应用	134
3.2.6	洛必达法则计算极限的应用	138
3.2.6.1	$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 未定型极限的计算	139
3.2.6.2	$0 \cdot \infty, \infty - \infty$ 未定型极限的计算	142
3.2.6.3	$1^\infty, \infty^0, 0^0$ 未定型极限的计算	147
3.2.7	函数的泰勒公式展开及其泰勒公式在极限问题中的应用	150
3.2.7.1	函数的泰勒公式展开	150
3.2.7.2	泰勒公式在极限问题中的应用	154
3.2.8	泰勒公式在等式与不等式证明问题中的应用	159
3.2.8.1	泰勒公式在等式证明问题中的应用	159
3.2.8.2	泰勒公式在不等式证明问题中的应用	162
3.3	习题三	165
第 4 章	导数的应用	169
4.1	本章解决的主要问题	169
4.2	典型问题解题方法与分析	169
4.2.1	函数单调性的判别及其单调性在不等式证明问题中的应用	169
4.2.1.1	函数单调性的判别	169
4.2.1.2	单调性在不等式证明问题中的应用	172
4.2.2	函数极值、最值的计算及其最值问题的应用	174
4.2.2.1	函数极值的计算	175
4.2.2.2	函数最值的计算及最值应用问题	180
4.2.2.3	运用函数最值证明不等式	184
4.2.3	函数凹凸性的判别、拐点的计算以及运用凹凸性证明不等式	186
4.2.3.1	函数凹凸性的判别	186
4.2.3.2	曲线拐点的计算	188
4.2.3.3	运用函数的凹凸性证明不等式	191
4.2.4	方程根个数的判别	193

4.2.5	曲率的计算	194
4.2.6	渐近线的计算	197
4.2.7	函数图形的描绘	201
4.2.8	相关变化率的计算	203
4.3	习题四	206
第5章	积分	210
5.1	本章解决的主要问题	210
5.2	典型问题解题方法与分析	210
5.2.1	运用定积分性质、牛顿-莱布尼茨公式计算定积分	210
5.2.2	变限积分函数的导数计算	212
5.2.3	变限积分函数的单调性、极值、最值、凹凸性问题	216
5.2.4	与积分有关的极限问题	219
5.2.5	积分等式的证明(一)——运用积分性质和微分学的方法	225
5.2.6	积分不等式的证明(一)——运用积分性质和微分学的方法	232
5.3	习题五	242
第6章	积分法	245
6.1	本章解决的主要问题	245
6.2	典型问题解题方法与分析	245
6.2.1	不定积分的计算	245
6.2.1.1	运用不定积分的运算性质、基本积分公式计算不定积分	245
6.2.1.2	运用不定积分的第一换元法(凑微分法)计算不定积分	246
6.2.1.3	运用不定积分的第二换元法计算不定积分	251
6.2.1.4	运用不定积分的分部积分法计算不定积分	255
6.2.1.5	有理式、三角有理式和简单无理函数的不定积分计算	264
6.2.2	定积分的计算	272
6.2.2.1	运用定积分的凑微分法计算定积分	272
6.2.2.2	运用定积分的换元法计算定积分	276
6.2.2.3	运用定积分的分部积分法计算定积分	279
6.2.2.4	运用奇偶函数、周期函数的定积分性质计算定积分	283
6.2.3	积分等式与积分不等式的证明问题(二)——运用定积分计算的方法	287
6.2.3.1	运用定积分计算法证明积分等式	288
6.2.3.2	运用定积分计算法证明积分不等式	294
6.2.4	定积分在数列极限计算中的应用	296
6.3	习题六	298

第 7 章 定积分的应用与广义积分	302
7.1 本章解决的主要问题	302
7.2 典型问题解题方法与分析	302
7.2.1 平面图形面积的计算	302
7.2.1.1 在直角坐标系下计算平面图形的面积	302
7.2.1.2 在极坐标系下计算平面图形的面积	306
7.2.2 平面曲线弧长的计算	311
7.2.3 立体体积的计算	313
7.2.3.1 平行截面面积为已知的立体体积计算	314
7.2.3.2 旋转体体积的计算	316
7.2.4 旋转体侧面积的计算	321
7.2.5 变力对直线移动物体做功的计算	324
7.2.6 液体对平板侧面压力的计算	328
7.2.7 广义积分的计算	330
7.2.7.1 无穷区间上的广义积分计算	330
7.2.7.2 无界函数的广义积分计算	337
7.3 习题七	343
第 8 章 无穷级数	347
8.1 本章解决的主要问题	347
8.2 典型问题解题方法与分析	347
8.2.1 数项级数的敛散性判别	347
8.2.1.1 利用级数定义及基本性质判别级数的敛散性	347
8.2.1.2 利用正项级数的判别法判别正项级数的敛散性	350
8.2.1.3 利用绝对收敛、莱布尼茨判别法、级数性质判别任意项级数的敛散性	362
8.2.2 幂级数以及与幂级数有关的函数项级数收敛域的计算	368
8.2.2.1 非缺项幂级数的收敛域的计算	369
8.2.2.2 缺项幂级数的收敛域的计算	371
8.2.2.3 一些与幂级数有关的函数项级数收敛域的计算	373
8.2.3 函数的幂级数展开	375
8.2.3.1 直接展开法	375
8.2.3.2 间接展开法	377
8.2.4 幂级数、数项级数的求和	385
8.2.4.1 幂级数求和	385
8.2.4.2 数项级数求和	391

8.3 习题八	397
第9章 常微分方程	401
9.1 本章解决的主要问题	401
9.2 典型问题解题方法与分析	401
9.2.1 一阶微分方程的求解	401
9.2.1.1 求解一阶可分离变量方程的分离变量法	401
9.2.1.2 求解一阶线性方程的公式法	403
9.2.1.3 求解齐次型方程、伯努利方程的变量代换法	405
9.2.1.4 一阶微分方程的变量代换法及其应用举例	411
9.2.2 二阶可降阶微分方程的求解	413
9.2.2.1 不显含因变量 y 的方程 $y'' = f(x, y')$ 的求解	413
9.2.2.2 不显含自变量 x 的方程 $y'' = f(y, y')$ 的求解	415
9.2.3 高阶线性微分方程的求解	418
9.2.3.1 高阶常系数线性齐次微分方程的求解	418
9.2.3.2 高阶常系数线性非齐次微分方程的求解	422
9.2.3.3 变量代换法求解欧拉方程以及其他高阶方程	431
9.2.4 微分方程的应用以及一些有关的问题	436
9.2.4.1 微分方程在函数方程和积分方程问题中的应用	436
9.2.4.2 微分方程在几何问题上的应用	439
9.2.4.3 微分方程在变化率问题中的应用	442
9.2.4.4 微分方程在一些物理问题中的应用	444
9.2.4.5 微元法在建立微分方程中的应用	448
9.3 习题九	451
第10章 向量与空间解析几何	455
10.1 本章解决的主要问题	455
10.2 典型问题解题方法与分析	455
10.2.1 向量的几何与代数运算	455
10.2.1.1 向量的几何运算	455
10.2.1.2 向量的代数运算	461
10.2.2 平面方程的计算	464
10.2.2.1 利用平面的点法式方程求平面方程	465
10.2.2.2 利用平面的一般式方程求平面方程	467
10.2.2.3 利用平面的截距式方程求平面方程	470
10.2.2.4 利用三向量共面的充要条件求平面方程	471
10.2.2.5 利用过直线的平面束方程求平面方程	473

10.2.3	直线方程的计算	476
10.2.3.1	利用直线的点向式方程求直线方程	476
10.2.3.2	利用直线的一般式方程求直线方程	483
10.2.4	点到平面、点到直线、异面直线间距离的计算	486
10.2.4.1	点到平面距离的计算	486
10.2.4.2	点到直线距离的计算	487
10.2.4.3	异面直线间距离的计算	489
10.2.5	平面与平面、直线与直线、直线与平面间的夹角计算	491
10.2.5.1	两平面间夹角的计算	491
10.2.5.2	直线与平面、直线与直线之间夹角的计算	492
10.2.6	旋转曲面、柱面以及其他二次曲面方程的计算	494
10.2.6.1	旋转曲面方程的计算	494
10.2.6.2	柱面方程的识别和计算	496
10.2.6.3	二次曲面方程计算以及有关的其他问题	498
10.2.7	空间曲线在平面或坐标面上投影曲线的计算	502
10.3	习题十	504
第 11 章	多元函数微分学	508
11.1	本章解决的主要问题	508
11.2	典型问题解题方法与分析	508
11.2.1	多元函数的复合及定义域的计算	508
11.2.1.1	求多元函数定义域的方法	508
11.2.1.2	多元函数的复合及其应用	510
11.2.2	多元函数的极限计算及连续性的判定	511
11.2.2.1	多元函数极限的计算	512
11.2.2.2	多元函数连续性的判定	516
11.2.3	显函数形式表示的多元函数的偏导数计算	518
11.2.3.1	利用偏导数的定义及一元函数求导法则求偏导数	518
11.2.3.2	利用多元复合函数的链式法则计算偏导数	523
11.2.3.3	利用全微分计算偏导数	527
11.2.4	隐函数的偏导数计算	530
11.2.4.1	由一个方程确定的隐函数偏导数的计算	530
11.2.4.2	由方程组确定的隐函数偏导数的计算	533
11.2.5	多元函数可微性的讨论和全微分的计算	536
11.2.6	高阶偏导数的计算	541
11.2.7	方向导数、梯度的计算与应用	550
11.2.8	多元函数微分学在几何上的应用	555

11.2.8.1	空间曲线的切线与法平面方程的计算	555
11.2.8.2	空间曲面的切平面与法线方程的计算	558
11.2.9	多元函数的极值与最值计算	561
11.2.9.1	多元函数局部极值的计算	562
11.2.9.2	多元函数条件极值的计算	564
11.2.9.3	多元函数最值的计算及其应用问题	567
11.3	习题十一	572
第 12 章	多元函数的积分及其应用	578
12.1	本章解决的主要问题	578
12.2	典型问题解题方法与分析	578
12.2.1	二重积分的计算	578
12.2.1.1	在直角坐标系下计算二重积分	578
12.2.1.2	在极坐标系下计算二重积分	584
12.2.1.3	利用对称性性质计算二重积分	589
12.2.2	三重积分的计算	595
12.2.2.1	在直角坐标系下计算三重积分	595
12.2.2.2	在柱面坐标系下计算三重积分	603
12.2.2.3	在球面坐标系下计算三重积分	607
12.2.2.4	利用对称性性质计算三重积分	610
12.2.3	第一型曲线积分的计算	614
12.2.3.1	将第一型曲线积分化为定积分计算	615
12.2.3.2	利用对称性性质计算第一型曲线积分	618
12.2.4	第一型曲面积分的计算	622
12.2.4.1	将第一型曲面积分化为二重积分计算	622
12.2.4.2	利用对称性性质计算第一型曲面积分	625
12.2.5	有关多元函数积分的积分等式与积分不等式问题	628
12.2.5.1	有关多元函数积分的积分等式证明	629
12.2.5.2	有关多元函数积分的积分不等式证明	635
12.2.6	多元函数积分的应用	641
12.2.6.1	平面图形面积、空间立体体积的计算	641
12.2.6.2	空间曲面面积的计算	643
12.2.6.3	物体质量、质心、转动惯量的计算	647
12.2.6.4	物体引力的计算	656
12.3	习题十二	658
第 13 章	向量函数的积分	664
13.1	本章解决的主要问题	664

13.2	典型问题解题方法与分析	664
13.2.1	第二型平面曲线积分的计算与格林公式	664
13.2.1.1	将第二型平面曲线积分化为定积分计算	664
13.2.1.2	运用格林公式计算第二型平面曲线积分	667
13.2.1.3	运用曲线积分与路径无关、曲线积分基本定理计算第二型平面 曲线积分	671
13.2.2	第二型曲面积分的计算与高斯公式	683
13.2.2.1	将第二型曲面积分化为二重积分或第一型曲面积分计算	683
13.2.2.2	运用高斯公式计算第二型曲面积分	691
13.2.2.3	运用无散度场的曲面积分性质计算第二型曲面积分	697
13.2.3	第二型空间曲线积分的计算与斯托克斯公式	703
13.2.3.1	将第二型空间曲线积分化为定积分计算	703
13.2.3.2	运用斯托克斯公式计算第二型空间曲线积分	706
13.2.3.3	运用无旋场曲线积分性质、曲线积分基本定理计算第二型空间 曲线积分	710
13.2.4	与第二型曲线、曲面积分有关的积分等式与不等式问题	717
13.2.5	第二型曲线、曲面积分的应用	722
13.2.5.1	运用第二型平面曲线积分计算平面区域面积	722
13.2.5.2	变力沿曲线做功的计算	723
13.2.5.3	向量场通过曲面通量的计算	726
13.2.5.4	全微分方程的求解	728
13.3	习题十三	730
第 14 章	傅里叶级数	735
14.1	本章解决的主要问题	735
14.2	典型问题解题方法与分析	735
14.2.1	周期函数的傅里叶级数展开	735
14.2.2	有限区间上定义的函数的傅里叶级数展开	740
14.3	习题十四	751

第 1 章

函 数

函数是高等数学研究的主要对象,也是高等数学中最重要的基本概念之一.掌握函数的基本概念和基本运算,了解函数的基本性质,对高等数学的学习非常重要.

1.1 本章解决的主要问题

- (1) 确定函数的定义域;
- (2) 函数的运算及其表达式计算;
- (3) 函数的几何性质及其应用.

1.2 典型问题解题方法与分析

1.2.1 函数定义域的确定

▶▶▶ 基本方法

利用基本初等函数、函数的运算性质,计算复合函数和反函数的定义域.

(1) 复合函数的定义域:

由函数 $y=f(u)$ (定义域为 D_1) 与 $u=\varphi(x)$ (定义域为 D_2 , 值域为 Z) 复合而成的函数 $y=f[\varphi(x)]$, 当 $D_1 \cap Z \neq \emptyset$ 才有意义, 且复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $D=\{x \mid x \in D_2, \varphi(x) \in D_1 \cap Z\}$.

(2) 反函数的定义域:

若 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 Z , 则其反函数的定义域为 Z , 值域为 D .

▶▶▶ 重要结论

(1) $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1$), $y=\sin x$, $y=\cos x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

(2) $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$ 的定义域是 $|x| \leq 1$.

(3) $y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1$) 的定义域是 $x>0$.

(4) 函数含分式, 则使分母为零的实数不属于函数的定义域.

(5) 函数含偶次根式, 则使根式中的表达式为负的实数不属于函数的定义域.

►►方法运用注意点

(1) 求函数的定义域是要寻找使得函数有意义的自变量的范围, 特别要注意含分式、根式、对数和反三角函数.

(2) 对于由 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$, 其定义域中的点一定要使 x 所确定的 $u=\varphi(x)$ 包含在 $y=f(u)$ 的定义域内.

►►典型例题解析

例 1-1 求函数 $y=\ln\left[\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$ 的定义域.

分析: 寻找使 $\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$ 的 x 的范围.

解: 函数定义域中的点首先需满足 $x^2-1\geq 0$, $\left|x-\frac{1}{2}\right|\leq 1$. 解不等式组

$$x\leq -1, x\geq 1, \text{ 且 } -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{3}{2},$$

得 $1\leq x\leq \frac{3}{2}$. 此时 $\frac{1}{2}\leq x-\frac{1}{2}\leq 1$, $\frac{\pi}{6}\leq \arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)\leq \frac{\pi}{2}$, 从而 $\sqrt{x^2-1}+\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)>$

0. 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

例 1-2 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $y=f\left(1-\frac{4}{\pi}\arctan x\right)$; (2) $y=f\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\right)+f\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{2}\right)$.

分析: (1) 寻找使 $0\leq 1-\frac{4}{\pi}\arctan x\leq 1$ 的 x 的范围.

(2) 寻找同时满足 $0\leq \frac{1}{2}+\frac{x}{4}\leq 1$, $0\leq \frac{3}{2}-\frac{x}{2}\leq 1$ 的 x 的范围.

解: (1) 解不等式 $1-\frac{4}{\pi}\arctan x\geq 0$, 得 $x\leq 1$; 解不等式 $1-\frac{4}{\pi}\arctan x\leq 1$, 得 $x\geq 0$.

所以函数的定义域为 $[0, 1]$.

(2) 解不等式 $0\leq \frac{1}{2}+\frac{x}{4}\leq 1$, 得 $-2\leq x\leq 2$; 解不等式 $0\leq \frac{3}{2}-\frac{x}{2}\leq 1$, 得 $1\leq x\leq 3$.

所以函数的定义域为 $[1, 2]$.

例 1-3 设函数 $f(x)=\begin{cases} -x+1, & -1<x\leq 0 \\ x-1, & 0<x\leq 2 \end{cases}$, 求函数 $f(x^2-1)$ 的定义域.

分析: 分段函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1, 2]$, 故 $f(x^2 - 1)$ 定义域中的点应要求 $x^2 - 1 \in (-1, 2]$.

解: 令 $u = x^2 - 1$, 要使 $u \in (-1, 2]$, 即 $-1 < x^2 - 1 \leq 2$, 需满足 $0 < x^2 \leq 3$, 即 $|x| \leq \sqrt{3}$, $x \neq 0$. 所以函数的定义域为 $[-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}]$.

例 1-4 求函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 1 - 2x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 1 \end{cases}$ 的反函数 $\varphi(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的定义域.

分析: 由于 $f(x)$ 是分段函数, 故应先确定每一区间段上 $f(x)$ 的值域, 在每一值域段上求该段上的反函数, 再合起来.

解: 当 $x \leq 0$ 时, $1 \leq f(x) < +\infty$, 且 $f(x)$ 单调减少. 从 $y = x^2 + 1$ 中解得 $x = -\sqrt{y-1}$, 反函数 $y = -\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = 1 - \frac{3x}{1+x} < 1$, 又 $f(x) = -2 + \frac{3}{1+x} > -2$, 即 $-2 < f(x) < 1$, 且 $f(x)$ 单调减少. 从 $y = \frac{1-2x}{1+x}$ 中解得 $x = \frac{1-y}{2+y}$, 反函数 $y = \frac{1-x}{2+x}$, $-2 < x < 1$. 所以 $f(x)$ 的反函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2+x}, & -2 < x < 1 \\ -\sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases},$$

其定义域为 $(-2, +\infty)$.

►►方法小结

(1) 对于初等函数的定义域, 由于初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合运算而成的函数, 所以先要求出使函数各部分有意义的自变量范围, 再取其公共部分就可得到初等函数的定义域.

(2) 分段函数的定义域是把不同表达式的自变量范围合并起来.

(3) 反函数的定义域就是函数的值域, 对于分段函数, 还需逐段确定其值域再进行合并.

1.2.2 函数的运算及其表达式的计算

►►基本方法

- (1) 利用基本初等函数的性质求函数表达式;
- (2) 利用复合函数的定义求复合函数表达式及其复合函数的分解;
- (3) 利用函数关系求反函数表达式;
- (4) 利用变量代换求函数表达式;
- (5) 曲线的极坐标表示及常见的极坐标曲线.