启航教育 云图 YUN TU 2023版

张宇数学教育系列丛书・三

书课包

张宇线性代数9讲

○ 主编 张宇

扫码领课

北京理工大学出版社

启航教育 云图 YUN TU

张宇数学教育系列丛书·三

书课包

张宇线性代数9讲

○主编 张宇

张宇数学教育系列丛书编委（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 陈静静 方春贤 冯雅娜 高昆轮 胡金德 贾建厂 李家隆
刘芮言 刘硕 柳叶子 吕倩 秦艳鱼 沈利英 史明洁 石臻东 仝雨晨
王慧珍 王爽 王燕星 徐兵 严守权 杨若昕 亦一(笔名) 曾凡(笔名) 张乐
张雷 张青云 张宇 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

张宇线性代数 9 讲 / 张宇主编. — 北京 ：北京理工大学出版社，2022. 1

ISBN 978 - 7 - 5763 - 0852 - 5

Ⅰ. ①张…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①线性代数 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料　Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 018221 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68944723(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 13.5
字　　数 / 337 千字
版　　次 / 2022 年 1 月第 1 版　2022 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 / 79.80 元

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 刘亚男
责任印制 / 李志强

前言 2023版

考研数学新大纲公布以后的考研新试题，继承以往优秀命题的传统并加以深化，总结起来有如下四个特点：

一、突出对于基本概念、公式、定理和方法的考查.

二、突出计算能力的考查.

三、突出全面性的考查.

四、突出常规题和新颖题并重的考查.

针对以上特点，总结新大纲后的考研数学形势，本书在2022版的基础上做了较大篇幅的修订，全面贯彻了新大纲，希望为考生做好新形势下的考研数学复习工作提供帮助.

张宇

2022年2月于北京

前言 2022版

在这个前言里，我想谈三点.

第一，《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》在 2020 年 9 月做了重要修订，本书全面贯彻落实了大纲修订的内容. 值得指出的是，在新大纲的要求下，客观题在试卷中的占比增加，与本书配套的《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》加大了客观题的占比，有利于考生做好训练. 但话说回来，真正学懂知识才是根本，题型形式的训练，多在习题集，更多在模考试卷中体现.

第二，教育部考试中心作为命题单位，其关于考研数学试卷难度的最新阐述："作为选拔性考试，选拔什么样的人是最重要的，标准一旦确定，就应坚持，试卷更加注重的是区分度. 得分率低不见得就是坏事，要弄清原因，如果是题目问题，自然要调整命题思路；但如果是考生没有达到相关课程的要求，就应该在教学、学习和复习上多下功夫."考生必须在数学上真学东西，学真东西，只有在充沛的时间里，付出足够的努力，深刻理解知识，熟练掌握方法，才能在未来的考试中脱颖而出，取得好的成绩.

第三，考生要高度重视本书每一讲开篇的知识结构，全面掌握这个知识结构，这对于解好数学题是至关重要的.

张宇

2020 年 12 月于北京

前言 2021版

以《张宇高等数学18讲》为代表的考研数学36讲(包括《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》(以下简称《36讲》))正式出版已有十年了.人们说,十年磨一剑,这第十版,理应在这套书的发展历程中具有里程碑式的意义.

十年间,《36讲》从汇总课堂讲义出版时的名不见经传,到现在成为广大考研考生错爱的畅销书.在感谢读者厚爱和支持的同时,我深感责任重大、战战兢兢、如履薄冰,总是在思考如何把书写得更对得起读者.十年间,考研人数从一百多万增长到现在的三百多万,几乎增长了两倍.我深切感受到考研群体的快速壮大给考研命题和教学带来的巨大影响,总是在思考,如何在新的形势下把书写得更符合新的命题和教学趋势.十年间,我从一个意气风发、不知天高地厚却充满闯劲和干劲的年轻教师,到现在步入不惑之年、岁月的沧桑爬满了面颊的教书匠.在慨叹时光飞逝的同时,更多的是,深知自己能力的不足和感谢学生给予的信任和帮助.

这第十版,我做了全新的编写,这不是一时之举,而是十年间不断积累、总结和创新的成果,是十年间与学生沟通、交流以及教学相长的成果,是十年间顺应考试发展变化的成果.这些成果汇聚成了这第十版,但愿能够在新的起点上给读者更大的帮助.

第十版有如下三大特色:

第一个特色,是每一讲开篇列出的知识结构.这不同于一般的章节目录,而是科学、系统、全面地给出本讲知识的内在逻辑体系和考研数学试题命制思路,是我们多年教学和命题经验的结晶.鉴于有不少读者对线性代数、概率论与数理统计课程不甚熟悉,因此,列出的知识结构更是细化至具体概念、公式与定理等,以期对读者有更大帮助,希望读者认真思考、反复研究并熟稔于心.

第二个特色,是对知识结构系统性、针对性的讲述.这也是本书的主体——讲授内容、例题和习题.讲授内容的特色在于在讲解知识的同时,指出考什么、怎么考的问题(这在普通教材上几乎是没有的),并随后附上"见例 * *",让读者读完讲授内容后可以立即演练,加深理解.本书对知识结构的讲述把抽象内容和具体实例紧密结合,非常有利于读者快速并深刻掌握所学知识.

第三个特色,是本书所命制、编写和收录题目的较高价值性.这些题皆为多年参加考研命题和教学的

专家们潜心研究、反复酝酿、精心设计的好题、妙题. 它们能够在与考研数学试题无缝衔接的同时，精准提高读者的解题水平和应试能力. 同时，本书集中回答并切实解决读者在复习过程中的疑点和弱点.

感谢十年间一些命题专家们给予的支持、帮助与指导，他们中有的老先生已年近九旬；感谢十年间各版编辑老师们的辛勤工作与无私奉献，他们中有的已成长为可独当一面的专家；感谢十年间各位考生的努力与信任，他们中有的已硕士毕业、博士毕业并成为各自专业领域的佼佼者.

希望读者潜心研读本书，在考研数学中取得好成绩.

张宇

2019 年 12 月于北京

目录

第1讲 行列式

知识结构

- 定义、性质与定理
  - n 阶行列式的定义 —以 n 个向量为邻边的 n 维图形的(有向)体积
  - 行列式的性质
    - 性质 1 — 行列互换,其值不变,即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$
    - 性质 2 —某行(列)元素全为零,则行列式为零
    - 性质 3 —两行(列)元素相等或对应成比例,则行列式为零
    - 性质 4 —某行(列)元素均是两个元素之和,则可拆成两个行列式之和
    - 性质 5 — 两行(列)互换,行列式的值反号
    - 性质 6 — 某行(列)元素有公因子 $k(k\neq 0)$,则 k 可提到行列式外面
    - 性质 7 — 某行(列)的 k 倍加到另一行(列),行列式的值不变
  - 行列式的展开定理
    - ① 余子式 M_{ij}
    - ② 代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
    - ③ 按某一行(列)展开的展开公式

      $$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n)$$
- 具体型行列式的计算:a_{ij} 已给出
  - 化为"12+1"型行列式
    - ① 主对角线行列式
    - ② 副对角线行列式
    - ③ 拉普拉斯展开式
    - ④ 范德蒙德行列式
  - 加边法
  - 递推法(高阶 → 低阶)
    - ① 建立递推公式,即建立 D_n 与 D_{n-1} 的关系
    - ② D_{n-1} 与 D_n 要有完全相同的元素分布规律,只是 D_{n-1} 比 D_n 低了一阶
  - 数学归纳法(低阶 → 高阶)
    - ① 第一数学归纳法
    - ② 第二数学归纳法

- 抽象型行列式的计算：a_{ij} 未给出
  - 用行列式性质
  - 用矩阵知识
    - ① 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，则 $|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
    - ② 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，则 $|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$，作恒等变形，转化为矩阵乘积的行列式
    - ③ 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，$|(\boldsymbol{A}^*)^*|=\left||\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}\right|=|\boldsymbol{A}|^{(n-1)^2}$
  - 用相似理论
    - ① $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$
    - ② 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$
- 综合题

一 定义、性质与定理

1. n 阶行列式的定义

n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是由 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}]$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=[a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}]$ 组成的，其(运算规则的)结果是以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的(有向)体积.

2. 行列式的性质

性质 1　行列互换，其值不变，即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

性质 2　行列式中某行(列)元素全为零，则行列式为零.

性质 3　行列式中的两行(列)元素相等或对应成比例，则行列式为零.

性质 4　行列式中某行(列)元素均是两个元素之和，则可拆成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 等式从右到左是两个行列式相加的运算. 如果两个行列式的其他元素对应相等，只有一行(列)不同时，可以相加，相加时其他元素不变，不同元素的行(列)对应相加即可.

性质 5　行列式中两行(列)互换，行列式的值反号.

【注】(1) 本书用 ⓘ↔ⓙ表示第 i 行与第 j 行互换，$[i]\leftrightarrow[j]$ 表示第 i 列与第 j 列互换，读者亦可用文字描述，不写这种符号记法，甚至只作变换，不予描述也是允许的. 对于下面的性质 6、性质 7，是同样的要求.

(2) 上述运算称为**"互换"性质.**

性质 6 行列式中某行(列)元素有公因子 $k(k\neq 0)$，则 k 可提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】(1) 本书用 k ⓘ表示第 i 行乘 k，$k[j]$ 表示第 j 列乘 k.

(2) 上述等式从右到左的运算称为**"倍乘"性质.**

性质 7 行列式中某行(列)的 k 倍加到另一行(列)，行列式的值不变.

【注】(1) 本书用ⓘ$+k$ⓙ表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行，$[i]+k[j]$ 表示第 j 列的 k 倍加到第 i 列.

(2) 上述运算称为**"倍加"性质.**

3. 行列式的展开定理

(1) 余子式.

在 n 阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素，由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 代数余子式.

余子式 M_{ij} 乘 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

显然也有 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

(3) 行列式按某一行(列)展开的展开公式.

行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和,即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{cases}a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n),\\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

【注】(1) 规定 1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

(2) 2,3 阶行列式也可以这样计算:

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc,\ \begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

如 $\begin{vmatrix}5&2&1\\1&2&5\\34&1&34\end{vmatrix}=520$, $\begin{vmatrix}我&0&生\\0&有&0\\你&0&幸\end{vmatrix}$ = 我有幸一生有你,读者若将上式结果中的减号"—"看作汉字"一",一个浪漫的公式便产生了.

二 具体型行列式的计算:a_{ij} 已给出

1. 化为"12 + 1"型行列式

(1) 主对角线行列式.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

见例 1.1.

(2) 副对角线行列式.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

见例 1.2.

(3) 拉普拉斯展开式.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

见例 1.3.

【注】(1) 本书中以上 12 个行列式称为“基本形”行列式，加上下面的“(4) 范德蒙德行列式”简称“12＋1”型行列式.

(2) 若所给行列式就是基本形或接近基本形，直接套公式或经过简单处理化成基本形后套公式.

(3) 简单处理的手段：① 按零元素多的行或列展开；② 用行列式性质对差别最小的“对应位置元素”进行处理，尽可能多地化出零元素，再按此行或列展开；③ 对于行和或列和相等的情形，将所有列加到第 1 列或将所有行加到第 1 行，提出公因式，再用 ②，等等.

(4) 考生应在做题过程中多积累经验，熟能生巧.

(4) 范德蒙德行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i), n \geqslant 2.$$

见例 1.4.

2. 加边法

对于某些一开始不宜使用“互换”“倍乘”“倍加”性质的行列式，可以考虑使用加边法：n 阶行列式中添加一行、一列升至 $n+1$ 阶行列式. 若添加在第1列，且添加的是$[1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，则第1行其余元素可以任意添加，行列式值不变，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $*$ 处元素可以任意添加. 观察原行列式元素的规律性，选择合适的元素填入 $*$ 处，使行列式的计算更为简便.

见例 1.5.

3. 递推法(高阶 → 低阶)

(1) 建立递推公式,即建立 D_n 与 D_{n-1} 的关系,有些复杂的题甚至要建立 D_n, D_{n-1} 与 D_{n-2} 的关系.

(2) D_{n-1} 与 D_n 要有完全相同的元素分布规律,只是 D_{n-1} 比 D_n 低了一阶.

见例 1.6.

4. 数学归纳法(低阶 → 高阶)

涉及 n 阶行列式的证明型计算问题,即告知行列式计算结果,让考生证明之,可考虑数学归纳法.

第一数学归纳法(适用于 $F(D_n, D_{n-1})=0$):

① 验证 $n=1$ 时,命题成立;

② 假设 $n=k(\geqslant 2)$ 时,命题成立;

③ 证明 $n=k+1$ 时,命题成立.

则命题对任意正整数 n 成立.

见例 1.7.

第二数学归纳法(适用于 $F(D_n, D_{n-1}, D_{n-2})=0$):

① 验证 $n=1$ 和 $n=2$ 时,命题成立;

② 假设 $n<k$ 时,命题成立;

③ 证明 $n=k(\geqslant 3)$ 时,命题成立.

则命题对任意正整数 n 成立.

见例 1.8.

例 1.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$,计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 10 阶单位矩阵,λ 为常数.

【解】
$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{10\times 10}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{9\times 9} - 10^{10} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \end{vmatrix}_{9\times 9}$$

$$\xlongequal{(*)} (-\lambda)(-\lambda)^9 - 10^{10} = \lambda^{10} - 10^{10}.$$

【注】(*)处来自 $\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdots a_{nn}$.

例 1.2 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ ________.

【解】应填 x^4.

先将所求行列式的第 1 行的(−1) 倍分别加到第 2,3,4 行,得 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ x & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$,再将所得行列式的第 1 列、第 2 列和第 3 列依次加到第 4 列,得 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{(*)} (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} \cdot x^4 = x^4$.

【注】(*)处来自 $\begin{vmatrix} * & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ \therefore & & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$.

例 1.3 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a & -2 & -2 & -2 \\ -2 & a & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -b & -2 \\ -2 & -2 & -2 & b \end{bmatrix}$ $(ab \neq 0)$,$\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵,则 $|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| =$ ________.

【解】应填 a^2b^2.

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2+a & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+b & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2-b \end{vmatrix} \xlongequal[③-④]{①-②} \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & b & b \\ 2 & 2 & 2 & 2-b \end{vmatrix}$$

$$= ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2-b \end{vmatrix} \xlongequal{②-2③} ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(*)} ab \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2-a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2-b \end{vmatrix} = a^2b^2.$$

【注】(*)处来自 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

例 1.4 求 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&9&27\\1&-2&4&-8\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}=0$ 的所有根.

【解】

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&9&27\\1&-2&4&-8\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{转置}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&-2&x\\1&9&4&x^2\\1&27&-8&x^3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(*)}(3-1)(-2-1)(x-1)(-2-3)(x-3)(x+2)$$

$$=30(x-1)(x-3)(x+2)=0,$$

故 $f(x)=0$ 的所有根为 $1,3,-2$.

【注】（$*$）处来自范德蒙德行列式.

例 1.5 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2&x_1x_2&\cdots&x_1x_n\\x_2x_1&1+x_2^2&\cdots&x_2x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_nx_1&x_nx_2&\cdots&1+x_n^2\end{vmatrix}.$$

【解】 $D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2&x_1x_2&\cdots&x_1x_n\\x_2x_1&1+x_2^2&\cdots&x_2x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_nx_1&x_nx_2&\cdots&1+x_n^2\end{vmatrix}_n\xlongequal{(*)}\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\cdots&x_n\\0&1+x_1^2&x_1x_2&\cdots&x_1x_n\\0&x_2x_1&1+x_2^2&\cdots&x_2x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_nx_1&x_nx_2&\cdots&1+x_n^2\end{vmatrix}_{n+1}$,

将第 1 行乘 $(-x_i)$ 加到第 $i+1$ 行 $(i=1,2,\cdots,n)$，再将第 i 列乘 x_{i-1} $(i=2,3,\cdots,n+1)$ 加到第 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\cdots&x_n\\-x_1&1&0&\cdots&0\\-x_2&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-x_n&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}_{n+1}=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2&x_1&\cdots&x_n\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}_{n+1}=1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

【注】（$*$）处来自加边法.