2024

经济类联考数学精讲

JINGJILEI LIANKAO SHUXUE JINGJIANG

主编 龙彩燕 马 茜 马凤丽 霍录景

经济类联考（396科目）：

金融 · 应用统计 · 税务 · 国际商务

保险 · 资产评估

苏州大学出版社
Soochow University Press

经济类联考数学精讲

龙彩燕　马　茜　马凤丽　霍录景　主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济类联考数学精讲/龙彩燕等主编．—苏州：苏州大学出版社，2022.8
ISBN 978-7-5672-4001-8

Ⅰ．①经… Ⅱ．①龙… Ⅲ．①高等数学—硕士生入学考试—自学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 125265 号

经济类联考数学精讲
龙彩燕　马　茜　马凤丽　霍录景　主编
责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006)
苏州市深广印刷有限公司印装
(地址：苏州市高新区浒关工业园青花路 6 号 2 号厂房　邮编：215151)

开本 700 mm×1 000 mm　1/16　印张 12.5　字数 240 千
2022 年 8 月第 1 版　2022 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-4001-8　定价：42.00 元

图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-67481020
苏州大学出版社网址　http://www.sudapress.com
苏州大学出版社邮箱　sdcbs@suda.edu.cn

前言

本书根据最新版的经济类专业硕士学位联考综合能力考试大纲、命题规律及思路编写，旨在帮助考生正确理解考试大纲、准确把握考试内容，为考试获得高分打下坚实基础.

本书由微积分、线性代数和概率论三部分组成，基本涵盖新大纲全部考点.每部分包括考点剖析、核心题型、点睛归纳及课堂练习等内容，以使考生了解经济类联考数学所要求的基本知识点和考查的题型，从而掌握考试的广度和深度，做到目标明确、心中有数，在较短的时间内快速提高应试能力.

本书的特色是对大纲给出的考点进行科学分类和精讲，在讲解时将题目涉及的知识点、考点和方法技巧有机联系，思路明晰，重点突出，凸显了命题轨迹和应试精髓.

本书的主要特点是：

(1) 精讲精练，突出重点、难点.

针对考生学习任务重、复习时间有限的情况，本书以数学思想为主导，遵从由浅入深、简单易懂、突出重点的原则，以提高考生分析问题和解决问题的能力，帮助考生在短时间内尽快掌握考试内容.

(2) 高屋建瓴，搭建知识体系.

从整体上把握知识点间的联系，为各考点的复习打好基础，进而突破灵活性和综合性试题.

本书由龙彩燕、马茜、马凤丽、霍录景四位老师编写，其中马凤丽编写了微积分部分的第一章、第二章，马茜编写了微积分部分的第三章、第四章，霍录景编写了线性代数部分，龙彩燕编写了概率论部分.全书由霍录景和马茜负责统稿.

由于时间仓促，本书难免存在疏漏之处，欢迎广大读者批评指正.

目录

微积分部分

线性代数部分

概率论部分

微积分部分

第一章　函数、极限与连续

第一节　函数

一、集合的概念

一般地，一定范围内某些确定的、不同的对象的全体组成一个集合.集合中的每一个对象称为该集合的元素.

二、区间与邻域

开区间：$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

半开半闭区间：$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；

闭区间：$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

无穷区间：$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$，$(-\infty,a)=\{x\mid x<a\}$.

邻域：$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$，其中 a 为中心，δ 为半径.

去心邻域：$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$，就是在邻域 $U(a,\delta)$ 内将点 $x=a$ 去掉.

三、函数的概念

1. 函数的定义域

求函数的定义域时要注意：分式的分母不等于 0；对数 $y=\log_a x$ 中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$x>0$；偶次方根下大于等于 0；$y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 中 $-1\leqslant x\leqslant 1$；$y=\arctan x$ 和 $y=\operatorname{arccot} x$ 中 $-\infty<x<+\infty$.

2. 两函数相等

如果两个函数的定义域和对应法则都相同，那么称这两个函数相等.

例 1　下列各组中的两个函数不相等的是　　　　(　　)

(A) $y=\sec^2 x$ 与 $y=\tan^2 x+1$

(B) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$

(C) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$

(D) $y=x^{\sin x}$($x>0$ 且 $x\neq 1$)与 $y=e^{\sin x\ln x}$($x>0$ 且 $x\neq 1$)

(E) $y=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$与 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

【答案】 B

【解析】 (A) 两函数的定义域相同,$y=\sec^2 x=\tan^2 x+1$,两函数相等;(B) $y=\sqrt{x^2}=|x|$与$y=x$ 的对应法则不同,不相等;(C) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$,对应法则相同,故两函数相等;(D) 两函数的定义域相同,$y=x^{\sin x}=e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\sin x\ln x}$,两函数相等;(E) 两函数的定义域相同,$y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,两函数相等.

3. 反函数

设 $y=f(x)(x\in D)$为单调函数,其值域为 $\mathbf{R}$. 若对任意的 $y\in\mathbf{R}$,都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应,则称 x 为 y 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$或 $y=f^{-1}(x)$.

4. 复合函数

掌握:(1) 两个或两个以上的函数如何复合成一个函数;(2) 指出复合函数的复合过程;(3) 求复合函数的定义域;(4) 已知复合函数的表达式,求外层函数的表达式.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$等于 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

(E) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

【答案】 B

【解析】 $|f(x)|\leqslant 1$,故 $f[f(x)]=1$,从而$f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$.

例 3 设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+4$,则 $f(x)=$ ( )

(A) x^2 (B) x^2-2 (C) x^2+4 (D) x^2+6 (E) x^2+2

【答案】 D

【解析】 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+4=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+6$,故 $f(x)=x^2+6$.

例 4 设函数 $f(x)$的定义域为[0,1],则 $f[\ln(x-1)]$的定义域为( )

(A) [1,e] (B) [2,e] (C) [1,2] (D) [1,e+1] (E) [2,e+1]

【答案】 E

【解析】 $y=f[\ln(x-1)]$是由 $y=f(u)$和 $u=\ln(x-1)$复合而成的，由于函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，故 $f(u)$的定义域为$[0,1]$.所以 $0\leqslant u\leqslant 1$，即 $0\leqslant\ln(x-1)\leqslant 1$，解得 $2\leqslant x\leqslant e+1$，即得 $f[\ln(x-1)]$的定义域为$[2,e+1]$.

5. 基本初等函数

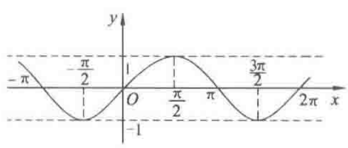
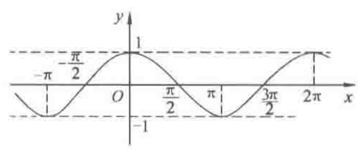
基本初等函数：① 常数函数；② 幂函数；③ 指数函数；④ 对数函数；⑤ 三角函数；⑥ 反三角函数.

以上几类基本初等函数简称“常反对幂三指”.

四、三角函数与反三角函数

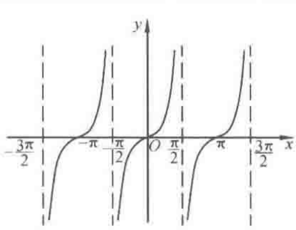
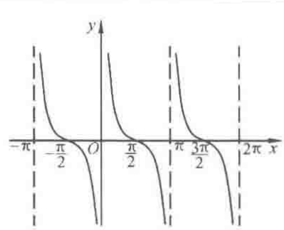
1. 正弦、余弦函数的图象与性质(表 1-1)

表 1-1　正弦、余弦函数的图象与性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
最值	$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$时，$y_{最大}=1,k\in\mathbf{Z}$； $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$时，$y_{最小}=-1,k\in\mathbf{Z}$	$x=2k\pi$时，$y_{最大}=1,k\in\mathbf{Z}$； $x=2k\pi+\pi$时，$y_{最小}=-1,k\in\mathbf{Z}$
单调性	在每个$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$上递增， 在每个$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$上递减	在每个$[2k\pi-\pi,2k\pi]$上递增， 在每个$[2k\pi,2k\pi+\pi]$上递减
奇偶性	奇函数	偶函数
周期性	是周期函数，2π为最小正周期	是周期函数，2π为最小正周期

2. 正切、余切函数的图象与性质(表 1-2)

表 1-2　正切、余切函数的图象与性质

函数	$y=\tan x$	$y=\cot x$
图象		

续表

函数	$y=\tan x$	$y=\cot x$
定义域	$\left\{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$	$\{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\neq k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
单调性	在每个$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上递增	在每个$(k\pi, k\pi+\pi)$上递减
奇偶性	奇函数	奇函数
周期性	是周期函数，π 为最小正周期	是周期函数，π 为最小正周期

3. 正割与余割

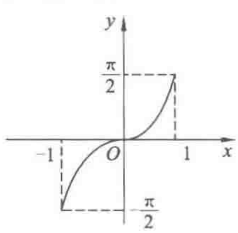
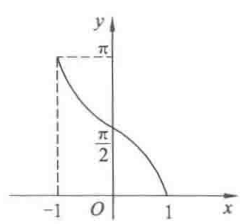
对于这两个函数，只需要记住定义和一些重要的公式.

正割函数：$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$\sec^2 x=1+\tan^2 x$；

余割函数：$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，$\csc^2 x=1+\cot^2 x$.

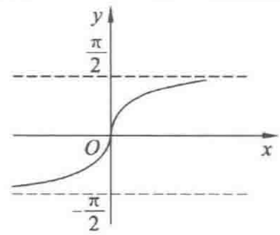
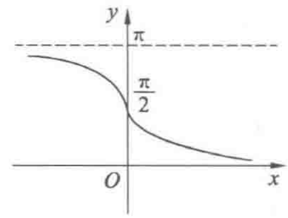
4. 反正弦、反余弦函数的图象与性质(表 1-3)

表 1-3　反正弦、反余弦函数的图象与性质

函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是函数 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$的反函数	反余弦函数 $y=\arccos x$ 是函数 $y=\cos x, x\in[0,\pi]$的反函数
图象		
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$
单调性	在$[-1,1]$上递增	在$[-1,1]$上递减
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数

5. 反正切、反余切函数的图象与性质(表 1-4)

表 1-4 反正切、反余切函数的图象与性质

函数	反正切函数 $y=\arctan x$ 是函数 $y=\tan x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 是函数 $y=\cot x, x\in(0,\pi)$ 的反函数
图象		
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
单调性	在$(-\infty,+\infty)$上递增	在$(-\infty,+\infty)$上递减
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数

五、函数的初等特性

1. 有界性

设 $y=f(x)(x\in D)$,若存在 $M>0$,对任意的 $x\in D$,总有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界.

注

(1) 若 $f(x)\geqslant M_1$,则称 $f(x)$ 有下界;若 $f(x)\leqslant M_2$,则称 $f(x)$ 有上界.

(2) 函数 $f(x)$ 有界的充分必要条件是 $f(x)$ 既有上界又有下界.

2. 单调性

设 $y=f(x)(x\in D)$,若对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$,总有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $y=f(x)$ 在 D 上单调增加;若对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$,总有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $y=f(x)$ 在 D 上单调减少.

3. 奇偶性

设 $y=f(x)(x\in D)$,其中 D 关于原点对称.若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 在 D 上为奇函数;若 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 在 D 上为偶函数.

4. 周期性

设 $y=f(x)(x\in D)$,若存在 $T>0$,对任意的 $x\in D$,$x+T\in D$,有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为周期函数,T 称为 $y=f(x)$ 的周期.

例 5 设函数 $f(x)=x\sin x$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是 （ ）

(A) 偶函数 (B) 奇函数 (C) 周期函数

(D) 有界函数 (E) 单调函数

【答案】 A

【解析】 $f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数.

六、初等函数的概念

由基本初等函数经过有限次的四则运算或者复合得到的函数称为初等函数.例如，$y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$，$y=\arctan x^2$ 均为初等函数.

七、一些分段函数

(1) 符号函数：$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ 称为符号函数.

(2) 狄利克雷函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathbf{Q},\\ 0, & x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}\end{cases}$ 称为狄利克雷函数.

(3) 取整函数：$y=[x]$ 称为取整函数，$[x]$ 为不超过 x 的最大整数.例如，$[2.1]=2$，$[-3.2]=-4$.

注

(1) $[x]\leqslant x$；(2) $x=[x]+x_{小数}$，其中 $0\leqslant x_{小数}<1$.

第二节 函数的极限

一、数列的极限

1. 数列极限的定义

对于数列 $\{x_n\}$，若存在常数 a，使得对 $\forall\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 收敛数列的性质

性质 1（唯一性） 若数列 $\{x_n\}$ 存在极限，则此极限是唯一的.

性质 2（有界性） 若数列 $\{x_n\}$ 存在极限，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

性质 3（保号性） 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

推论　若数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\geqslant 0$(或$x_n\leqslant 0$)，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$a\geqslant 0$(或$a\leqslant 0$).

例1　设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有　(　　)

(A) $a_n<b_n$对任意n成立　　(B) $b_n<c_n$对任意n成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=0$

(E) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

【答案】 E

【解析】 (A)错，取$a_n=\dfrac{2}{n},b_n=1-\dfrac{1}{n}$，但$a_1=2>b_1=0$；

(B)错，取$b_n=1+\dfrac{2}{n},c_n=n$，但$b_1=3>c_1=1$；

(C)错，取$a_n=\dfrac{1}{n^2},c_n=n$，但$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；

(D)错，取$a_n=\dfrac{1}{n},c_n=n$，但$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$；

(E)正确，假设$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=A$ 存在，又$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{c_n}=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n\cdot\dfrac{1}{c_n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{c_n}=A\times 0=0$，与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$矛盾，故$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

3. 极限存在准则

准则Ⅰ(数列极限的夹逼准则)　若数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足：

(1) 从某项起，有$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

则数列$\{x_n\}$的极限也存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

4. 重要结论(子数列的收敛性)

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\{a_n\}$的任一子列也收敛于$a$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a,\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=a$.

例2　设$0<a<b<c$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=$　(　　)

(A) a　(B) b　(C) c　(D) $a+b+c$　(E) 1

【答案】 C

【解析】 $c^n<a^n+b^n+c^n<3c^n$，$c<(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}<3^{\frac{1}{n}}c$，$\lim\limits_{n\to\infty}c=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}c=c$，由夹逼准则可得$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=c$.

二、函数的极限

1. 函数极限的概念

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$：对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的极限，记为$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$：对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$：对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$：对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，当 $x<-X$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 3 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=$ （ ）

(A) 0 (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$

(D) ∞ (E) 不存在但不是∞

【答案】 E

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$不存在但不是$\infty$.

2. 函数极限的性质(以 $x\to a$ 来进行介绍)

性质 1(唯一性) 若极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 存在，则此极限是唯一的.

性质 2(局部有界性) 若极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 存在，则存在 $\delta>0$ 及 $M>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有$|f(x)|\leqslant M$.

性质 3(保号性) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$(或 $A<0$)，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论 1 若 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$)，且$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

推论 2 若 $f(x)\geqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，则 $A\geqslant B$.

3. 函数的左、右极限

左极限 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A$：对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $a-\delta<x<a$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A$.

右极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$：对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $a<x<a+\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$.

定理 2 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$.

（此定理用于判断分段函数在分段点处极限是否存在）

例 4 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=$ （　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2

(D) ∞　　(E) 不存在但不是 ∞

【答案】 E

【解析】 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在但不是 ∞.

4. 两个重要极限

第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

公式变形：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$；(2) $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$；

$$(3)\ \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$$

第二个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

公式变形：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$；

$$(3)\ \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e.$$

例 5 极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=$ ( )

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) ∞

【答案】 B

【解析】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

例 6 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}=$ ( )

(A) 1 (B) e^3 (C) e^2 (D) $e^{\frac{3}{2}}$ (E) $e^{\frac{2}{3}}$

【答案】 D

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$.

三、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小

(1) 定义：以 0 为极限的变量称为无穷小量，简称无穷小.

(2) 性质：

① 有限个无穷小之和为无穷小；

② 有限个无穷小的乘积为无穷小；

③ 有界函数与无穷小的乘积为无穷小(此性质比较重要).

(3) 极限与无穷小的关系.

定理 3 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$.

例 7 极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=$ ( )

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) 不存在

【答案】 C

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0+1=1$.

(4) 无穷小的比较.

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$.

① 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小量，记为 $\alpha=o(\beta)$；

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小量；

③ 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=k\neq 0$，则称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小量；

④ 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称$\alpha$与$\beta$是等价无穷小量，记为$\alpha\sim\beta$；

⑤ 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta^k}=C\neq 0$，其中$k>0$为常数，$C$为常数，则称$\alpha$是$\beta$的$k$阶无穷小.

注

无穷小的比较是把各种类型的函数都统一到幂函数类的同一结构内进行比较，通常取β为x的幂函数x^m. 当$x\to 0$时，常用的等价无穷小有：$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^a-1\sim ax$，$a^x-1\sim x\ln a$. 以上等价对于其他无穷小量仍然成立. 例如，当$x\to 0$时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$e^{3x}-1\sim 3x$.

(5) 等价无穷小的代换定理.

定理 4　设$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

注

等价无穷小的代换替换的是乘积因子，一般情况下和或者差不要代换.

定理 5　设α为无穷小，则$\alpha\sim\alpha+o(\alpha)$.

例 8　当$x\to 0^+$时，$\alpha=\ln(1+\sqrt{x})$，$\beta=2^{x^2}-1$，$\gamma=x-\sin x$，$\delta=\sqrt{1+x}-1$均为无穷小量，把它们按阶数从低到高的顺序排列起来应为　(　　)

(A) $\alpha,\beta,\gamma,\delta$　(B) $\alpha,\delta,\beta,\gamma$　(C) $\delta,\alpha,\beta,\gamma$

(D) $\gamma,\alpha,\delta,\beta$　(E) $\gamma,\alpha,\beta,\delta$

【答案】　B

【解析】　当$x\to 0^+$时，$\alpha=\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$，$\beta=2^{x^2}-1\sim x^2\ln 2$，$\gamma=x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，$\delta=\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$，按阶数从低到高的顺序排列起来应为$\alpha,\delta,\beta,\gamma$.

例 9　若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则$a,b$的值分别为　(　　)

(A) $a=1,b=-4$　(B) $a=-1,b=4$　(C) $a=1,b=4$

(D) $a=-1,b=-4$　(E) $a=0,b=4$