前　言

高等数学是高等院校理工科、经济管理学科等专业的重要基础课，也是相关学科专业的学生学习与研究其他后续数学课程和专业课程必不可少的工具.随着我国高等教育逐步由“精英教育”向“大众教育”转变，高校教育目标也倾向于为社会培养具有实践能力和创新精神的专门人才，作为传统学科的高等数学进行改革和新的探索也成为必然.为此，编者根据“高等数学课程教学基本要求”，汲取近年来高等数学教学改革的成果及一线教师多年的教学经验，编写了这本《高等数学》.

在本书的编写宗旨方面，既注重学生基础知识的培养，也着力于学生思考、分析和解决问题能力的培养，力求做到基础性、严谨性、实用性、可读性的和谐统一.

首先，以往使用的众多教材有偏重于演绎论证、逻辑推理及用纯数学的语言描述等问题，显得过于抽象，学生易产生畏难情绪.本书在不影响教材系统性和严谨性的前提下，适当地淡化了数学的抽象化色彩，形象具体，条理清晰，简洁流畅.其次，学习的最终目的是应用.本书在有关的章节从学生熟悉的问题入手，引入实例，以培养学生“用已知解决未知”的能力.此外，针对生源的层次不一样，知识背景亦不尽相同的情况，我们在习题的选编上，不仅选题新颖，而且难度适中，附有参考答案，以方便师生参阅，充分满足个性化的教学需求.

本教材共分十章，主要内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、定积分、不定积分、常微分方程、级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学等.考虑到定积分和不定积分的关系，第 4 章将定积分调整到不定积分之前进行讲解.

本书由刘大瑾任主编，李文涛、王晓春、周海林任副主编.参加本书编写还有（以姓氏笔画为序）：王娅、叶建兵、刘明颖、谌文超、谭沈阳.

限于编者水平，书中难免有不当之处，恳请广大读者不吝指出.

编　者

2022 年 5 月

目　录

第 1 章

函数与极限

函数是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，是描述客观世界变化规律的重要数学模型，在解决实际问题中发挥着重要作用.极限思想是几千年人类思想的结晶，极限方法是现在数学的重要方法.函数是高等数学的主要研究对象，极限思想是高等数学的基本思想，极限方法是高等数学的基本方法.

1.1 函数的有关概念

1.1.1 集合

具有某种确定性质的对象的全体称为集合，常用大写如 A, B, C, $\cdots$ 来表示.组成集合的个体对象称为集合的元素，常用小写字母如 a, b, c, $\cdots$ 来表示. $a \in A$ 表示元素 a 是集合 A 中的元素.

常见的数集：自然数集($\mathbf{N}$)，整数集($\mathbf{Z}$)，正整数集($\mathbf{Z}_+$)，负整数集($\mathbf{Z}_-$)，有理数集($\mathbf{Q}$)，实数集($\mathbf{R}$)，显然有 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

集合的基本运算有四种：并、交、差、补.

常用的一些表示符号：

$\forall$ 表示“任意”或“所有”，例如 $\forall x \geqslant 0$ 表示“任意非负实数 x”.

$\exists$ 表示“存在”或“找到”，例如 $\exists x \in A$ 表示“集合 A 中可以找到元素 x”.

1.1.2 区间与邻域

由于变量的特征总是体现在一定的范围内，为方便讨论，常把这个“一定的范围”用区间来表示.邻域作为一类特殊的区间，对研究函数的局部性质，也就是小范围内的性质，具有重要作用.

一、区间

设 a, b 为两个实数，且 $a < b$，则称包含 a, b 之间所有实数的集合为**区间**，称 a, b 为**区间端点**，称 $b-a$ 的值为**区间长度**.具体有如下几种类型：

开区间：$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x < b\}$，如图 1-1 所示.

闭区间：$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$，如图 1-2 所示.

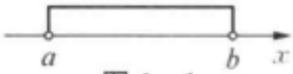

图 1-1

图 1-2

左开、右闭区间: $(a, b]=\{x \mid x \in \mathbf{R}, a<x \leqslant b\}$, 如图 1-3 所示.

左闭、右开区间: $[a, b)=\{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leqslant x<b\}$, 如图 1-4 所示.

图 1-3

图 1-4

左开、右闭区间和左闭、右开区间统称为**半开半闭区间**. 从数轴上看,以上这些区间是长度为有限的线段, 因此,这些区间被称为**有限区间**.

无限区间:

$[a, +\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leqslant x<+\infty\}$: 

$(a, +\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}, a<x<+\infty\}$: 

$(-\infty, b)=\{x \mid x \in \mathbf{R}, -\infty<x<b\}$: 

$(-\infty, b]=\{x \mid x \in \mathbf{R}, -\infty<x \leqslant b\}$: 

特别的, $\mathbf{R}=(-\infty, +\infty)$.

二、点的邻域

以实数 a 为中心的任何开区间称为 a 的**邻域**,记作 $U(a)$, 称点 a 为**邻域中心**,有如下两种常见类型:

***a* 的 *δ* 邻域**: $U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$. 称 δ 为**邻域半径**,如图 1-5 所示.

例如 $U\left(5, \frac{1}{2}\right)$ 表示以点 $x_0=5$ 为中心,以$\frac{1}{2}$为半径的邻域,也就是开区间$(4.5, 5.5)$.

***a* 的去心的 *δ* 邻域**: $\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$, 如图 1-6 所示.

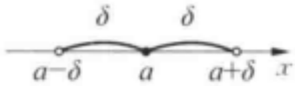

图 1-5

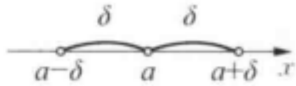

图 1-6

例如　$\mathring{U}(1, 2)$ 表示以点 $x_0=1$ 为中心,半径为 2 的空心邻域$(-1, 1) \cup (1, 3)$.

称开区间 $(a-\delta, a)$ 为 a 的**左 *δ* 邻域**,称开区间 $(a, a+\delta)$ 为 a 的**右 *δ* 邻域**.

1.1.3　函数的定义

一、映射

民间有这样一句话,"一叶落而知天下秋",用树叶的飘落来反映季节的变化,这就是树

叶飘落和季节之间建立一种对应关系.更一般的,现实生活中,常常要用到用一种事物的变化来研究另外一种事物的变化,而映射概念就是对这样一种现实问题的数学抽象.

设 X, Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对于 X 中每一个元素 x,按照法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**,记为

$$f: X \to Y \quad 或 \quad y=f(x).$$

其中 $D_f=X$ 称为 f 的原象集, $R_f=\{f(x) \mid x \in X\}$ 称为 f 的象集,即

$$R_f=f(X),\ R_f \subset Y.$$

注意

映射要求对于集合 A 中的每一个元素,在集合 B 中都有它的象,并且这个象是唯一确定的,映射允许集合 A 中不同的元素在集合 B 中有相同的象,即映射可以是“多对一”或“一对一”,但不能是“一对多”.

特别的,设 f 是集合 X 到集合 Y 的映射,若 $Y=R_f$, 即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像,则称映射 f 为 X 到 Y 上的**满射**;若对 X 中任意两个不同的元素 $x_1 \neq x_2$,它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 上的**单射**;若 f 既是单射,又是满射,则称 f 为**一一映射**(或**双射**).

例如,设 $f(x)=\sin x$,则 $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 不是映射;

$$f:[-\pi, \pi] \to [-2, 2] \text{ 为映射;}$$

$$f:[-\pi, \pi] \to [-1, 1] \text{ 为满射;}$$

$$f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-2, 2] \text{ 为单射;}$$

$$f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \text{ 为双射.}$$

映射又称为算子,从实数集(或其子集) X 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射称为定义在 X 上的函数.

二、函数

定义 1-1　设 $D \subset \mathbf{R}$ 是一给定的数集,对 $\forall x \in D$, 按法则 f,有唯一确定的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应,则称此对应法则 f 为定义在 D 上的函数,记作 $y=f(x)$, $x \in D$.

称 D 为**定义域**,记为 D_f,称 x 为**自变量**,y 为**因变量**,f 为**对应法则**, $R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x),\ x \in D_f\}$ 为函数的**值域**.

注意

(1) 函数的两要素:定义域、对应法则.因此,若两函数的定义域和对应法则相同,则为同一函数.

(2) 定义域的确定方法是首先使函数 $y=f(x)$ 表达式有意义;若函数 $y=f(x)$ 有实际意义,要根据实际意义来确定定义域.

【例 1-1-1】 判断下列函数是否相同：

(1) $f(x)=x$ 和 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\ln x^2$ 和 $g(x)=2\ln x$.

(3) $f(x)=(\sqrt{x})^3$ 和 $g(x)=\sqrt{x^3}$.

解 (1) 因为 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，故对应法则不同，所以它们不相同.

(2) 因为 $f(x)=\ln x^2$，$x\neq 0$，$g(x)=2\ln x=\ln x^2$，$x>0$.

故定义域不同，所以它们不相同.

(3) $f(x)=(\sqrt{x})^3=(x^{\frac{1}{2}})^3=x^{\frac{3}{2}}$，$x\geqslant 0$；$g(x)=\sqrt{x^3}=(x^3)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$，$x\geqslant 0$.

故定义域和对应法则均相同，所以它们相同.

【例 1-1-2】 求函数 $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域.

解 由 $\begin{cases}x^2-1\geqslant 0\\ x-2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -1\text{ 或 }x\geqslant 1\\ x\neq 2\end{cases}$ 得定义域 $D=(-\infty,-1]\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$.

三、反函数和复合函数

1. 反函数

反函数是函数概念的进一步深化，反映了函数定义中两个变量既相互对立，又相互统一，相互依存的辩证关系.

定义 1-2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，若对于 $\forall y\in W$，D 上存在唯一数值 x 与 y 对应，即函数 $f:D\to f(D)$ 是双射，则得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

例如：$y=x^3$，$x\in\mathbf{R}$ 的反函数为 $x=\sqrt[3]{y}=y^{\frac{1}{3}}$，$y\in\mathbf{R}$.

$y=f(x)$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y)$，由于函数两要素为定义域和对应法则，与变量符号无关，故 $y=f^{-1}(x)$ 也称为 $y=f(x)$ 的反函数，如 $y=\sqrt[3]{x}$ 也称为 $y=x^3$ 的反函数.

注意

(1) 一一对应的函数才有反函数.

(2) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-7 所示.

(3) $y=f(x)$ 的值域为 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

(4) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 单调性相同.

2. 几组常见的反函数

① $\begin{cases}y=e^x & (x\in\mathbf{R})\\ y=\ln x & (x>0)\end{cases}$，如图 1-8 所示.

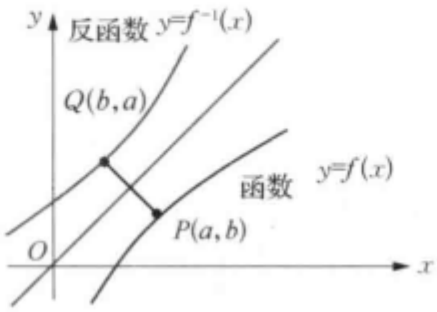

图 1-7

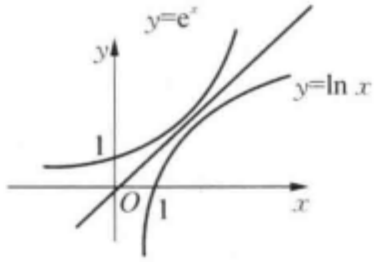

图 1-8

【例 1-1-3】 求函数 $y=\ln(x+2)$ 的反函数.

解　由 $y=\ln(x+2)$，得 $x+2=e^y$.

故 $y=\ln(x+2)$ 的反函数为 $x=e^y-2$ 或 $y=e^x-2$.

② $\begin{cases} y=\sin x & \left(x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right) \\ y=\arcsin x & (x\in[-1,1]) \end{cases}$，如图 1-9 所示.

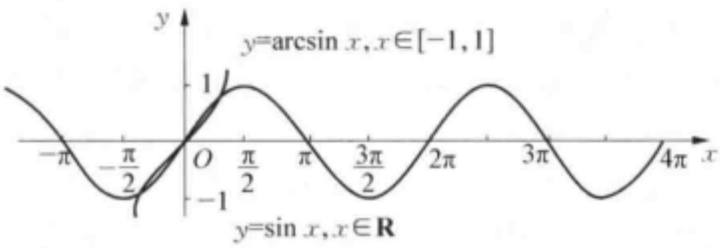

图 1-9

③ $\begin{cases} y=\cos x & (x\in[0,\pi]) \\ y=\arccos x & (x\in[-1,1]) \end{cases}$，如图 1-10 所示.

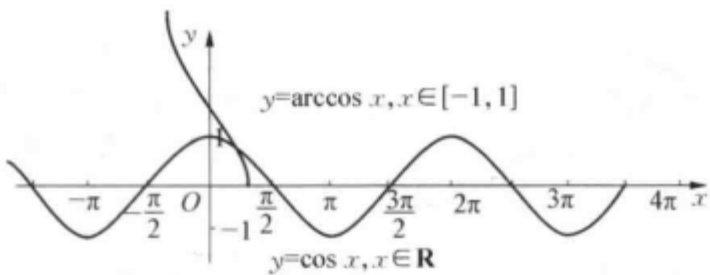

图 1-10

【例 1-1-4】 求函数 $y=\sin x$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数.

解　当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 时，$(x-\pi)\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

又 $y=\sin x=-\sin(x-\pi)$，故 $(x-\pi)=\arcsin(-y)$，所以反函数为

$$y=\pi+\arcsin(-x) \text{ 或 } y=\pi-\arcsin x.$$

思考

能否把反函数用 $\arccos x$ 来表示？

④ $\begin{cases} y=\tan x & \left(x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)\right) \\ y=\arctan x & (x\in(-\infty,\ \infty)) \end{cases}$,如图 1-11 所示.

⑤ $\begin{cases} y=\cot x & (x\in(0,\ \pi)) \\ y=\operatorname{arccot} x & (x\in(-\infty,\ \infty)) \end{cases}$,如图 1-12 所示.

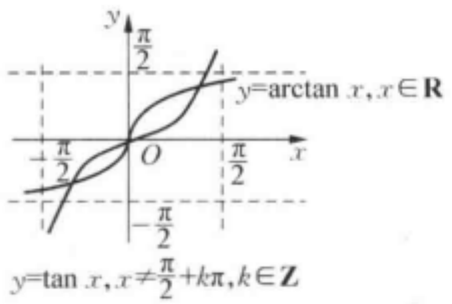

图 1-11

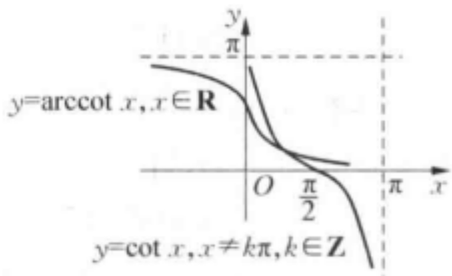

图 1-12

3. 复合函数

实际问题中经常出现这样的情形:在某变化过程中,第一个量依赖于第二个量,而第二个量又依赖于第三个量,实际上,第一个量可由第三个量来确定,这实际上就是一种复合函数的问题.

定义 1-3 设 $y=f(u)$ 定义域为 D_1, $u=g(x)$ 定义域为 D_2, 而且 $g(D_2)\subset D_1$, 那么 y 通过中间变量 u 而得到 x 的函数 $y=f(u)=f[g(x)]$ 称为由外层函数 $y=f(u)$ 与内层函数 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**,记作 $y=(f\circ g)(x)=f[g(x)]$, $x\in D_2$.

注意

f 与 g 可以复合的条件: $g(D_2)\subset D_1$.

【例 1-1-5】 设 $f(x)$的定义域是$(0,\ 1)$,求 $f(\sin x)$ 的定义域.

解 因为 $\sin x\in(0,\ 1)$,所以 $x\in(2k\pi,\ (2k+1)\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$.

【例 1-1-6】 求 $\arccos(\ln x)$的定义域.

解 因为 $\arccos x$ 的定义域为$[-1,\ 1]$,所以由 $-1\leqslant\ln x\leqslant 1$ 得$\dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant x\leqslant\mathrm{e}$.

【例 1-1-7】 设 $f(x+1)=x^2+x$,求函数 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解 令 $t=x+1$,则 $x=t-1$,则 $f(t)=(t-1)^2+t-1=t^2-t$,

所以 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{1}{x}$.

【例 1-1-8】 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$, $f[g(x)]=1-x^2$,求 $g(x)$.

解 因为 $f[g(x)]=\mathrm{e}^{g(x)}=1-x^2$,所以 $g(x)=\ln(1-x^2)$.

两个以上的函数也可以进行复合运算,并且满足结合律,即 $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$,复合函数的中间变量不止一个,例如 $y=\sin u$, $u=\cos v$, $v=\ln x$,则 $y=\sin[\cos(\ln x)]$ 是经过中间变量 u 和 v 复合而成的.

四、函数的特性

1. 函数的有界性

定义 1-4　设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $X \subset D$.

若 $M \geqslant 0$,使得 $x \in X$,都有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$在区间 X 上有界.

若 M_1,使得 $x \in X$,都有 $f(x) \leqslant M_1$,则称函数 $f(x)$在区间 X 上有上界.

若 M_2,使得 $x \in X$,都有 $f(x) \geqslant M_2$,则称函数 $f(x)$在区间 X 上有下界.

注意

(1) $f(x)$在 D 上有界$\Leftrightarrow f(x)$在 D 上有上、下界.

(2) 若函数 $f(x)$在区间 I 内有界,则称 $f(x)$为区间 I 内的有界函数.

例如,函数 $y=\arctan x$,对于$(-\infty, +\infty)$内的任一 x,都有 $|\arctan x| \leqslant 1$ 成立,所以 $y=\arctan x$ 在$(-\infty, +\infty)$内有界.而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(1, 2)$内有界,但在$(0, 1)$内无界.

(3) 常见有界函数: $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2},\ 0 < \operatorname{arccot} x < \pi.$$

2. 函数的单调性

定义 1-5　若对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 是区间(a, b)上的**单调递增函数**;当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 是区间(a, b)上的**单调递减函数**,单调递增函数和单调递减函数统称**单调函数**,若函数 $y=f(x)$ 是区间(a, b)上的单调函数,则称区间(a, b)为**单调区间**.

例如函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内不是单调函数,但在区间$(-\infty, 0)$内单调减少,在区间$(0, +\infty)$内单调增加.

函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加,$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$是它的一个单调增区间.

3. 函数的奇偶性

定义 1-6　设函数 $f(x)$的定义域为 D 关于原点对称(即若 $x \in D$,则有 $-x \in D$).

(1) 如果对于任意 $x \in D$, $f(-x)=f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$为偶函数.

(2) 如果对于任意 $x \in D$, $f(-x)=-f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$为奇函数.

既不是奇函数也不是偶函数的函数,称为非奇非偶函数.

例如 $y=\sin x$ 是奇函数, $f(x)=\cos x$ 是偶函数, $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

注意

(1) 偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1-13 所示.

(2) 奇函数的图形关于原点对称,如图 1-14 所示.

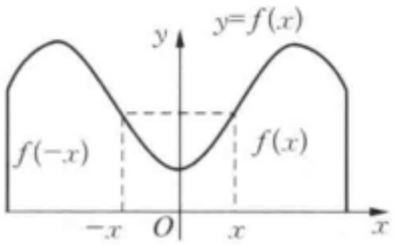

图 1-13

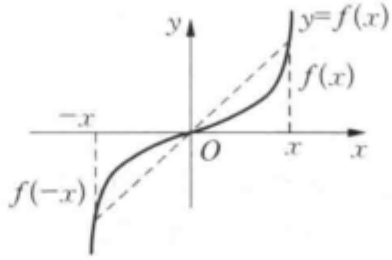

图 1-14

【例 1-1-9】 判断 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 $D_f=\mathbf{R}$ 关于原点对称.

因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}=-f(x),$$

所以是奇函数.

4. 函数的周期性

定义 1-7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,使得对于任一 $x\in D$,有 $(x+T)\in D$,且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,常数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

例如,函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数,$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

注意

(1) 当 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期时,则 $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, $\pm 4T$, … 也都是 $f(x)$ 的周期,通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期.

(2) 若 $f(x)$ 的周期为 T,则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

1.1.4 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数与人类的生产和生活密切相关,应用广泛,是最先被研究的五类函数,比如人们编制的各种函数表,如平方表、开方表、对数表、三角函数表等,这些已有的研究结论和性质可以像公理一样,直接利用,因此,这五类函数被称为**基本初等函数**.

(1) **幂函数**: $y=x^\alpha(\alpha\neq 0)$

性质: $y=x^\alpha$ 的定义域随 α 值不同而异,但不论 α 值是多少,它在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的.

当 $\alpha>0$ 时, $y=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 是单调递增函数;

当 $\alpha<0$ 时, $y=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 是单调递减函数.

(2) **指数函数**: $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$, 如图 1-15 所示.

定义域: $(-\infty,+\infty)$, 值域: $(0,+\infty)$, 当 $a=\mathrm{e}$ 时, $y=\mathrm{e}^x$.

运算性质有: ① $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$;

② $(ab)^x = a^x b^x$；

③ $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$.

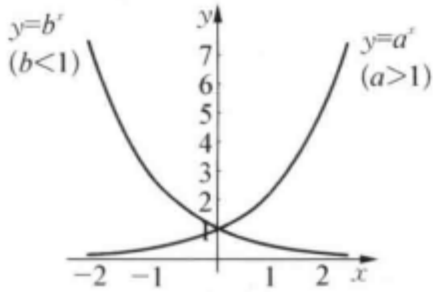

图 1－15

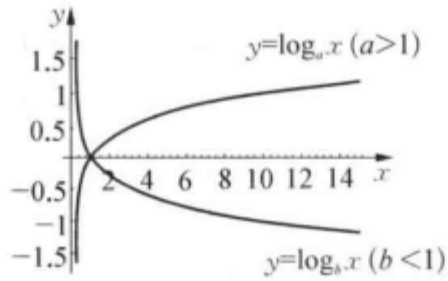

图 1－16

(3) **对数函数**：$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$，如图 1－16 所示.

定义域：$(0, +\infty)$，值域：$(-\infty, +\infty)$，当 $a = \mathrm{e}$ 时，$y = \ln x$.

运算性质：① $a^{\log_a x} = x$；

② $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$；

③ $\ln ab = \ln a + \ln b$；

④ $\ln a^b = b \ln a$.

(4) **三角函数**：

正弦函数：$y = \sin x$，余弦函数：$y = \cos x$.

正切函数：$y = \tan x$，余切函数：$y = \cot x$.

正割函数：$y = \sec x$，余割函数：$y = \csc x$.

常用三角公式：

同角的三角函数的关系

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$；　② $\tan x = \sin x / \cos x = 1/\cot x$；　③ $\tan x \cdot \cot x = 1$；

④ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$；　⑤ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$；　⑥ $\sin x \cdot \csc x = 1$；

⑦ $\cos x \cdot \sec x = 1$.

两角之和与差的三角函数

① $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$；　② $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

倍角公式：

① $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$；　② $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

和、差化积公式

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

积化和差公式

$$\sin x \cdot \sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)];$$

$$\cos x \cdot \cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)];$$

$$\sin x \cdot \cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)];$$

$$\cos x \cdot \sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)].$$

(5) **反三角函数**:

反正弦函数: $y=\arcsin x$, 定义域:$[-1, 1]$,值域: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数: $y=\arccos x$, 定义域:$[-1, 1]$,值域: $[0, \pi]$.

反正切函数: $y=\arctan x$, 定义域:$(-\infty, +\infty)$,值域: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数: $y=\operatorname{arccot} x$, 定义域:$(-\infty, +\infty)$,值域:$(0, \pi)$.

由五类基本初等函数和常函数经过有限次的四则运算和有限次复合运算所得到的,并且可以用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

例如, $y=2\sin x+3\cos x$, $y=\cos(\sin x)$, $y=\sin(\ln x)+x^2$ 为初等函数.

在初等函数的定义中,明确指出是用一个式子表示的函数,若一个函数必须用几个式子表示(如分段函数),则就不是初等函数,称为非初等函数.比如下列三个非初等函数:

狄利克雷函数: $D(X)=\begin{cases}1 & x\text{ 是有理数}\\ 0 & x\text{ 是无理数}\end{cases}$, 定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$\{0, 1\}$.

符号函数: $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$, 定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$\{-1, 0, 1\}$,如图 1-17 所示.

取整函数: $y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为整数解 $\mathbf{Z}$,如图 1-18 所示.

比如 $[0.2]=0$, $[-0.2]=-1$, $[2]=2$.

一般地,当 $x\in[n, n+1)$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ 时, $[x]=n$.

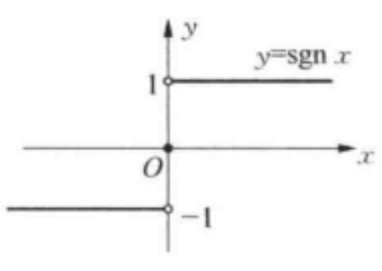

图 1-17

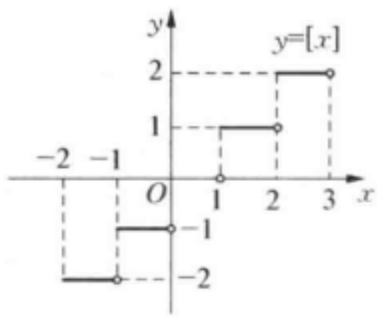

图 1-18

1.1.5 建立函数关系举例

利用函数解决实际应用问题，首先要明确问题中的因变量和自变量，再根据题意建立等式，从而得出函数关系，然后确定函数的定义域.确定应用问题中函数的定义域，除根据函数的解析式外，还要考虑变量在实际问题中的含义.下面我们通过几个实例来介绍如何建立函数关系，为以后运用微积分解决实际问题打下一定的基础.

利用函数方法解决几何(如平面几何、立体几何及解析几何)问题，是对数学知识方法的综合运用.

【例 1-1-10】 如图 1-19 所示，一动点 P 自边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 出发，沿正方形的边界运动一周，再回到 A 点.若点 P 的路程为 x，点 P 到顶点 A 的距离为 y，求 A,P 两点间的距离 y 与点 P 的路程 x 之间的函数关系式.

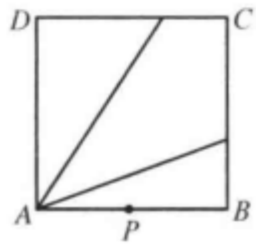

图 1-19

解 (1) 当点 P 在 AB 上，即 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$AP = x$，也就是 $y = x$.

(2) 当点 P 在 BC 边上，即 $1 < x \leqslant 2$ 时，$AB = 1$，$AB + BP = x$，$BP = x - 1$，根据勾股定理，得 $AP^2 = AB^2 + BP^2$，所以

$$y = AP = \sqrt{1 + (x-1)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

(3) 当点 P 在 DC 边上，即 $2 < x \leqslant 3$ 时，$AD = 1$，$DP = 3 - x$.根据勾股定理，得 $AP^2 = AD^2 + DP^2$，所以

$$y = AP = \sqrt{1 + (3-x)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 10}.$$

(4) 当点 P 在 AD 边上，即 $3 < x \leqslant 4$ 时，有 $y = AP = 4 - x$.

所以所求的函数关系式为

$$y = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2} & 1 < x \leqslant 2 \\ \sqrt{x^2 - 6x + 10} & 2 < x \leqslant 3 \\ 4 - x & 3 < x \leqslant 4 \end{cases}.$$

工程设计问题是指运用数学知识对工程中的定位、大小、采光等情况进行合理分析和确定的一类问题.

【例 1-1-11】 要在墙上开一个上部为半圆，下部为矩形的窗户(如图 1-20)，在窗框为定长 l 的条件下，要使窗户透光面积最大，窗户应具有怎样的尺寸?

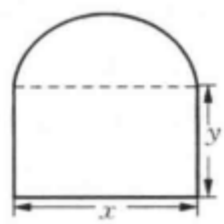

图 1-20

解 设半圆的直径为 x，矩形的高度为 y，窗户透光面积为 S，则窗框总长 $l = \dfrac{\pi x}{2} + x + 2y$，所以

$$y = \frac{2l - (2+\pi)x}{4},$$

$$S=\frac{\pi}{8}x^2+xy=\frac{\pi}{8}x^2+\frac{2l-(2+\pi)x}{4}\cdot x$$
$$=-\frac{4+\pi}{8}\left(x-\frac{2l}{4+\pi}\right)^2+\frac{l^2}{2(4+\pi)}.$$

当 $x=\frac{2l}{4+\pi}$ 时，$S_{\max}=\frac{l^2}{2(4+\pi)}$，

此时，$y=\frac{l}{4+\pi}=\frac{x}{2}$.

所以窗户中的矩形高为 $\frac{l}{4+\pi}$，宽为$\frac{2l}{4+\pi}$时透光面积最大.

在营销活动中，常常会遇到产品成本、利润(率)的计算，销售价格的确定，也就是成本最低，利润最大的问题.相关计算公式：利润＝销售价－成本价.

【例 1-1-12】 将进货价为 8 元的商品按每件 10 元售出，每天可销售 200 件，若每件售价涨价 0.5 元，其销售量就减少 10 件.问应将售价定为多少时，才能使所赚利润最大，并求出这个最大利润.

解 设每件售价提高 x 元，则每件得利润$(2+x)$元，每天销售量变为$(200-20x)$件，所获利润

$$y=(2+x)(200-20x)$$
$$=-20(x-4)^2+720.$$

当 $x=4$ 时，即售价定为 14 元时，每天可获最大利润为 720 元.

单利是指本金到期后的利息不再加入本金计算.设本金为 P 元，每期利率为 r，经过 n 期后，按单利计算的本利和公式为 $S_n=P(1+nR)$.

【例 1-1-13】 某人于 2021 年 6 月 15 日存入银行 1 000 元整存整取定期一年储蓄，月息为 9‰，求到期的本利和为多少？

解 这里 $P=1\,000$ 元，$r=9$‰，$n=12$，由公式得 $S_{12}=P(1+12r)=1\,000\times(1+0.009\times 12)=1\,108$ 元.

答 本利和为 1 108 元.

复利是指把前一期的利息和本金加在一起做本金，再计算下一期的利息.设本金为 P，每期利率为 r，设本利和为 y，期数为 x，则复利函数式为 $y=P(1+r)^x$.

【例 1-1-14】 某公司计划发行公司债券，每张债券现值 500 元，按年利率 6.5%的复利计息，问多少年后每张债券一次偿还本利和 1 000 元？(参考 $\lg 2=0.301\,0$，$\lg 1.065=0.027\,4$).

解 设 n 年后每张债券一次偿还本利和 1 000 元，由 $1\,000=500(1+6.5\%)^n$，解得 $n=\lg 2/\lg 1.065\approx 11$.

答 11 年后每张债券应一次偿还本利和 1 000 元.

由上面的几个例子，我们可以给出建立函数模型的具体步骤：

第一步　分析问题中变量与常量，并分别用字母表示.

第二步　根据所给条件，运用数学、物理、经济及其他知识确定等量关系.

第三步　确定解析式 $y=f(x)$，并指明其定义域.

习题 1-1

一、填空题：

1. 设 $f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$__________.

2. 设 $f(\varphi(x))=1+\cos x$，$\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$，则 $f(x)=$__________.

3. 已知函数 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 对任何实数都成立，则 $f(0)=$__________.

4. 函数 $y=\sin 2x-\tan\dfrac{x}{3}$ 的图形关于________对称.

5. 函数 $y=|\sin x|$ 的最小正周期 $T=$__________.

二、判断下列各组函数是否相同：

1. $y=x^3+1$ 与 $s=t^3+1$.

2. $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$.

3. $y=|\sin x|$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$.

4. $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 与 $y=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

5. $y=\sqrt[3]{x^5-2x^3}$ 与 $y=x\sqrt[3]{x^2-2}$.

三、求下列函数的反函数：

1. $y=\cos x$，$x\in(\pi,2\pi)$.

2. $y=\ln(x+2)+1$.

3. $y=\sqrt{x-1}$.

4. $y=e^{x^3}$.

5. $y=\begin{cases}x+1 & x\geqslant 0\\ x^3 & x<0\end{cases}$.

四、求下列函数的定义域：

1. $y=\sin\sqrt{4-x^2}$.

2. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\sqrt{x+2}$.

3. $y=\arccos\ln\dfrac{x}{10}$.

4. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

5. $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$.

五、已知 $f(x)$ 定义域为 $[0,1]$，求 $f(x^2)$，$f(\sin x)$，$f(\ln x)$，$f(x+a)$，$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 的定义域.

六、设 $f(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f(3)$，$f(2)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

七、已知 $f(x)$ 是二次多项式，且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，求 $f(x)$.

八、设 $f(x)$ 是定义在 $[-l,l]$ 上的任意函数，证明：

(1) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数；

(2) $f(x)$ 可表示成偶函数与奇函数之和的形式.