

启航教育

YUN TU
YUN TU

2023版

张宇数学教育系列丛书·二

书课包

张宇考研数学

题源探析经典

1000

题

○ 主编 张宇

○ 副主编 高昆轮

【数学三·习题分册】



北京理工大学出版社



扫码领课

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典 1000 题. 数学三. 习题分册 / 张宇主编. — 北京 : 北京理工大学出版社, 2022. 1

ISBN 978-7-5763-0815-0

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 005875 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68944723(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市文阁印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 9.5

字 数 / 237 千字

版 次 / 2022 年 1 月第 1 版 2022 年 1 月第 1 次印刷

定 价 / 129.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 高 芳

文案编辑 / 胡 莹

责任校对 / 刘亚男

责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前言

PREFACE

“数学成绩是做出来的。”这是我曾经在考研数学大纲解析中写的一句话，这里的“做”指的是做题，在复习的整个过程中做足够量的好题，并搞懂吃透每一道题，便可以取得很好的数学成绩。

本书是我和教学团队对考研数学题源研究的最新成果，供 2023 考研的考生在整个复习过程中使用。

为了突出考研数学新大纲与新的命题趋势，更好地指导即将进入大众化考研的考研群体，这次再版，本书做了大幅修订。一是增加优秀的客观题的数量，反映新大纲的要求；二是进一步优化习题，反映新的命题要求；三是将习题分成两大部分，结合已经出版的《张宇考研数学基础 30 讲——基础 300 题》(配套《张宇考研数学基础 30 讲》)，可在复习的不同阶段使用，具体说明如下。

《张宇考研数学基础 30 讲——基础 300 题》可以看作基础题。所谓基础题，主要包含如下涵义：一是考查基本的概念、公式和定理的题目；二是题型常规且计算量不大的题目。这类题目主要用来热身并巩固所学的基础知识，属于基础知识的再现，难度不大，区分度也不高，属于送分题，在考研中所占分量约为五分之一，一般来说，除非粗心大意，考生不会在这类题目上丢分。考生在基础阶段应该完成这些题目，为强化阶段的复习打下基础。

本书每一章的第一部分——强化训练，可以看作中等难度题。所谓中等难度题，主要包含如下涵义：一是考查比较复杂的概念、公式和定理的题目；二是题型常规但计算量较大的题目；三是基本的应用题目，包括几何应用和专业应用。这类题目主要用来深刻考查考生对所学知识的理解和运用，区分度较高，难度中等及中等偏上，在考研中所占分量约为五分之三，是考研数学试卷上的重头戏，这类题目会决定考生考研数学成绩，甚至考研成败。考生在强化复习阶段要认真操练这类题目，努力提高自己的考研数学水平。

本书每一章的第二部分——巩固提高，可以看作难题。所谓难题，主要包含如下涵义：一是考查冷僻的概念、公式和定理的题目，虽然这类题目综合性不强，计算量也不大，但是冷僻。所谓冷僻，既包括考研知识中几乎不考的边角料知识，也包括考查频率很低(多年不考)的常规知识，会给考生造成措手不及的感觉，极易丢分；二是计算量大的题目，考研数学题大部分是要通过计算才能得出结果的，计算量大的题目，对于平时复习时眼高手低，不注重提高计算能力的考生，着实是一种难题；三是题型新颖的综合性题目，近几年的考研中，尤其从 2019 年开始，为了体现公平公正，反对社会上押题猜宝的不良风气，树立正确的复习备考观，命题单位加大了对从未考查过的新颖命题的设计和考查力度，这类题目命题手法高超、风格独特、行云流水、令人拍案叫绝。难题在考研中所占分量约为五

分之一，而且有加大分量的趋势，这类问题不再只是所谓尖子生的专用考题，对于即将进入大众化考研的庞大考研群体来说，这类题目做得好不好，也是至关重要的。考生在强化阶段和冲刺阶段，除了要完成历年真题的训练之外，还要多做既好又新的题目，这样才能应对考研的激烈竞争，稳操胜券。

感谢命题专家们给予的指导和帮助，感谢历届考生对本书的厚爱和建议，感谢编辑老师们的辛勤工作。希望考生认真研读、操练本书中的每一道题目，提高解题能力，争取考研得到高分。

张宇

2021年12月 于北京



▶ 第一篇 微积分 ◀

第 1 章 函数极限与连续	3
强化训练	3
巩固提高	6
第 2 章 数列极限	9
强化训练	9
巩固提高	10
第 3 章 一元函数微分学的概念	11
强化训练	11
巩固提高	12
第 4 章 一元函数微分学的计算	13
强化训练	13
巩固提高	14
第 5 章 一元函数微分学的应用(一)——几何应用	15
强化训练	15
巩固提高	18
第 6 章 一元函数微分学的应用(二)——中值定理、微分等式与微分不等式	20
强化训练	20
巩固提高	21
第 7 章 一元函数微分学的应用(三)——经济应用	23
强化训练	23
巩固提高	23

第8章 一元函数积分学的概念与性质	25
强化训练	25
巩固提高	27
第9章 一元函数积分学的计算	29
强化训练	29
巩固提高	31
第10章 一元函数积分学的应用(一)——几何应用	33
强化训练	33
巩固提高	34
第11章 一元函数积分学的应用(二)——积分等式与积分不等式	35
强化训练	35
巩固提高	36
第12章 一元函数积分学的应用(三)——经济应用	37
强化训练	37
巩固提高	37
第13章 多元函数微分学	38
强化训练	38
巩固提高	43
第14章 二重积分	45
强化训练	45
巩固提高	50
第15章 微分方程	51
强化训练	51
巩固提高	53
第16章 无穷级数	56
强化训练	56
巩固提高	61

▶ 第二篇 线性代数 ◀

第1章 行列式	67
强化训练	67
巩固提高	69

第 2 章 余子式和代数余子式的计算	71
强化训练	71
巩固提高	71
第 3 章 矩阵运算	73
强化训练	73
巩固提高	76
第 4 章 矩阵的秩	78
强化训练	78
巩固提高	78
第 5 章 线性方程组	80
强化训练	80
巩固提高	83
第 6 章 向量组	85
强化训练	85
巩固提高	87
第 7 章 特征值与特征向量	89
强化训练	89
巩固提高	90
第 8 章 相似理论	92
强化训练	92
巩固提高	94
第 9 章 二次型	96
强化训练	96
巩固提高	98

▶ 第三篇 概率论与数理统计 ◀

第 1 章 随机事件和概率	103
强化训练	103
巩固提高	106
第 2 章 一维随机变量及其分布	108
强化训练	108
巩固提高	110

第3章 一维随机变量函数的分布	112
强化训练	112
巩固提高	113
第4章 多维随机变量及其分布	114
强化训练	114
巩固提高	117
第5章 多维随机变量函数的分布	119
强化训练	119
巩固提高	120
第6章 数字特征	122
强化训练	122
巩固提高	125
第7章 大数定律与中心极限定理	130
强化训练	130
巩固提高	131
第8章 统计量及其分布	133
强化训练	133
巩固提高	136
第9章 参数估计	138
强化训练	138
巩固提高	141

第一篇 微积分

微积分是硕士研究生招生考试考查内容之一，主要考查考生对微积分的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决实际问题的能力。在考研数学三试卷中分值约90分。

第1章 函数极限与连续

强化训练



1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\tan x} - 1}{x^2} = (\quad)$.
- (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2
2. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos 2x}}{x^a \ln(1+x)} = b \neq 0$, 则 (\quad) .
- (A) $a = -\frac{2}{3}, b = -1$ (B) $a = \frac{2}{3}, b = 1$
(C) $a = -1, b = -\frac{2}{3}$ (D) $a = 1, b = \frac{2}{3}$
3. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中, 与 x 同阶的无穷小是 (\quad) .
- (A) $\sqrt{1+x} - 1$ (B) $\ln(1+x) - x$ (C) $\cos(\sin x) - 1$ (D) $x^x - 1$
4. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则 (\quad) .
- (A) $a = \frac{1}{2}, b = 1$ (B) $a = 1, b = 1$
(C) $a = -\frac{1}{2}, b = -1$ (D) $a = -1, b = 1$
5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \ln(1+x^2) - 2\sqrt[3]{(e^x - 1)^2}$ 是无穷小量 x^k 的同阶无穷小, 则 $k = (\quad)$.
- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$
6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量中, 最高阶的无穷小是 (\quad) .
- (A) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ (B) $1 - \cos x$
(C) $\tan x - \sin x$ (D) $e^x + e^{-x} - 2$
7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin x + \int_0^x t^2 e^{t^2} dt$ 是 x 的 k 阶无穷小, 则 $k = (\quad)$.
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
8. 当 $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+$ 时, $\pi - 4\arccos\sqrt{2}x$ 与 $a\left(x - \frac{1}{2}\right)^b$ 为等价无穷小, 则 (\quad) .
- (A) $a = 4, b = 2$ (B) $a = -4, b = 2$
(C) $a = 8, b = 1$ (D) $a = -8, b = 1$

9. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = ax^3 + bx$ 与 $g(x) = \int_0^{\sin x} (e^{t^2} - 1) dt$ 是等价无穷小, 则().

- (A) $a = \frac{1}{3}, b = 1$ (B) $a = 3, b = 0$ (C) $a = \frac{1}{3}, b = 0$ (D) $a = 1, b = 0$

10. 设 $f(x)$ 连续, $f(0) = 1$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x-\tan x} f(t) dt$ 与 $(1 + \sin^2 x)^b - 1$ 为等价无穷小, 则().

- (A) $a = 3, b = \frac{1}{3}$ (B) $a = 3, b = -\frac{1}{3}$
 (C) $a = 1, b = \frac{1}{3}$ (D) $a = 1, b = -\frac{1}{3}$

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \ln(1 + x^2) - \ln(1 + \sin^2 x)$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则正整数 n 为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{f(x)}{x^3} + \frac{\sin x^3}{x^4} \right] = 5$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的().

- (A) 等价无穷小量 (B) 同阶但不等价的无穷小量
 (C) 高阶无穷小量 (D) 低阶无穷小量

13. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, 又设 $g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\ln(1+t^2)} dt$, $h(x) = \int_0^{\sin x} \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}-1} dt$,

则当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x)$ 是 $h(x)$ 的().

- (A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小
 (C) 同阶但不等价的无穷小 (D) 等价无穷小

14. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x}{1+x^{2n}}$, 则 $f(x)$ ().

- (A) 不存在间断点 (B) 存在间断点 $x = 1$
 (C) 存在间断点 $x = 0$ (D) 存在间断点 $x = -1$

15. 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ 2+x, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x-1, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $g[f(x)]$ 的().

- (A) 连续点 (B) 可去间断点 (C) 跳跃间断点 (D) 第二类间断点

16. 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b)] = 0$, 则常数 a, b 的值分别为().

- (A) $1, \frac{1}{2}$ (B) $1, -\frac{1}{2}$ (C) $-1, \frac{1}{2}$ (D) $-1, -\frac{1}{2}$

17. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处连续, 且 $f(2) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[3 - f\left(\frac{\sin 2x}{x}\right) \right] =$ _____.

18. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-4x^2 \sin x} - 1}{x \ln(1+2x^2)} =$ _____.

19. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\sqrt{1 + \tan \sqrt{x}} - \sqrt{1 + \sin \sqrt{x}}$ 是 x 的 k 阶无穷小, 则 $k =$ _____.

20. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \cos x \cos 2x$ 与 cx^k 为等价无穷小, 则 $c =$ _____, $k =$ _____.

21. 当 $x \rightarrow \pi$ 时, 若有 $\sqrt[4]{\sin \frac{x}{2}} - 1 \sim A(x - \pi)^k$, 则 $A =$ _____, $k =$ _____.

22. 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x-2}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\sin x}^x \sqrt{3+t^2} dt}{x(e^{x^2}-1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

25. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

26. 计算下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-5x} - \sqrt{x^2+7} + \frac{\sin^4 x}{\sqrt{x}} \right)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{e^{x^2} - 1}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{x - \arctan x}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{2x+5}}{x^2-4}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\cos x \ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}$;

(7) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} + a^{-\frac{1}{x}} - 2 \right), a > 0, a \neq 1$;

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$;

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$;

(10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln \left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \right)}$;

(11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

(12) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x}$;

(14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)}$;

(15) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right], a \neq 0$;

(16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$;

(17) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}, a_i > 0, \text{且 } a_i \neq 1, i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2$;

(18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x^4} + \cos 4x - 2}{\sqrt[3]{1-x^2} - 1}$;

(19) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\tan x)^x}{x(\sqrt{1+3\sin^2 x} - 1)}$.

27. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

28. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{\sin x \int_0^1 \tan(xt)^2 dt}$.

29. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x(\cos x - 4) + 3x$ 为 x 的几阶无穷小?

30. 确定常数 A, B, C 的值, 使 $e^x(1+Bx+Cx^2) = 1+Ax+o(x^3)(x \rightarrow 0)$.

31. 确定函数 $f(x) = \frac{2x(x-1)}{|x|x^2-|x|}$ 的间断点, 并判定其类型.

32. 设 $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, b \neq 1$, 且

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

- (1) 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性;
 (2) 讨论 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(-1), f(1)$ 五者之间的大小关系.

33. 求 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{1-x}}}$ 的连续区间、间断点, 并判别间断点的类型.

34. 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的间断点, 并指出其类型.

35. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - x^2 - ax - 1}{2x \arctan x - \ln(1+x^2)}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} - ax - 1}{ax \ln(1+x)}, & x > 0, \end{cases}$ 问: 当常数 $a(a \neq 0)$ 为何值时,

- (1) $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点?
 (2) $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点?
 (3) $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点?

36. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2 + e^{nx}}$, 求 $f(x)$ 的间断点, 并判定其类型.

37. 已知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 是连续函数, 求 a, b 的值.

巩固提高



1. 设 $f(x) = x^2 - (\arcsin x)^2, g(x) = x^2 - (\arctan x)^2$, 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x)$ 是 $kg(x)$ 的等价无穷小, 则常数 $k = (\quad)$.

- (A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

2. 设 $\alpha(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\ln(1+t)}{1+t^4} dt, \beta(x) = \int_0^{\tan x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$, 则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 (\quad) .

- (A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价的无穷小
 (C) 低阶无穷小 (D) 高阶无穷小

3. 设 $F(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 a_1, a_2, \dots, a_n 都是不等于 1 的正数, 令 $A = \lim_{x \rightarrow 0} F(x)$,

$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x), C = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$, 则 A, B, C 的大小关系为 (\quad) .

- (A) $A \leq B \leq C$ (B) $B \leq C \leq A$
 (C) $C \leq A \leq B$ (D) $A \leq C \leq B$

4. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 + n\sin^2 \pi x}$, 则 $f(x) (\quad)$.

- (A) 处处连续
 (B) 只有第一类间断点
 (C) 只有第二类间断点

(D) 既有第一类间断点, 又有第二类间断点

5. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3}}{\sqrt{3^{2n} + x^{2n}}}$ ($-\infty < x < +\infty$), 则 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上().

(A) 连续

(B) 有一个可去间断点

(C) 有一个跳跃间断点

(D) 有一个第二类间断点

6. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{1}{n^x}$ ($0 < x < +\infty$), 则 $f(x)$ 在其间断点处的值等于_____.

7. 记 $f(x) = 27x^3 + 5x^2 - 2$ 的反函数为 f^{-1} , 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(27x) - f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

8. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \frac{\ln(x + e^x)}{x} \right]$.

9. 计算下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2 [1 - \ln(1+x)]}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2} \int_0^x (\sqrt{t+1}-1) dt} dt$;

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - xe^{\frac{1}{x}})$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}) \sin \frac{x^2}{2}}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{(\sqrt[3]{1+x^3}-1) \sin x}$;

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1-\cos x)}$;

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$;

(9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$.

10. 设函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$), 证明: 存在常数 A, B , 使得当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 恒有 $f(x) = e + Ax + Bx^2 + o(x^2)$,

并求常数 A, B .

11. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x - x}, & x < 0, \\ \frac{e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + x - 1}{x \sin \frac{x}{6}}, & x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}}$$

求 $\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)]$.

12. 设 $\alpha \geq 5$ 且为常数, 则 k 为何值时极限

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^\alpha + 8x^4 + 2)^k - x]$$

存在, 并求此极限值.

13. 已知极限 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4} + \frac{c}{x^5} \int_0^x e^{-t^2} dt \right) = 1$, 求常数 a, b, c .

14. 设 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 满足 $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$, 且 $f(0) = 1$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

15. 设 $f(x; t) = \left(\frac{x-1}{t-1} \right)^{\frac{t}{x-t}}$ ($(x-1)(t-1) > 0, x \neq t$), 函数 $f(x)$ 由表达式

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(x; t)$$

确定, 求 $f(x)$ 的连续区间和间断点, 并判定间断点的类型.

16. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (2x)^n + x^{2n}}$ ($x \geq 0$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

第2章 数列极限

强化训练



1. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2} - \frac{4}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots,$$

且 $x_1 = 1, x_2 = 2$, 则 $\{x_n\}$ 收敛于().

- (A) 1 (B) -1 (C) $\frac{5}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}$

2. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

3. 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

4. 设 $x > 0, n$ 为正整数, 记 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{(n+1)x}}]$, 则 $f'(x) =$ _____.

5. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right), a > 0$.

6. 设 $F(x, y) = \frac{f(y-x)}{2x}, F(1, y) = \frac{y^2}{2} - y + 5, x_0 > 0, x_1 = F(x_0, 2x_0), \dots, x_{n+1} = F(x_n, 2x_n),$
 $n = 1, 2, \dots$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限.

7. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(x_n + 1) (n = 1, 2, \dots)$, 求:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right)$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right)^{\frac{1}{x_n}}$.

8. 证明下列结论:

(1) 设比值极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = q$, 若 $q < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 若 $q > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$;

(2) 设根值极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, 若 $q < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 若 $q > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

9. 设 x_0 为任意正数,

$$x_n = \frac{2\ 022}{2\ 023} x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^{2\ 022}} (n = 1, 2, \dots),$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.