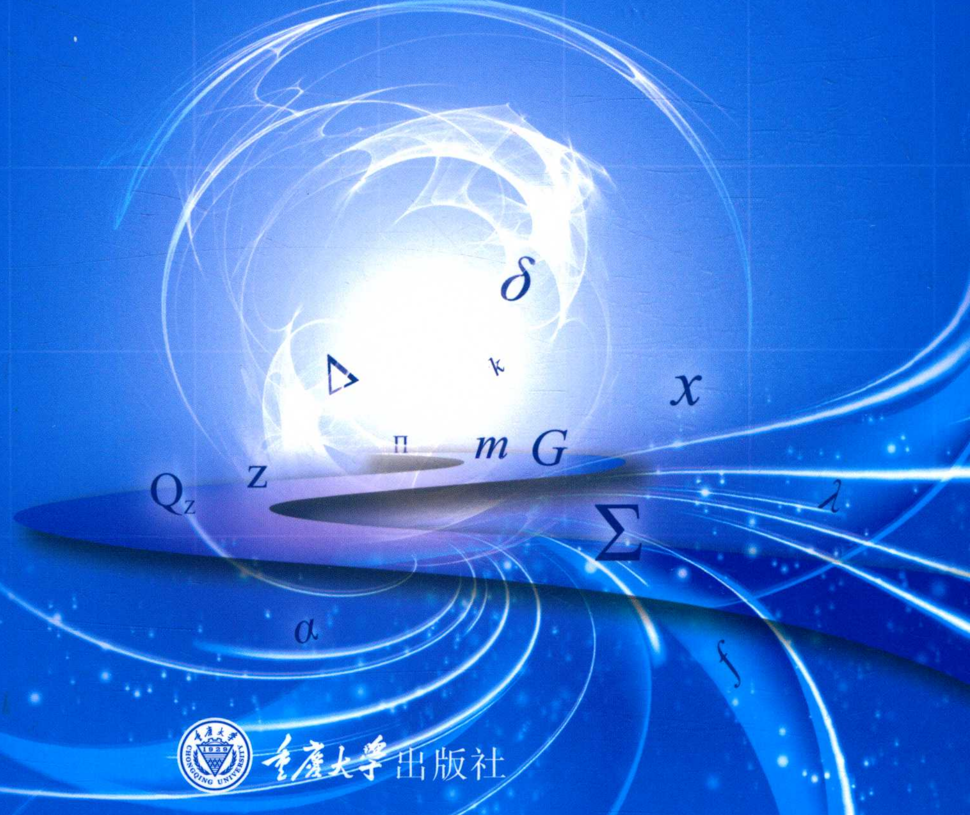
多元理想插值的离散化

DUOYUAN LIXIANG CHAZHI DE LISANHUA

姜　雪◎著



重庆大学出版社

多元理想插值的离散化

姜　雪◎著

重庆大学出版社

内容提要

本书综述了多元多项式插值与理想插值的研究理论并系统介绍了理想插值中离散化问题的背景理论及发展动向，总结了作者近年来在理想插值离散化问题上所取得的一些研究成果。本书主要包含四部分内容：多元理想插值问题的离散逼近算法；针对二阶微分闭子空间离散逼近问题的简化离散算法及其改进方法；二元理想插值的构造性离散化算法；宽度为 1 的微分闭子空间的等价表示及其离散化问题。

本书可供高等学校计算数学及应用数学等相关专业的教师、研究生和高年级本科生使用。

图书在版编目(CIP)数据

多元理想插值的离散化 / 姜雪著. -- 重庆 : 重庆大学出版社, 2022.1

ISBN 978-7-5689-3058-1

Ⅰ. ①多… Ⅱ. ①姜… Ⅲ. ①插值多项式—离散化 Ⅳ. ①O174.42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 247514 号

多元理想插值的离散化

姜　雪　著

策划编辑：杨粮菊

责任编辑：文　鹏　　版式设计：杨粮菊

责任校对：关德强　　责任印制：张　策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：饶帮华

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401331

电话：(023)88617190　88617185(中小学)

传真：(023)88617186　88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司公司

*

开本：720mm×1020mm　1/16　印张：5.75　字数：92 千

2022 年 1 月第 1 版　2022 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5689-3058-1　定价：48.00 元

前言

多项式插值是函数逼近中常用的方法，也是一个古老而经典的研究问题。一元多项式插值理论，包括插值函数的构造、误差分析、最佳逼近性质等在各类《数值分析》或者《数值计算方法》教材中都有详尽介绍。相比而言，多元多项式插值由于其本身问题的复杂性，相关理论结果还很不完善，但仍然有一些经典的教材和论著。多项式插值的源头可追溯到 17 世纪，Newton 为计算彗星轨道而提出了著名的 Newton 插值公式。随着科学技术的不断发展，多项式插值理论现已被广泛地应用在诸如图像处理、电子通信、控制论、机械工程等多个领域。正是由于现今许多工程实践应用中的问题最终都归结为多元非线性模型，而多元多项式插值理论和算法可作为建模的基础方法和强有力工具，因此其理论研究更值得我们深入探讨。现有的多元逼近方向的书籍大多通过传统的分析和代数工具寻求适定的多项式插值空间来满足给定的插值条件，或根据特定的插值空间构造适定的插值节点组，但由于多元情形下插值条件十分复杂，表示形式也不尽相同，因此仅应用传统数学工具来研究多元多项式插值会有一定的局限。

值得注意的是，近年来以 Groebner 基理论为代表的代数几何迅猛发展，对多元多项式理论的发展起到了积极的推动作用。多项式插值整体上可以分为理想插值和非理想插值两类，实际应用中的很多问题均可归为前者。当所有插值型值都取零时，满足这样插值条件的多项式全体构成一个理想，这类

插值问题就是所谓的理想插值。在理想插值概念提出后的一段时间内，相关后续研究成果并不多。直到 2005 年，美国科学院院士 Carl de Boor 发表了理想插值综述才使这一理论蓬勃发展起来。在理想插值研究领域中做出杰出贡献的还有美国南佛罗里达大学的 Boris Shekhtman 教授。国内利用代数几何工具研究理想插值问题的相关著作更是少之又少，也基于此原因，我们想把这本《多元理想插值的离散化》呈现给研究人员及相关领域的读者同行。

本书面向的读者对象是计算数学尤其是逼近理论研究的相关研究生学生及高校教师。本书具有以下特点：首先，作为多元逼近相关教材的教学参考书，其内容循序渐进，由浅入深，易于接受；其次，本书由局部扩散到整体，以理想插值中的一个重要的离散化问题进行展开，系统地介绍了相关背景理论及其发展动向；再次，本书基于代数几何工具结合微分闭子空间的结构分析，虽然解决的是离散化问题，但多项式方程组求解问题与多项式插值问题息息相关，对相关学科发展也将起到积极的促进作用。

本书的主要内容如下：第 1 章是绪论，概括地介绍了多项式插值与理想插值的发展历史，叙述了本书主要的研究问题以及研究思路，总结了已经取得的重要研究结论，列出了本书涉及的代数几何基础知识；第 2 章针对一般的理想插值问题给出了一个离散化算法，并分析了算法的优势和弊端；第 3 章讨论了二阶微分闭子空间的一般结构并利用结构分析给出相应理想插值问题可以被离散的一个充分条件，同时针对此类闭子空间，证明了当充分考虑到其结构属性时，应用一般的离散化算法可以提高计算效率；第 4 章针对 Carl de Boor 和 Boris Shekhtman 提出的二元离散方法，讨论了在计算机上易于求解的

具体算法;第5章讨论了一类重要的微分闭子空间,即宽度为1的微分闭子空间的离散化问题。

本书的出版得到了国家自然科学基金(11901402)、沈阳师范大学学术文库以及沈阳师范大学数学与系统科学学院的资助,在此表示感谢!

姜 雪

2021年4月

目录

第 1 章 绪 论

1.1 多项式插值与理想插值

函数插值作为数值分析的一个重要分支，在许多科研和工程应用领域中都发挥着重要作用. 尤其在计算机技术迅猛发展的今天，由于机器所接收的数据只能是有限个离散节点，因此有限节点上的插值理论研究对于数值实验的开展显得尤为重要。例如，在计算机网络环境中，可以利用 Lagrange 插值多项式来研究密钥的产生，从而达到提高密钥安全性的目的；在图像处理中，可以利用线性插值和样条插值等对一些分辨率较低、质量较差的图像进行处理，得到图像的超分辨率重构；在信息与通信工程中，利用多项式插值可以进行图像分存以及图像秘密共享，以解决图像的安全传输等问题；在机械工程中，采用低次数多项式插值即可绘制发动机万有特性曲线，进而帮助人们精确地了解发动机特性；在机器人轨迹规划问题中，借助高阶多项式插值法可以有效地逼近机械臂关节角的轨迹，进而进行仿真实验。

函数插值问题根据插值函数选择的不同可以分为多项式插值、三角多项式插

值、有理函数插值、样条函数插值等. 在函数逼近理论中，作为最基本的一类插值问题，多项式插值问题是指在多项式环的一个子空间里寻求一个多项式f，使f在给定的插值节点处满足指定的插值条件. 此时这个子空间称为插值空间，f称为插值函数. 本书考虑的都是插值条件个数为有限个的适定的插值问题，这里的适定是指满足插值条件的插值函数在插值空间中是存在且唯一的. 假设已求得适定的插值空间，则相应的插值函数就很容易计算，因此寻求适定的插值空间一直是学者们的研究热点。误差分析也是多项式插值中不可忽视的一个方面，尤其在工程实践中，通过误差估计可以判断所选节点是否合适、所取插值空间是否合理等，进而及时做出修正，避免在应用中出现重大问题。

经典的一元多项式插值理论在数值分析教科书中已有详细的论述，参见文献[1-4]等；多元多项式插值问题虽然没有形成完整的体系，但近些年也有丰富的成果，参见文献[5-8]. Lagrange 插值是最简单的一类插值问题，其插值条件只包含节点处的函数值. 一元 Hermite 插值被定义为插值条件含有连续阶导数的插值问题. 在多元情况下，仍然有相应的 Lagrange 插值的概念，但学者们对 Hermite 插值的定义在形式上却不尽相同. 这是由于一元情况下，节点z相应的带连续的n阶微商条件空间是唯一的，即

$$\delta_z \circ \operatorname{span}\{1, D_x, D_x^2, \cdots, D_x^n\};$$

而多元情形下的微商条件空间复杂多样，没有统一表示. Möller 最先根据插值条件的不同给出多元 Hermite 插值的定义(参见文献[9,10]). Sauer 和 Xu 在文献[11]中定义插值条件为一列方向导数的乘积，并且相应的子列也在其中的插值问题为 Hermite 插值. 如果方向导数构成的线性空间还是微分闭的，则称为正则 Hermite 插值. Hakopian 等人(参见文献[12,13])则定义 Hermite 插值为：插值空间为d元n次齐次空间Π_n^d，插值条件形如

$$\left\{\delta_{\mathbf{z}_q} \circ \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}: q = 1, \cdots, m, \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \mid \leqslant p_q\right\}, \qquad (1.1.1)$$

其中$\mathbf{z}_q, q=1,\cdots,m$表示插值节点，$\delta_{\mathbf{z}_q}$表示$\mathbf{z}_q$处的赋值泛函，$p_q$是给定的非负整数，并且与$n$满足关系式

$$\binom{n+d}{d} = \sum_{q=1}^{m} \binom{p_q+d}{d}. \tag{1.1.2}$$

而 Lorentz 则称上述插值为全次数型 Hermite 插值(Hermite interpolation of type total degree),Lorentz 在文献[5]中还定义了另一类与一元 Hermite 插值接近的插值问题:张量积型 Hermite 插值(Hermite interpolation of tensor-product type),其插值空间为

$$\Pi^d_{n_1,\cdots,n_d} := \left\{ f: f(x_1,\cdots,x_d) = \sum_{0 \leqslant i_j \leqslant n_j} a_{i_1,\cdots,i_d} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}, 1 \leqslant j \leqslant d \right\}, \tag{1.1.3}$$

插值条件形如

$$\left\{ \delta_{\mathbf{z}_q} \circ \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} : q = 1,\cdots,m, 0 \leqslant \alpha_i \leqslant p_{q,i}, 1 \leqslant i \leqslant d \right\}, \tag{1.1.4}$$

其中 $p_{q,i}, i=1,\cdots,d$ 为给定的非负整数,并且与 $n_j, j=1,\cdots,d$ 满足关系式

$$\prod_{j=1}^{d} (n_j + 1) = \sum_{q=1}^{m} \prod_{i=1}^{d} (p_{q,i} + 1). \tag{1.1.5}$$

如果上述条件中的 $p_{q,i}$ 都相等,则相应的插值问题称为一致张量积型 Hermite 插值(uniform Hermite interpolation of tensor-product type). 类似地,Lorentz 给出了一致全次数型 Hermite 插值(uniform Hermite interpolation of type total degree)的定义. 条件式(1.1.2)和式(1.1.5)都意味着插值空间的维数等于插值条件的个数,这是保证插值问题适定的必要条件. 在多项式插值问题中,节点上的插值条件由赋值泛函与微分算子复合而成,如式(1.1.1)、式(1.1.4),下文称由插值条件张成的线性泛函空间为插值条件泛函空间. 为避免混淆,本书不用多元 Hermite 插值的概念,而沿用 Birkhoff 提出的理想插值的概念,参见文献[14]. 关于理想插值的内容将在本节最后介绍.

多元多项式插值问题较一元问题要复杂得多,其中一个重要原因是多元情况下插值节点的几何分布多种多样,并且对于非 Lagrange 插值问题,节点上的插值条件也可以有多种形式. 于是研究具有特殊几何分布节点的多元插值问题就成为人们关心的一项研究,如 Cartesian 点集、非均匀矩形格点、张量积节点、Lower 节点集、Tower 点集、DH 点集、满足 GC 条件的点集、满足 HGC 条件的点集等,可以参见文献[15-29]等.

多元多项式插值区别于一元的另一特点是其极小次数插值空间可能不唯一. 近年来,学者们主要从两个方面进行研究:

(1)给定插值空间,考虑如何构造插值节点使得问题适定;

(2)给定插值条件,考虑如何构造插值空间使得对应的插值问题适定.

第一个问题基本上是围绕特殊节点的构造,如直线型节点和弧线型节点以及特殊的插值系统进行研究,可以参见文献[30,31]等;梁学章等人利用代数几何中的Bezout 定理和 Cayley-Bacharach 定理对此问题进行了深入的研究,取得了一系列成果(参见文献[32-36]).

早在 1990 年,de Boor 和 Ron 就给出一种解决第二个问题的方法,该方法对于给定的插值条件,能够得到一个极小次数的插值空间(参见文献[37,38]);Buchberger 和 Möller 在 1982 年提出的 BM 算法(参见文献[39])可以计算点集的消逝理想在任意给定单项序下的约化 Groebner 基,从而可得相应的插值单项基;随后 Marinari,Möller 和 Mora 等人提出了著名的 3M 算法(参见文献[40]),该算法可以计算一般的插值条件对应理想的 Groebner 基,这对于插值问题的研究具有里程碑意义. 2015 年,Fassino 和 Möller 给出一个基于 QR 分解的 BM 算法(参见文献[41]),QR 分解较 LU 分解有更好的数值稳定性,从而可以计算扰动节点对应的插值问题. 近年来,以 Groebner 基和 H-基理论为代表的代数几何理论的迅猛发展对多元多项式插值的研究起了关键的推动作用(参见文献[42-47]). 2016 年,Shekhtman 在文献[48]中分别针对实数域和复数域讨论了广义 Hermite 插值问题的适定性。

对于多项式插值问题的误差分析,较早的研究主要从 Taylor 公式误差余项着手以得到 Taylor 型插值问题的误差表示(参见文献[49]). 1995 年,Sauer 和 Xu 通过对插值条件和插值空间进行限定,针对一类"按块适定的"Lagrange 插值及"正则的"Hermite 型插值问题,给出了相应的误差余项,其公式巧妙地利用了有限差分进行表示,与一元 Newton 插值余项在形式上有了统一的表达(参见文献[11,50]). 作为相对简单的一种情况,特殊节点(如张量积型点集和满足 GC 条件的点集)对应的 Lagrange 插值误差余项表示也是学者们研究的重点(参见文献[51]). 由于多元插值问题的插值条件十分复杂,插值空间的选取也不唯一,其对应误差估计的研究就更为

困难，早期研究成果也相对较少. 直到 2005 年，de Boor 受一元误差余项的启发，即误差公式可以表示为被插函数的微商与由节点所确定多项式的乘积形式，提出“好”误差公式的概念，才使得误差估计的研究有了阶段性的进展，相应成果也丰富了许多，参见文献[52-54]等.

Lagrange 插值以及插值条件形如式(1.1.1)或式(1.1.3)的 Hermite 插值有一个共同的特点，即满足齐次插值条件的多项式全体构成一个多项式理想. 在文献[14]中，Birkhoff 首先提出了理想插值的概念，从而将多项式插值问题与代数几何紧密联系起来.

常见的一元 Lagrange 插值与 Hermite 插值、多元 Lagrange 插值以及插值条件只含连续阶偏导数的多元 Hermite 型插值等均为理想插值，因此理想插值可视为一元 Hermite 插值的自然推广. 现实中遇到的大多数插值均可归为理想插值.

理想插值与多项式系统求解问题密不可分，二者可以理解为一个问题的两个方面. 对于给定的多项式集合 G，复数域上的多项式环$\mathbb{C}[x]=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_d]$总有直和分解：

$$\mathbb{C}[x]=\langle G\rangle\oplus N_G,$$

其中$\langle G\rangle$表示由 G 生成的理想，N_G 表示模 G 的商环基所张成的向量空间. 多项式求解问题是给定 G，求其公共零点，即集合$\{x\in\mathbb{C}^d:G(x)=0\}$，其中的零点可能带有重数结构；反之，假设给定某些节点(节点可带重数，否则为 Lagrange 插值)，理想插值问题可理解为求在这些节点上消逝的所有多项式所构成的理想$\langle G\rangle$及其相应的商环基，这里商环基的一组基底即可作为插值问题的插值基.

理想插值可以由一个理想投影算子定义. 设 F 为一特征为 0 的数域，一般取 $F=\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$；$F[\boldsymbol{x}]:=F[x_1,\cdots,x_d]$表示 F 上的 d 元多项式环. $F[\boldsymbol{x}]$上的投影算子(线性幂等算子)P 称为理想投影算子，如果它的核空间构成一个理想. 因为我们考虑的理想插值的插值条件个数为有限个，所以对应的理想投影算子 P 都是有限秩的，这里 P 的秩数定义为其像空间的维数. 理想投影算子 P 支撑了一个线性插值框架：对任意的 $g\in F[\boldsymbol{x}]$，$f=Pg$ 是 $\operatorname{ran} P:=P(F[\boldsymbol{x}])$中满足

$$\lambda f=\lambda g,\ \forall\,\lambda\in\operatorname{ran} P'=\{\lambda\in(F[\boldsymbol{x}])':\lambda P=\lambda\}$$

的唯一多项式,这里 P' 为 P 的对偶算子,$(F[\boldsymbol{x}])'$ 表示 $F[\boldsymbol{x}]$ 上的线性泛函空间. 注意对于有限秩的投影算子 P,恒有

$$\operatorname{ran} P' = (\ker P)^{\perp}$$

成立,其中 $\ker P$ 为算子 P 的核空间,且

$$(\ker P)^{\perp} := \{\lambda \in (F[x])' : \ker P \subset \ker \lambda\}.$$

理想投影算子 P 对应的 $\operatorname{ran} P'$ 即为相应理想插值的插值条件泛函空间,$\operatorname{ran} P$ 为相应的插值空间. 近年来,de Boor 和 Shekhtman 在理想插值问题的研究上取得了许多成果,并提出了一些新问题,这在很大程度上丰富了多元多项式插值的理论体系,可参见文献[55,56]等.

定义 1.1.1 令 $\delta_{\mathbf{z}}$ 表示点 $\mathbf{z} \in F^d$ 处的赋值泛函. 对任意的 $q = \sum_{\alpha} \hat{q}_{\alpha} x^{\alpha} \in F[\boldsymbol{x}]$,定义

$$q(D) := q(D_1, \cdots, D_d) = \sum_{\alpha} \hat{q}_{\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

为由 q 诱导的微分算子,其中 $D_j := \dfrac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, \cdots, d$ 表示关于第 j 个未定元的微分算子. $q(D)$ 也称为 q 对应的微分多项式. $q(D)$ 的阶数定义为 q 的次数.

微分闭子空间对于理想插值的研究至关重要,下面给出其定义.

定义 1.1.2 一个多项式子空间 Q 称为是微分闭的(或微分不变的),如果它关于微分运算封闭,即 $\forall q \in Q$,

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} \in Q, i = 1, \cdots, d.$$

称 Q 对应的微分算子空间 $Q(D) := \{q(D) : q \in Q\}$ 是微分闭的,如果 Q 是微分闭的.

下面的定理阐述了理想插值与一般的多项式插值的关系.

定理 1.1.1 一个多项式插值问题构成理想插值当且仅当其插值条件泛函空间(即 $\operatorname{ran} P'$)具有下列形式

$$\operatorname{span}\{\delta_z \circ q(D) : \mathbf{z} \in \mathbf{Z}, q \in Q_{\mathbf{z}}\}, \tag{1.1.6}$$

这里 $\mathbf{Z} \subset F^d$ 为一有限点集,每个节点 $\mathbf{z}$ 对应的 $Q_{\mathbf{z}}$ 均构成一有限维微分闭多项式子

空间.

理想插值本质上是多项式插值的插值条件中的 $Q_{\mathbf{z}}$ 加上一个"微分闭"的条件. 也就是说,理想插值不仅可以用理想投影算子定义,还可以通过限定插值条件"微分闭"来描述. 容易验证,Lagrange 插值与一元 Hermite 插值均为理想插值. 微分闭子空间 $Q_{\mathbf{z}}$ 也称为 $\mathbf{z}$ 点的重数空间或极大诺特空间. "微分闭"的条件与"理想"是对应的,也就是说,如果每个节点对应的重数空间都是微分闭的,则满足齐次插值条件的多项式全体构成一个理想;反之亦然. 如果某个插值节点对应的重数空间不是微分闭的,则构成所谓的 Birkhoff 插值,参见文献[57]. 借助形式幂级数环和欧拉公式,McKinley 和 Shekhtman 描述了实数域上的微分闭子空间的特征,从而得到了实数域上的理想投影算子的对偶算子的像空间的形式,参见文献[58].

1.2 理想插值的离散逼近问题

Lagrange 投影算子是最常见的理想投影算子,其对应的插值问题为 Lagrange 插值问题,即插值条件泛函空间只由某些赋值泛函张成,不包含微分算子. 具体地,P 称为 Lagrange 投影算子,如果存在有限点集 $\mathbf{Z}$,使得 $\mathbf{Z}$ 的基数等于 $\operatorname{ran} P$ 的维数,并且对任意的 $\mathbf{z}\in\mathbf{Z}$ 和任意的 $f\in F[\mathbf{x}]$,有

$$(Pf)(\mathbf{z})=f(\mathbf{z})$$

成立.

在一元情况下,所有的理想投影算子都可以表示为 Lagrange 投影算子的逐点极限,即每个一元理想插值都可视为 Lagrange 插值的极限形式. 这个结论在某些多元情况下也成立. de Boor 提出如下定义:

定义 1.2.1 有限秩投影算子 P 称为 Hermite 投影算子,如果存在一列像空间为 $\operatorname{ran} P$ 的 Lagrange 投影算子 P_h,使得对任意的 $\mathbf{z}\in F^d$ 和任意的 $f\in F[\mathbf{x}]$,有

$$(P_hf)(\mathbf{z}) \to (Pf)(\mathbf{z}), h \to 0.$$

作为 Lagrange 投影算子的逐点极限,Hermite 投影算子也是理想投影算子. Lagrange 投影算子与 Hermite 投影算子的一个重要区别是 Lagrange 投影算子有所谓的“限制性质”,即对于 Lagrange 插值问题的插值条件泛函空间及其相应的插值空间,选定插值空间的任意子空间,都可以找到原插值条件泛函空间的一个子空间,使得相应的插值子问题适定,但是 Hermite 投影算子不具备该性质,参见文献[59].

de Boor 曾猜想复数域上的多元有限秩理想投影算子均为 Hermite 投影算子,这等价于所有的理想插值问题都可以表示为 Lagrange 插值问题的极限. 然而,Shekhtman 随后利用 Fogarty 定理证明了该猜想只在二元情况下成立;针对三元以上情况,总存在反例,参见文献[60],这说明理想投影算子中非 Hermite 投影算子的存在性. 随之而来的问题是:

(1)如何判断一个理想投影算子是否为 Hermite 投影算子?

(2)如果它为 Hemrite 投影算子,如何构造逼近它的 Lagrange 投影算子列?

实际上,判定一个投影算子为非 Hermite 投影算子的问题是很困难的. 本书所介绍的内容是对一个给定的理想插值问题对应的理想投影算子,考虑如何计算逼近它的 Lagrange 投影算子列(如果存在),称这个问题为理想插值算子的离散逼近问题,也可简称为(理想插值的)离散逼近问题或离散化问题.

就一元 Lagrange 插值而言,当插值节点沿着数轴无限趋近于某一节点时,就可以得到此节点处导数值的信息。实际上,理想插值的离散逼近问题即为研究这一过程在多元情况下的逆问题。但是多元情况下节点的“趋近”方式变得十分复杂,并且节点沿不同的路径汇聚到基点时可能得到相同的微分条件。利用形式幂级数环理论,de Boor 总结了一种较为直观的特殊情况,即给出了当所有赋值节点均沿着直线汇聚到某个基点时,此基点上相应的微分条件形式,参见文献[55].

解决离散逼近问题一方面是理想插值本身分类的需要;另一方面,对于一般的理想插值问题,其插值基几乎不能直接给出,在实际计算时,插值基的计算代价又很大. 为此,通过研究理想插值的离散问题,可以将理想插值离散为 Lagrange 插值,进而可以利用已有的结果直接给出或者经过简单计算即可得到原问题的插值基. 注意,Lagrange 插值问题在字典序下的插值单项基是很容易求得的,如有著名的 MB 算法(参见文献[61])、字典游戏算法(参见文献[62])等. 总之,解决离散逼近问题既

有助于完善理想插值的理论,又可以为理想插值的应用给出实用的计算方法.

Shekhtman 曾在文献中给出了 Hermite 投影算子的判定方法,但是其方法需要的参数过多,即使对于简单的例子在现有的计算机上也不能输出结果.现有的其他 Hermite 投影算子的判定方法,如后述定理 1.2.1、定理 1.2.2、定理 1.2.3,也不易于检验,相应的 Lagrange 投影算子列也很难求出.本书中介绍的方法均将从微分闭子空间的结构入手,解决理想插值算子的离散逼近问题.理想插值的插值条件由泛函空间确定,这个泛函空间由微分算子与赋值泛函复合而成,并且微分算子由一个多项式微分闭子空间中的多项式诱导.如果每个点上的插值条件泛函都可以离散,则原理想插值问题就可以被离散.因此理想插值的离散逼近问题可以转化为每个节点上的微分闭子空间诱导的微分算子的离散逼近问题,简称为微分闭子空间的离散逼近问题.因为对一个理想插值问题而言,如果每个点上插值条件空间里的微分算子都可以离散,那么整个理想插值算子就可以离散,故本书将只考虑一个点上的离散逼近问题.具体地,给定一个插值节点 $\mathbf{z}$ 及其相应的 $s+1$ 维微分闭子空间 $Q_{\mathbf{z}}$,寻求 $s+1$ 个点 $\mathbf{z}_0(h),\cdots,\mathbf{z}_s(h)$,使得

$$\lim_{h\to 0}\operatorname{span}\{\delta_{\mathbf{z}_0(h)},\cdots,\delta_{\mathbf{z}_s(h)}\}=\{\delta_{\mathbf{z}}\circ q(D):q\in Q_z\},\tag{1.2.1}$$

其中,$\mathbf{z}_0(h),\cdots,\mathbf{z}_s(h)$ 称为离散逼近问题的离散节点.

如果微分闭子空间存在仅由单项式构成的基,则总可以找到相应的节点使得式(2.2.1)成立.但是如果微分闭子空间的任何基中都含有多项式,那么离散偏导数时所使用节点的个数可能会多于原问题插值条件的个数.例如二维空间原点上的 3 维插值条件泛函空间

$$\delta_{(0,0)}\circ Q_{(0,0)}(D):=\delta_{(0,0)}\circ\operatorname{span}\left\{1,\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right\},$$

离散偏导数时需要 4 个点$(0,0)$,$(h,0)$,$(2h,0)$,$(0,h)$.显然这组节点集合所对应的 Lagrange 插值问题不能收敛到原问题,所以前述的“节点个数等于微分闭子空间维数”的条件是关键的,也是必要的.围绕理想插值算子的离散逼近问题,很多学者已经做出一些研究成果.

算子序列 P_h 的收敛实际上包括三个部分: