



国家科学技术学术著作出版基金
资助出版

排序与调度丛书

“十三五”国家重点图书出版规划项目

排序问题的 数学规划松弛方法

张峰 著
刘丽丽 审



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

对于 NP 困难的排序问题,研究其近似算法既是排序理论重要组成部分,具有深刻的理论意义,又是推进排序理论应用的关键,具有广泛的实际应用价值。数学规划松弛方法是一种可用于设计组合最优化问题近似算法的重要方法,本书讨论排序问题的数学规划松弛方法,介绍应用数学规划松弛方法设计求解 NP 困难排序问题近似算法的基本原理与方法,以及该领域的相关研究成果。

本书可作为应用数学、运筹学、计算机科学、管理科学和工业工程等专业教师和研究开展排序理论及相关学科领域研究的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

排序问题的数学规划松弛方法 / 张峰著. —上海:
上海交通大学出版社, 2021.5
ISBN 978-7-313-24577-9

I. ①排… II. ①张… III. ①排序—数学规划—方法
研究 IV. ①O223

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 075753 号

排序问题的数学规划松弛方法

PAIXU WENTI DE SHUXUE GUIHUA SONGCHI FANGFA

著 者: 张 峰

出版发行: 上海交通大学出版社

邮政编码: 200030

印 制: 上海万卷印刷股份有限公司

开 本: 710 mm × 1000 mm 1/16

字 数: 215 千字

版 次: 2021 年 5 月第 1 版

书 号: ISBN 978-7-313-24577-9

定 价: 79.00 元

地 址: 上海市番禺路 951 号

电 话: 021-64071208

经 销: 全国新华书店

印 张: 12.5

印 次: 2021 年 5 月第 1 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 021-56928178

《排序与调度丛书》编辑委员会

(2021年5月)

主 编

唐国春(上海第二工业大学)

副 主 编

万国华(上海交通大学)

沈吟东(华中科技大学)

吴贤毅(华东师范大学)

顾 问(按姓氏拼音排序,中英文分开排序)

韩继业(中国科学院数学与系统科学研究院)

林诒勋(郑州大学)

秦裕瑗(武汉科技大学)

涂葦生(南开大学)

越民义(中国科学院数学与系统科学研究院)

T. C. Edwin Cheng(郑大昭)(香港理工大学)

Nicholas G. Hall(尼古拉斯·G.霍尔)(俄亥俄州立大学)

Chung-Yee Lee(李忠义)(香港科技大学)

Michael Pinedo(迈克尔·皮内多)(纽约大学)

编 委(按姓氏拼音排序)

车阿大(西北工业大学)

陈志龙(马里兰大学)

高 亮(华中科技大学)

黄四民(清华大学)

李荣珩(湖南师范大学)

刘朝晖(华东理工大学)

谈之奕(浙江大学)

唐加福(东北财经大学)

唐立新(东北大学)

王 冰(上海大学)

王军强(西北工业大学)

张 峰(上海第二工业大学)

张玉忠(曲阜师范大学)

周支立(西安交通大学)

丛书序言

我知道排序问题是从 20 世纪 50 年代出版的一本书名为 *Operations Research* (可能是 1957 年出版) 的书开始的。书中讲到了 S. M. Johnson 的同顺序两台机器的排序问题并给出了解法。Johnson 的这一结果给我留下了深刻的印象。第一, 这个问题是从实际生活中来的。第二, 这个问题有一定的难度, Johnson 给出了完整的解答。第三, 这个问题显然包含着许多可能的推广, 因此蕴含了广阔的前景。在 1960 年左右, 我在《英国运筹学(季刊)》(当时这是一份带有科普性质的刊物) 上看到一篇文章, 内容谈到三台机器的排序问题, 但只涉及四个工件如何排序。这篇文章虽然很简单, 但从中我也受到了一些启发。我写了一篇讲稿, 在中国科学院数学与系统科学研究所里做了一次通俗报告。之后我就到安徽参加“四清”工作。不意所里将这份报告打印出来并寄了几份给我。我寄了一份给华罗庚教授。他对这方面的研究表现出很大的支持。这是 20 世纪 60 年代前期的事, 接下来便开始了“文化大革命”, 倏忽十年。20 世纪 70 年代初我从五七干校回京, 发现国外在排序问题方面已做了不少工作, 并曾在 1966 年开了一次国际排序问题会议, 出版了一本论文集 *Theory of Scheduling*。我与韩继业教授一道共同做了一些工作, 也算得上是排序问题在我国的一个开始。想不到在秦裕琰、林诒勋、唐国春以及许多教授的努力下, 随着国际的潮流, 排序问题的理论和应用在我国得到了如此蓬勃的发展, 真是可喜可贺!

众所周知, 在计算机如此普及的今天, 一门数学分支的发展必须与生产实际相结合, 才称得上走上了健康的道路。一种复杂的工具从设计到生产, 一项巨大复杂的工程从开始施工到完工后的处理, 无不牵涉排序问题。因此, 我认为排序理论的发展是没有止境的。我很少看小说, 但近来我对于一本名叫《约翰·克利斯朵夫》的作品很感兴趣。这是罗曼·罗兰写的一本名著, 实际上它是以贝多芬为原型的一本传记体小说。这里面提到贝多芬的祖父和父亲都是宫廷乐队指挥, 当他的父亲发现他在音乐方面是个天才的时候, 便想将他培养成一个优秀的钢琴师, 让他到各处去表演, 可以名利双收, 所以强迫他勤学苦练。但贝多芬非常反感, 他认为这样的作品显示不出人的气质。由于贝多芬的

如此感受,他才能谱出如《英雄交响曲》和《第九交响曲》等深具人性的伟大诗篇(乐章)。我想数学也是一样。只有在人类生产中体现它的威力的时候,才能显示出数学这门学科的光辉,也才能显示出作为一个数学家的骄傲。

任何一门学科,尤其是一门与生产实际有密切联系的学科,在其发展初期,那些引发它成长的问题往往是相互分离的,甚至是互不相干的。但只要它们继续向前进展,一些问题便会综合趋于统一,处理问题的方法也会发展壮大、深入细致,所谓根深叶茂、蔚然成林。我们的这套丛书现在有数册正在撰写之中,主题纷呈,蔚为壮观。相信在不久以后会有不少新的著作出现,使我们的学科呈现一片欣欣向荣、繁花似锦的局面,则是鄙人所厚望于诸君者矣。

越氏义

中国科学院数学与系统科学研究院

2019年4月

前 言

排序问题自 20 世纪 50 年代提出以后,得到了专家学者们的广泛关注,通过几十年的发展,成果丰富。排序理论逐步形成并得到快速发展,成为运筹学中一个独立的研究领域,理论日趋完善。

排序理论最初研究的对象主要是制造业,因此术语都与制造业有关,例如“工件”“机器”“加工时间”等,我们往往将早期研究的排序模型称为经典排序。经过几十年的发展,研究对象扩展到各类非制造业,其应用领域越来越广泛,从而归纳出许多有别于经典排序的新型排序模型,包括分批排序、可控排序、工件可拒绝排序、资源受限排序、在线排序等。由于排序理论的应用领域越来越广泛,使其所研究的问题及其类型呈现出多样性,并且复杂程度更高,从而进一步推动了排序理论的发展。

我们现在所要研究的各类排序问题往往是 NP 困难的,对于一个 NP 困难排序问题要设计一个有效的近似算法并不容易。数学规划松弛方法是一种有效的方法,可应用于设计求解排序问题的近似算法。数学规划松弛方法包括线性规划松弛、凸二次规划松弛、半定规划松弛以及拉格朗日松弛等。能否通过数学规划松弛设计出性能良好的近似算法,关键是决策变量的选取,并将所讨论的排序问题归纳成一个数学规划,最后再通过这一数学规划的解得到相对应排序问题的解。

本书介绍了排序问题的数学规划松弛方法,所讨论的排序模型除了经典排序模型,重点包括工件可拒绝排序模型和工件加工时间可控排序模型。本书内容分为三大部分。第一部分(第 1 章)介绍排序论的基本概念,包括排序问题的三参数表示。第二部分(第 2 章、第 3 章、第 4 章)介绍线性规划松弛方法,其中第 2 章讨论经典排序,所讨论的排序问题包括工件具有前后约束关系、工件具有就绪时间、工件加工可中断等。第 3 章讨论工件可拒绝排序,首先介绍了工件可拒绝排序的基本概念,接着讨论了若干工件可拒绝排序问题。第 4 章讨论工件加工时间可控排序,首先介绍了工件加工时间可控排序的基本概念,接着讨论了若干工件加工时间可控排序问题。第三部分(第 5 章、第 6 章、第 7 章)介绍凸二次规划松弛方法,其中第 5 章讨论经典排序,第 6 章讨论工件可拒绝

排序,第7章讨论工件加工时间可控排序。

本书是《排序与调度丛书》中的一本,在撰写过程中得到了《排序与调度丛书》编辑委员会的大力支持,编辑委员会的各位同仁为本书所提出的宝贵意见,提升了本书的质量。上海交通大学出版社以及本书责任编辑汪俪老师为本书的顺利出版付出了辛勤劳动。在此,作者对于上述各位表示衷心的感谢。本书的出版同时得到了作者所在单位上海第二工业大学的鼎力支持,同事刘丽丽教授非常仔细地审阅了书稿,并提出了修改建议,在此对于学校的支持和同事的帮助表示深深的谢意。

由于作者学术水平有限,本书难免存在不足之处或错误,敬请读者批评指正。

张 峰

上海第二工业大学

2020年12月

目 录

第 1 章 排序论概述	1
1.1 排序问题	1
1.2 排序问题的三参数表示	2
1.3 本书内容简介	4
第 2 章 线性规划松弛方法：经典排序	9
2.1 问题 1 prec $\sum w_j C_j$	9
2.2 问题 1 r_j , prec $\sum w_j C_j$	16
2.3 问题 1 r_j , prec, pmtn $\sum w_j C_j$	19
2.4 问题 1 r_j $\sum w_j C_j$	21
2.5 问题 1 r_j , pmtn $\sum w_j C_j$	43
2.6 问题 P r_j $\sum w_j C_j$	47
2.7 问题 P r_j , prec, pmtn $\sum w_j C_j$	54
2.8 问题 P prec, delays d_{ij} $\sum w_j C_j$	56
2.9 问题 R r_{ij} $\sum w_j C_j$	60
第 3 章 线性规划松弛方法：工件可拒绝排序	68
3.1 工件可拒绝排序的基本概念	68
3.2 问题 1 rej $\sum_{j \in S} e_j + \sum_{j \in S} w_j C_j$	70
3.3 问题 1 rej, r_j $\sum_{j \in S} e_j + \sum_{j \in S} w_j C_j$	75
3.4 问题 R rej, pmtn $\sum_{j \in S} e_j + C_{\max}$	81

第 4 章	线性规划松弛方法：工件加工时间可控排序	89
4.1	工件加工时间可控排序的基本概念	89
4.2	问题 1 cpt, prec $\sum c_j t_j + \sum w_j C_j$	91
4.3	问题 P dis_cpt, pmtn $\sum c_j + C_{\max}$	101
第 5 章	凸二次规划松弛方法：经典排序	112
5.1	问题 R $\sum w_j C_j$	112
5.2	问题 R r_{ij} $\sum w_j C_j$	122
第 6 章	凸二次规划松弛方法：工件可拒绝排序	130
6.1	问题 1 rej $\sum_{j \in S} e_j + \sum_{j \in S} w_j C_j$	130
6.2	问题 1 rej, r_j $\sum_{j \in \bar{S}} e_j + \sum_{j \in S} w_j C_j$	139
第 7 章	凸二次规划松弛方法：工件加工时间可控排序	146
7.1	问题 R cpt $\sum \sum c_{ij} t_{ij} + \sum w_j C_j$	146
7.2	问题 R cpt, r_{ij} $\sum \sum c_{ij} t_{ij} + \sum w_j C_j$	154
7.3	问题 1 dis_cpt $\sum \sum c_{ji} I_{ji}(t) + \sum w_j C_j$	167
附录	英汉排序与调度词汇	174
参考文献		182
索引		185

第1章 排序论概述

1.1 排序问题

20世纪50年代提出了排序问题(Johnson, 1954),通过几十年的发展,解决排序问题的理论(排序理论)逐步形成并得到了巨大的发展(Potts, 2009),成为运筹学中一个独立发展的研究领域,其理论日趋完善(万国华,2019)。排序理论所研究的对象从最初的制造业扩展到各类非制造业,其应用领域越来越广泛,从而归纳出许多有别于经典排序的新型排序模型(唐国春等,2003),所得到的丰富理论和有效方法可以用于处理与解决广泛的实际问题。由于排序理论的应用领域广泛,使其所研究的问题及其类型呈现出多样性,并且复杂程度更高,从而进一步推动了排序理论的发展,近几十年排序理论成为运筹学中研究最为广泛的领域之一。

排序理论的许多早期研究工作是由制造业领域所提出的问题推动的,特别是生产作业调度,因此,我们现在研究排序理论都是将需要完成的工作、任务、被服务的对象统称为“工件”,将完成工作、任务、服务所需要的资源统称为“机器”,把完成工作、任务、服务的过程看成“工件”被安排在“机器”上加工。

设有 n 个工件 $J = \{1, 2, \dots, n\}$,若是单台机器排序问题,则工件 j ($j = 1, 2, \dots, n$) 有一确定的加工时间 p_j ,若是多台机器排序问题,则设有 m 台机器 $M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$,若工件 j 被安排在机器 M_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 上加工,则其加工时间为 p_{ij} 。对于经典排序模型,其基本假设为一台机器在任何时刻最多加工一个工件,一个工件在任何时刻至多在一台机器上被加工。工件 j 有一权 w_j 表示工件的重要性。工件 j 有一交货期 d_j ,当工件 j 在交货期 d_j 之前完成加工,我们称工件 j 按时完工,当工件 j 在交货期 d_j 之后完成加工,也就是工件加工发生误工,有一个惩罚。工件 j 有一就绪时间 r_j ,表示工件 j 在时刻 r_j 之后才能被安排加工,对于多台机器问题,工件 j 在不同的机器上可以有不同的就绪时间,即工件 j 被安排在机器 M_i 上加工,其就绪时间为 r_{ij} ,表示工件 j 在时刻 r_{ij} 之后才能在机器 M_i 上开始加工。在本书中我们假定工件的相关参数都是非负整数。

工件加工限制条件包括工件之间有前后约束关系 $<$, $k < j$ 表示工件 j 只有在工件 k 完工之后才能开始加工。工件加工可分为不可中断与可中断, 工件加工不可中断表示一个工件一旦安排在某台机器上开始加工, 则必须在这台机器上连续加工完成, 工件加工可中断表示一个工件被安排在某台机器上加工以后, 在没有完成加工之前任何时候都可以停止加工, 该台机器可以安排加工其他工件, 而被停止加工的工件可以在以后的任何时刻在任何一台空闲机器上恢复加工。

用 C_j 表示工件 j 的完工时间, $L_j = C_j - d_j$ 称为工件 j 的延迟, $T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$ 称为工件 j 的延误, $U_j = 0$ 或 1 称为工件 j 的误工数, 即当 $C_j \leq d_j$ 时, $U_j = 0$, 即工件 j 加工没有误工, 其误工数为 0 , 当 $C_j > d_j$ 时, $U_j = 1$, 即工件 j 加工发生误工, 其误工数为 1 。

所谓排序就是将若干个需要加工的工件安排到机器上, 分配并确定每个工件加工的时间段, 使被考虑的目标函数值最优。在经典排序中, 目标函数自变量一般是工件的完工时间。对于最小化问题, 目标函数是工件完工时间的非降函数, 即所谓的正则性, 也称为目标函数是正则的。正则性保证了机器在加工工件过程中没有人为设置的空闲时间。

排序理论几十年的发展, 应用领域从最初的制造业渗透到社会经济的各个方面, 突破了经典排序模型的特征, 新的排序模型不断涌现(唐国春等, 2003), 包括可控排序、工件可拒绝排序、同时加工排序(批加工排序)、成组分批排序、准时排序与窗时排序、资源受限排序、在线排序、随机排序等。与此同时, 求解各类排序问题的算法也得到了发展, 证明一个排序问题存在多项式时间算法, 并给出相应的多项式时间算法是排序理论中最重要的部分。20 世纪 70 年代计算复杂性理论的发现, 则对于 NP 困难问题(NP-hard problem)设计有效算法至关重要, 也是排序理论得以在社会经济各领域广泛应用的关键。早期与设计一般组合优化问题的算法一样, 排序问题也是用纯组合的方法设计算法, 以及应用分支定界算法、动态规划算法等, 也可以将排序问题转化成(混合)整数线性规划以及应用列生成技术进行求解。随着排序问题的应用, 其问题规模越来越大, 快速有效求解性能比好的近似解更具有现实理论意义和实际应用价值。在这一发展趋势的推动下, 提出了各种启发式搜索方法, 伴随着计算机技术的发展, 促进了各种智能算法的研究, 与此同时, 数学规划松弛方法得到了大发展。

1.2 排序问题的三参数表示

排序问题种类繁多, 用简单明了的记号将一个所研究的排序问题表示出

来,有利于在排序理论研究过程中规范表达一个排序问题并理解该问题,有利于从事排序理论研究的专家学者进行交流,有利于排序理论的推广、传播与应用。

将一个需要研究的问题抽象为一个排序问题,其中有需要被加工的若干“工件”,以及加工这些工件的一台或若干台“机器”,一个工件若被安排在某台机器上加工,则有一已知的加工时间,我们所做的决策就是安排加工这些工件使所考虑的“优化目标”达到最优。因此,排序问题一般涉及“工件”“机器”与“优化目标”。目前国际上通常用三参数 $\alpha | \beta | \gamma$ 来表示一个排序问题,其中,参数 α 表示“机器环境”,参数 β 表示“工件特征”,参数 γ 表示“优化目标”。

对于“机器环境”的参数,首先有单台机器排序问题与多台机器排序问题的区分,用 1 表示单台机器排序问题。对于多台机器排序问题,机器可分为通用平行机与专用串联机这两大类:对于平行机问题,P 表示同型机问题,Q 表示同类机问题,R 表示非同类机问题;对于串联机问题,O 表示自由作业问题,F 表示流水作业问题,J 表示异序作业问题。对于多台机器排序问题,用 m 表示机器的台数,例如 F2 表示 2 台机器的流水作业问题,P2 与 P_m 分别表示 2 台机器的同型机问题与 m 台机器的同型机问题。如果不出现机器台数 m ,则表示该多台机器排序问题所得到的研究成果或算法对任意台数机器都适用,例如 R 就是表示任意台数机器的非同类机问题。

对于“工件特征”的参数,由于排序理论的应用领域越来越广泛,所以工件特征的描述也丰富起来。包括表示工件是否在线(on-line、on-line-list、on-line-list-nclv),工件是否具有不同的就绪时间(r_j),工件是否具有共同交货期($d_j = d$),工件加工是否可以中断(pmtn),工件加工是否具有前后约束关系(prec、tree、intree、outtree、chain),工件加工时间是否相等($p_j = p$, $p_{ij} = p$),等等,这些都是经典排序问题中所出现的。现代排序模型的发展,势必增加工件特征的描述(唐国春等,2003),例如工件加工时间可控排序(cpt)、工件可拒绝排序(rej)、成组分批排序(GT)、同时加工排序(s-batch、p-batch)、准时排序和窗时排序(JIT)、资源受限排序(res)、工件可转包排序(subcontract)等,随着排序理论的进一步发展,将会出现更多工件特征的描述。

对于“优化目标”的参数,经典排序中优化目标函数一般是工件完工时间(C_1, C_2, \dots, C_n)的正则函数,即当优化目标是最小化时,目标函数 $f(C_1, C_2, \dots, C_n)$ 关于各个变量都是非降函数,经典排序中目标函数分为最大费用问题与总费用问题两大类。

(1) 最大费用问题。包括:

最大完工时间 $C_{\max} = \max\{C_j \mid j = 1, 2, \dots, n\}$;

最大延迟 $L_{\max} = \max\{L_j \mid j = 1, 2, \dots, n\}$;

最大延误 $T_{\max} = \max\{T_j \mid j = 1, 2, \dots, n\}$ 。

(2) 总费用问题。包括:

总完工时间 $\sum C_j$, 带权总完工时间 $\sum w_j C_j$;

总延误 $\sum T_j$, 带权总延误 $\sum w_j T_j$;

总误工工件数 $\sum U_j$, 带权总误工工件数 $\sum w_j U_j$ 。

对于现代排序模型,优化目标中会增加一些其他费用,例如工件加工时间可控问题,当工件加工时间压缩时,产生工件加工时间的压缩费用;工件可拒绝排序问题,当一个工件被拒绝加工时,则产生一个惩罚费用;工件可外包排序问题,当一个工件外包时,则产生一个外包费用。

三参数表示法一般情况下可以比较清晰地将一个排序问题表达清楚,但不能将我们所讨论的问题都表示出来,有时需要给出一个必要的阐述与解释,同时,新的排序问题会不断被提出来,参数会更加多种多样。

1.3 本书内容简介

对于组合优化问题中的 NP 困难问题,设计求解问题的有效算法至关重要,设计算法所涉及的技术与方法也是组合优化理论中的一个重要组成部分。组合优化问题一般都可表示成一个整数规划问题,特别是 0-1 整数规划,因此,数学规划松弛方法可应用于求解 NP 困难问题的算法设计中。能否得到好的算法,关键是决策变量的选取。数学规划松弛方法主要包括线性规划松弛、凸二次规划松弛、半定规划松弛和拉格朗日松弛等。

一个 NP 困难问题的数学规划松弛所得到的最优值是该问题最优值的一个下界(对于最小化问题),这个下界可用于求解该问题的分支定界算法中,如果能构造出更有效的不等式约束,将得到该问题更紧的松弛,即能得到一个更大的下界,这样所设计的分支定界算法在求解过程中更加有效。早期这方面的研究主要针对旅行售货员问题,得到超过 100 个城市的最优解(Crowder & Padberg, 1980)。对于一个 NP 困难问题,也可以直接通过其数学规划松弛的最优解设计求解该问题的近似算法,而近似算法设计的关键是舍入方法(Raghavan & Thompson, 1987)。对于图论中的最大割问题,可得到半定规划

松弛(Goemans & Williamson, 1995),再用随机舍入方法设计求解最大割问题的近似算法,这一近似算法的界达到 0.651,改进了当时最好的界 0.5,这也是第一次用半定规划松弛方法设计组合最优化问题的近似算法,并取得了好的成果。应用数学规划松弛设计求解排序问题的算法也有丰富的研究成果,最早是在研究单台机器总延误问题时,在设计分支定界算法中应用拉格朗日松弛(Fisher, 1976),获得其所求问题的下界,算法成功求解的实例其工件数超过 50 个。

由于排序问题一般都可用 0-1 整数线性规划表示,因此,线性规划松弛尤为重要,得到的成果也非常丰富。在排序论中,线性规划松弛最早用于研究单台机器排序问题,对于具有就绪时间的排序问题 $1 | r_j | \sum w_j C_j$,通过引进工件开工时间变量、工件加工次序变量、时间指标变量等得到 3 种不同的线性规划松弛(Dyer & Wolsey, 1990)。凸二次规划松弛和半定规划松弛分别用于研究平行机问题 $R | r_{ij} | \sum w_j C_j$ 和 $R2 | r_j | \sum w_j C_j$,也得到了好的近似算法(Skutella, 2001)。本书主要介绍排序问题的数学规划松弛方法,包括线性规划松弛和凸二次规划松弛两大部分,所讨论的排序问题包括经典排序问题、工件可拒绝排序问题和工件加工时间可控排序问题。

第 2 章、第 3 章和第 4 章讨论了线性规划松弛方法。第 2 章所讨论的经典排序问题包括单机排序问题和平行机排序问题,表 1.1 给出了我们所讨论的经典排序问题的基本信息,包括决策变量选取以及近似算法的性能比。

表 1.1 经典排序问题

序号	排序问题	决策变量	算法
1	$1 \text{prec} \sum w_j C_j$	工件完工时间	2-近似算法
2	$1 r_j, \text{prec} \sum w_j C_j$	工件完工时间	3-近似算法
3	$1 r_j, \text{prec}, \text{pmtn} \sum w_j C_j$	工件完工时间	2-近似算法
4	$1 r_j \sum w_j C_j$	时间指标变量	$1 + \sqrt{2}$ -近似算法 1.745 1-近似算法 1.685 3-近似算法
5	$1 r_j, \text{pmtn} \sum w_j C_j$	工件完工时间	随机 1.47-近似算法

续表

序号	排序问题	决策变量	算法
6	$P \mid \mid \sum w_j C_j$ $P \mid r_j \mid \sum w_j C_j$	工件完工时间	$(2-1/m)$ -近似算法 $(4-1/m)$ -近似算法
7	$P \mid r_j, \text{prec, pmtn} \mid \sum w_j C_j$	工件完工时间	3-近似算法
8	$P \mid \text{prec, delays } d_{ij} \mid \sum w_j C_j$	工件完工时间	4-近似算法
9	$R \mid \mid \sum w_j C_j$ $R \mid r_{ij} \mid \sum w_j C_j$	区间指标变量	随机 $(3/2+\epsilon)$ -近似算法 随机 $(2+\epsilon)$ -近似算法

第3章讨论了工件可拒绝排序问题,应用线性规划松弛方法给出了3个工件可拒绝排序问题的近似算法,表1.2给出了我们所讨论的排序问题的基本信息,包括决策变量选取以及近似算法的性能比。

表 1.2 工件可拒绝排序问题

序号	排序问题	决策变量	算法
1	$1 \mid \text{rej} \mid \sum_{j \in S} e_j + \sum_{j \in S} w_j C_j$	工件是否接受加工变量	3-近似算法
2	$1 \mid \text{rej, } r_j \mid \sum_{j \in S} e_j + \sum_{j \in S} w_j C_j$	工件是否接受加工变量以及接受加工工件的加工次序变量	$3 + \sqrt{3}$ -近似算法
3	$R \mid \text{rej, pmtn} \mid \sum_{j \in S} e_j + C_{\max}$	工件是否接受加工变量以及接受加工工件在各机器上加工比例变量	2-近似算法 随机 1.583-近似算法

第4章讨论了工件加工时间可控排序问题,应用线性规划松弛方法给出了2个工件加工时间可控排序问题的近似算法,表1.3给出了我们所讨论的排序问题的基本信息,包括决策变量选取以及近似算法的性能比。

表 1.3 工件加工时间可控排序问题

序号	排序问题	决策变量	算法
1	$1 \text{cpt, prec} \sum c_j t_j + \sum w_j C_j$	选择工件加工时间变量以及工件加工次序变量	4-近似算法
2	$1 \text{dis_cpt, pmtn} \sum c_j + C_{\max}$	选择工件加工时间变量以及工件在各机器上加工比例变量	2-近似算法 随机 1.583-近似算法

第5章、第6章和第7章讨论了凸二次规划松弛方法。第5章讨论了平行机排序问题,表1.4给出了我们所讨论的排序问题的基本信息,包括决策变量选取以及近似算法的性能比。

表 1.4 经典排序问题

序号	排序问题	决策变量	算法
1	$R \sum w_j C_j$	表示工件在哪台机器上加工	随机 2-近似算法 随机 3/2-近似算法
2	$R r_{ij} \sum w_j C_j$	表示工件在哪台机器的哪个时间段上加工	随机 2-近似算法

第6章讨论了工件可拒绝排序问题,应用凸二次规划松弛方法给出了2个工件可拒绝排序问题的近似算法,表1.5给出了我们所讨论的排序问题的基本信息,包括决策变量选取以及近似算法的性能比。

表 1.5 工件可拒绝排序问题

序号	排序问题	决策变量	算法
1	$1 \text{rej} \sum_{j \in S} e_j + \sum_{j \in S} w_j C_j$	工件是否接受加工变量	随机 2-近似算法 随机 3/2-近似算法
2	$1 \text{rej, } r_j \sum_{j \in S} e_j + \sum_{j \in S} w_j C_j$	表示接受加工工件在哪个时间段上开始加工	随机 2-近似算法

第7章讨论了工件加工时间可控排序问题,应用凸二次规划松弛方法给出了3个工件加工时间可控排序问题的近似算法,表1.6给出了我们所讨论的排序问题的基本信息,包括决策变量选取以及近似算法的性能比。

表 1.6 工件加工时间可控排序问题

序号	排 序 问 题	决 策 变 量	算 法
1	$R \mid \text{cpt} \mid \sum c_j t_j + \sum w_j C_j$	选择工件加工时间并表示在哪台机器上加工	随机 2-近似算法 随机 3/2-近似算法
2	$R \mid \text{cpt}, r_{ij} \mid \sum \sum c_{ij} t_{ij} + \sum w_j C_j$	选择工件加工时间并表示在哪台机器的哪个时间段上开始加工	3-近似算法
3	$1 \mid \text{dis_cpt} \mid \sum \sum c_{ji} I_{ji}(t_j) + \sum w_j C_j$	选择工件加工时间	随机 2-近似算法 随机 3/2-近似算法