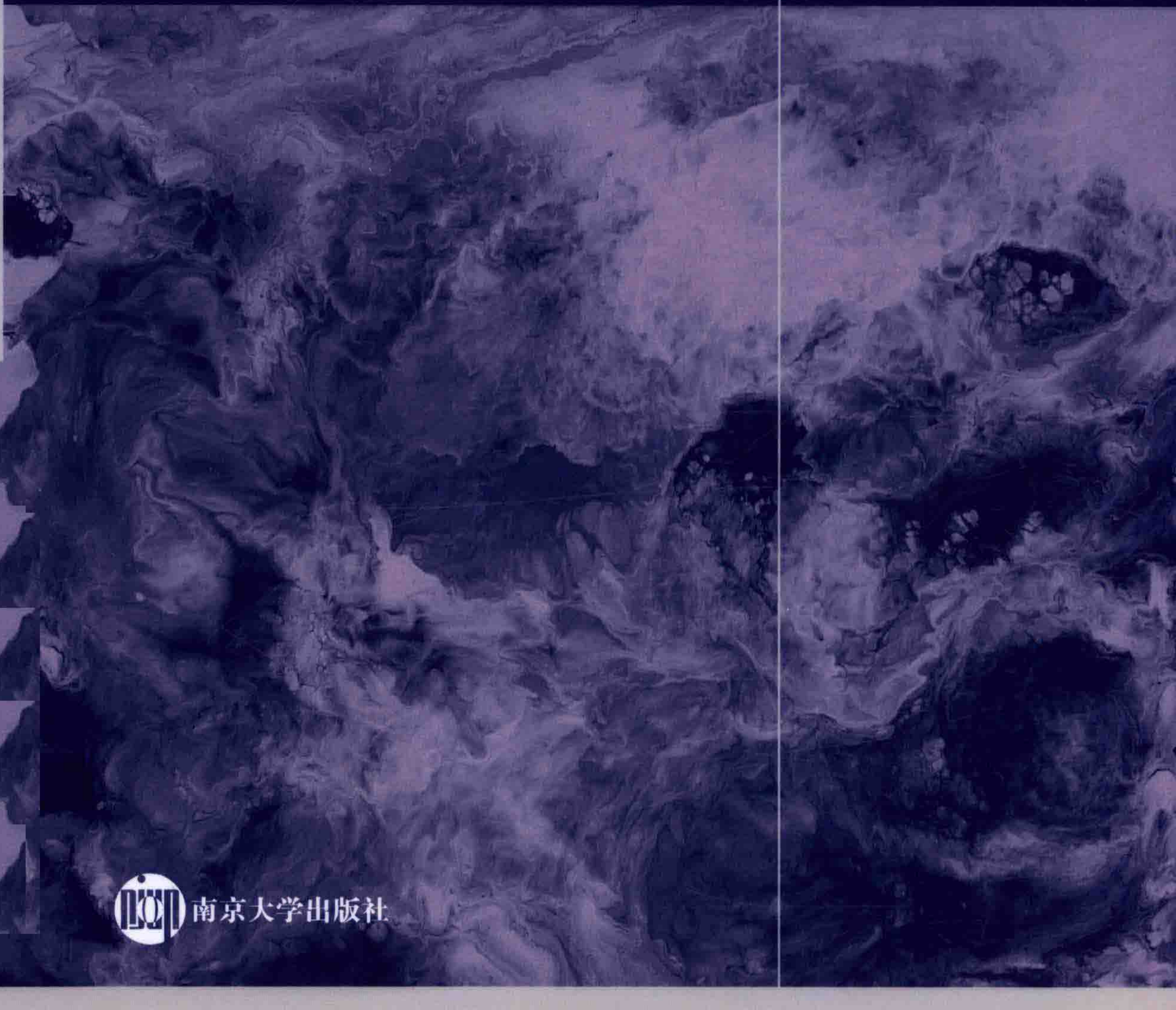
几类流体力学方程的适定性与随机动力学

WELL-POSEDNESS AND STOCHASTIC DYNAMICS OF SOME HYDRODYNAMIC EQUATIONS

孙成峰 著



南京大学出版社

几类流体力学方程的适定性与随机动力学

WELL-POSEDNESS AND STOCHASTIC DYNAMICS OF SOME HYDRODYNAMIC EQUATIONS

孙成峰 著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

几类流体力学方程的适定性与随机动力学 / 孙成峰著. -- 南京 : 南京大学出版社, 2022.9
ISBN 978-7-305-25790-2

Ⅰ. ①几… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①流体力学一方程一动力系统(数学) Ⅳ. ①O35

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第 092545 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　　　　邮编　210093
出 版 人　金鑫荣

书　　名　几类流体力学方程的适定性与随机动力学
著　　者　孙成峰
责任编辑　朱　钰

印　　刷　广东虎彩云印刷有限公司
开　　本　787×1092　1/16　印张 12.5　字数 281 千
版　　次　2022 年 9 月第 1 版　2022 年 9 月第 1 次印刷
ISBN　978-7-305-25790-2
定　　价　58.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo. com/ njupco
官方微信号：　njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

前　言

本书主要关注几类流体力学方程的随机动力学性质和大偏差, 研究方程解的适定性、随机吸引子、有限 Hausdorff 维数、大偏差准则等内容.

动力系统的研究起源于 19 世纪的 H. Poincaré 和 A. M. Lyapunov 对力学系统稳定性的研究. 动力系统在 20 世纪中期形成了基本的理论框架, 并在以后几十年里取得了巨大的进展. 线性动力系统的研究比较简单, 可以看作是线性代数的问题, 而非线性动力系统却异常复杂, 目前仍然不能够很好地处理此类问题. 动力系统可分为有限维状态空间的动力系统和无穷维空间的动力系统. 前者的一些理论已经发展得比较成熟, 包括稳定性理论、正规型理论、不变流形理论、分支理论、遍历理论等 (见文献 [1–3] 等). 无穷维系统所关注的是发展型偏微分方程所描述的系统的解的存在性、正则性、稳定性, 全局吸引子的存在性及其几何拓扑结构. 从动力系统的角度来看, 全局吸引子的存在性及几何拓扑结构更受关注. 由于空间维数的无限性以及紧性的缺乏, 问题变得困难, 但近十几年吸引子、不变流形、不变叶层、惯性流形等方面取得了很大的成果 (见文献 [4–8]). 由于广泛的实际应用背景如流体力学、大气科学、生命科学飞速发展的推动, 无穷维动力系统的研究目前是一个十分活跃的研究课题. 文献 [7, 8] 对各类发展方程的全局吸引子的存在性、维数的估计以及惯性流形做了系统的介绍.

人们在对一实际问题建立了确定的模型后总希望模型能更多地反映实际情况, 并希望通过收集到所有数据即可预测未来状态, 然而事实却总不能如人所愿, 甚至对某些问题用确定的方法无法建立合适的数学模型. 例如, 大气科学、流体力学、化学反应中的问题在维数、时间和空间的不同尺度间分离很大, 而且由于系统内部自激产生大量 “噪声”, 外部也有许多不可预知的因素影响实际的系统, 虽然丢掉的信息对整个系统似乎很 “小”, 但非线性系统的动力行为非常复杂, 对扰动有很强的敏感性. 对这些丢掉的信息的补偿, 随机作用是一个比较理想的替代.

随机动力系统是联系动力系统和随机分析的桥梁. 在 1980 年代, Eloworthy、Baxendale、Bismut、Ikeda、Watanabe、Kunita 等一些数学家发现一些随机方程的解不仅定义了一组随机过程, 事实上也给出了一个随机微分同胚流. 这样就将随机微分方程和动力系统联系起来, 同时使得我们对随机微分方程的一些经典结果可用动力系统的观点来理解. 德国数学家 Ludwig Arnold [9] 领导的 Bremen 小组创建并推动了随机动力系统的发展.

本书的内容由笔者博士期间以及近几年的成果整理而成，并作为偏微分方程

方向硕士研究生讨论班的讲义. 在研究的过程中, 得到了众多专家学者的帮助和指导, 在此对 Björn Schmalfuß 教授、段金桥教授、黄建华教授、陈玉娟教授、李梅教授、吕广迎教授、林琳副教授、肖庆坤副教授、陈涌副教授、刘辉副教授等致以最诚挚的谢意! 感谢导师高洪俊教授对笔者研究工作的长期指导和支持!

由于时间、精力和水平有限, 本书难免存在疏漏和不足, 恳请各位同仁和读者批评指正.

该书受国家自然科学基金 (No: 11701269) 资助.

孙成峰

2021 年 10 月于南京财经大学

目　　录

第 1 章 预备知识

本章中,我们简单回顾了随机偏微分方程、随机动力系统、随机吸引子的基本知识和理论. 主要包括随机动力系统、随机吸引子的基本定义和性质,一些全局吸引子存在性结果以及有限 Hausdorff 维数的估计. 同时,我们介绍了大偏差的定义以及大偏差存在性结果.

1.1 随机动力系统

随机动力系统可以看作是如下两类系统的结合:

- 遍历理论意义下的保测动力系统 $(\varOmega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\vartheta_t)_{t\in T})$, T 为时间;
- 光滑或拓扑动力系统.

$(\varOmega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\vartheta_t)_{t\in T})$ 称为度量动力系统或驱使动力系统, 即概率空间 $(\varOmega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上满足如下两个条件的映射流,

1. $(t, \omega) \mapsto \vartheta_t\omega$ 是 $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$ 可测的;
2. $\vartheta_t : \varOmega \to \varOmega$ 是保测的, 即 $\vartheta_t\mathbb{P} = \mathbb{P}$,
$$\vartheta_t\mathbb{P}(B) := \mathbb{P}\{\omega; \vartheta_t\omega \in B\}, \ \ \forall B \in \mathcal{F}.$$

定义 1.1.1 [9] 设 $(\varOmega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\vartheta_t)_{t\in T})$ 为度量动力系统. 映射

$$\varphi : \mathbb{T} \times \varOmega \times X \ni (t, \omega, x) \mapsto \varphi(t, \omega)x \in X$$

满足

- $\varphi(0, \omega)$=id;
- 余圈 (cocycle) 性质: 任给 $s, t \in T$ 和 $\omega \in \varOmega$,
$$\varphi(t + s, \omega) = \varphi(t, \vartheta_s\omega) \circ \varphi(s, \omega).$$

1. 若 φ 可测, 则称 φ 为 ϑ 驱使的可测随机动力系统.
2. 若 X 为一拓扑空间, 可测随机动力系统 φ 满足 $\forall(t, \omega) \in T \times \varOmega$, $x \mapsto \varphi(t, \omega)x$ 是连续的, 则称 φ 为 ϑ 驱使的连续或拓扑随机动力系统.
3. 若 X 为一光滑流形, 连续随机动力系统 φ 满足对某个 k, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, $\forall(t, \omega) \in T \times \varOmega$, $x \mapsto \varphi(t, \omega)x$ 是 C^k 的, 则称 φ 为 ϑ 驱使的光滑或 (更确切地)C^k 随机动力系统.

随机动力系统包括了许多类型, 除了一些随机方程或随机映射迭代生成的系统, 还包括

一些生成斜积流的非自治系统, 如概周期系统等也可以纳入随机动力系统的范畴 (见文献 [10]). 但需指出的是非自治系统是比随机系统更为广泛和复杂的系统.

1.1.1 随机吸引子

无穷维动力系统的有限维的渐近行为是数学物理上的重要发现, 这包括判断吸引子的存在性及其维数的估计 [7, 8, 11], 其基本思路就是利用偏微分方程解的存在性和稳定性得到系统对应的解半群 $S(t)$ 在适当的 Banach 空间中是连续的且有一个有界的吸收集, 进而利用半群的一些紧性结论得到紧致的吸引子. 对半群的紧性的研究还有很多深入的课题. 对吸引子的有限自由度的估计, 目前主要利用 Lyapunov 指数 [8] 或决定函数 [12, 13] 等方法.

但当系统有噪声影响时, 上述关于确定动力系统紧致不变集的讨论就不成立了, 因此对随机系统考虑吸引子的问题就要重新定义不变集与吸引子的概念. 这样仍然得到一个紧致的不变集, 但这个不变集是随时间平稳变化的, 称为随机不变集. 下面我们介绍有关随机吸引子的基本概念和结论. 更为详细的内容见文献 [14–16].

设 (X,d) 是一个可分的完备度量空间, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一概率空间, ϑ_t 是 Ω 上保持 $\mathbb{P}$ 的度量动力系统. 设 φ 是定义在 X 上的由 ϑ_t 驱使的连续随机动力系统, 见定义 1.1.1.

首先引入一些记号. 任给非空集合 $A,B\subset X$, 定义

$$d(A,B)=\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}d(x,y)$$

$d(x,B)=d(\{x\},B)$. 注意对所有 $A\subset B$, $d(A,B)=0$, 因此 $d(A,B)$ 并不是 2^X 上的一个度量. 取值为 X 中闭集的集值映射 $K:\Omega\mapsto 2^X$, 若对任给的 $x\in X$ 映射 $\omega\mapsto d\big(x,K(\omega)\big)$ 是可测的. 取值闭集的可测映射 $K:\Omega\to 2^X$ 称为随机闭集.

定义 1.1.2 给定一个随机集 K, 其 Ω-极限集定义为

$$\Lambda(K,\omega)=\Lambda_K(\omega)=\bigcap_{T\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant T}\varphi(t,\vartheta_{-t}\omega)K(\vartheta_{-t}\omega)}$$

易见是 $\Lambda_K(\omega)$ 闭集.

定义 1.1.3 给定一个随机集 K, 若

$$\varphi(t,\omega)K(\omega)\subset K(\vartheta_t\omega),\quad \forall t>0$$

则称 K 为 φ 前向不变的. 若上述包含关系取到恒等, 则称 K 为严格 φ 前向不变的.

命题 1.1.1 [14] 任一个随机集的 Ω-极限集是不变的.

定义 1.1.4 给定随机集 K 和 A, 若

$$d\big(\varphi(t,\vartheta_t\omega)K(\vartheta_t\omega),A(\omega)\big)\to 0,\quad t\to\infty$$

$\mathbb{P}$-a. s. 成立, 就称随机集 A 吸引随机集 K.

定义 1.1.5 设 A 和 K 是随机集, 且对几乎处处的 ω, 存在 $t_K(\omega)$, 使得若 $t\geqslant t_K(\omega)$, 有

$$\varphi(t,\vartheta_{-t}\omega)K(\vartheta_{-t}\omega)\subset A(\omega)$$

则称 A 是吸收 K 的, t_K 称为吸收时刻.

定义 1.1.6 **随机吸引子 I** [15] 设 φ 是定义在 X 上 ϑ_t 驱使的随机动力系统, 存在随机紧集 $\omega\to\mathcal{A}(\omega)$ 满足

1. $\varphi(t,\omega)\mathcal{A}(\omega)=\mathcal{A}(\vartheta_t\omega), t>0$;
2. $\mathcal{A}$ 吸引所有的有界确定的集合 $K\subset X$, 即

$$d\big(\varphi(t,\vartheta_t\omega)K,A(\omega)\big)\to 0,\quad t\to\infty$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 φ 的全局随机吸引子.

对于定义 1.1.6 给出的随机吸引子的存在性有如下结论.

定理 1.1.1 [17] 设 φ 是定义在 X 上 ϑ_t 驱使的随机动力系统, 假设存在一个紧致的随机集 $\omega\to B(\omega)$ 吸收任一个确定的有界集合 $K\subset X$, 则

$$\mathcal{A}(\omega)=\overline{\bigcup_{K\subset X}\varLambda_K(\omega)}$$

为 φ 的全局随机吸引子且 $\mathcal{A}$ 是可测的, 若 X 是连通的, 则 $\mathbb{P}$-a. s. $\mathcal{A}$ 是连通的.

定义 1.1.6 中吸引的是确定的有界集合, 进一步还可以引进某类依赖于 ω 的子集族, 吸引子吸引的是这个族中的元素. 令 $\mathcal{B}_b(X)$ 为 X 中有界的 Borel 集组成的集族. 设 $\widetilde{D}$ 为一类随机集 $D\subset\widetilde{D}$ 形成的空间

$$\begin{aligned}D:\varOmega&\to\mathcal{B}_b(X)\\ \omega&\mapsto D(\omega)\subset X\end{aligned}$$

且对包含关系是封闭的. 若随机集 D' 和 D 满足 $D\in\widetilde{D}$, 对所有 $\omega\in\varOmega$ 有 $D'(\omega)\subset D(\omega)$, 则 $D'\in\widetilde{D}$, $\widetilde{D}$ 称为吸收盆. 在实际应用中, $\widetilde{D}$ 中的元素通常取为缓变随机集:

$$D=\{D(\omega):\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log d\big(x,D(\vartheta_t\omega)\big)=0,\quad\forall x\in X\}$$

有如下定义的吸引子.

定义 1.1.7 **随机吸引子 II** 设 φ 是定义在 X 上 ϑ_t 驱使的随机动力系统, 随机紧集 $\mathcal{A}\in\widetilde{D}$

满足

1. $\varphi(t,\omega)\mathcal{A}(\omega)=\mathcal{A}(\vartheta_t\omega),\ t>0,$
2. $d\big(\varphi(t,\vartheta_t\omega)D(\vartheta_{-t}\omega),A(\omega)\big)\to 0,\ t\to\infty,\quad \forall D\in\widetilde{D},$

则称 $\mathcal{A}$ 为 φ 的 $\widetilde{D}$ 吸引子.

定义 1.1.6 和 1.1.7 给出的吸引子称为拉回 (pullback) 吸引子. 在实际应用中我们把初始时刻移到 $-\infty$, 对固定的 $\omega\in\Omega$ 考虑解在 $t=0$ 时刻的值即可. 为了得到吸引子, 紧性的讨论是必须的, 然而这往往是困难所在. 为此我们引入稍弱的条件——渐近紧, 从而得到随机吸引子的存在.

定义 1.1.8 令 φ 是定义在 Polish 空间 X 上的随机动力系统, 若满足对任意有界序列 $\{x_n\}\subset X$, 当 $t_n\to\infty$ 时, 序列 $\{\varphi(t_n,\vartheta_{-t_n}w,x_n)\}$ 在 X 中预紧, 则称 φ 是渐近紧的.

对渐近紧的随机动力系统 φ 我们有如下定理.

定理 1.1.2 [18] 若 φ 是渐近紧的连续随机动力系统, $K(w)\in\widetilde{D}$ 是一个吸收集, 则 φ 存在唯一的全局随机紧吸引子

$$\mathcal{A}(\omega)=\bigcap_{\tau>t_K(w)}\overline{\bigcup_{t\geqslant\tau}\varphi\big(t,\vartheta_{-t}\omega,K(\vartheta_{-t}\omega)\big)}$$

1.1.2 有限 Hausdorff 维数

无穷维动力系统的全局吸引子理论中的一个重要结论就是吸引子的 Hausdorff 维数的有限性, 即便系统的轨道依赖于无穷多个自由度, 但它的渐近行为仍可用有限多个自由度刻画. 对于随机动力系统, Crauel 和 Flandoli [19] 得到了某些系统随机吸引子的有界 Hausdorff 维数, 但他们的方法要求噪声是有界的. Debussche [20] 利用 “随机 squeezing 性质” 得到了某些系统的 Hausdorff 维数的有界性, 其并不要求噪声是有界的. 同样的方法被 Langa 推广到分形维数上 [21]. 然而, 在确定动力系统中, 维数的最佳估计并不是通过 squeezing 性质得到的, 而是通过使用 Lyapunov 指数方法得到的 [22]. Lyapunov 指数方法被 Debussche [23] 推广到随机情况中, 并且得到了 Hausdorff 维数的上界估计. 在文献 [23] 中指出, 应用类似的讨论能够得到分形维数的有界性.

下面给出得到有限 Hausdorff 维数的一些基本理论.

定义 1.1.9 一度量空间 H 的子集 Y 的 Hausdorff 维数 $\dim_H(Y)$ 是指

$$\dim_H(Y)=\inf\{s\geqslant 0:\mu_H(Y,s)=0\}=\sup\{s\geqslant 0:\mu_H(Y,s)>0\}$$

其中, $\mu_H(Y,s)$ 是 Y 的 s-维 Hausdorff 测度 (见文献 [8]).

我们回顾一随机动力系统的随机紧不变集的体收缩与有限 Hausdorff 维数之间的关系. 设 S 是可分 Hilbert 空间关于范数 $|\cdot|$ 的连续随机动力系统, 令 $w \mapsto X(w)$ 是 S 的严格紧不变集, 称 S 在 X 上弱可导, 即满足对 $\mathbb{P}$-a. s. w, 对任一个 $u \in X(w)$, 在 $t>0$ 时, 存在线性映射 $D_uS(t,w): H \to H$ 使得

$$g_\delta(t,w) = \sup\left\{\frac{|S(t,w)u - S(t,w)v - D_uS(t,w)(u-v)|}{|u-v|}:\right.$$
$$\left. u,v \in X(w),\ \ |u-v| \leqslant \delta\right\} \tag{1.1.1}$$

是有限的, 其中 $\delta>0$, 并且对给定 $t>0$, 当 $\delta \to 0$ 时, $g_\delta(t,w) \to 0$ $\mathbb{P}$-a. s.

令

$$\gamma_1(t,w) = \sup_{u\in X(w)} \|D_uS(t,w)\|, \quad \varGamma_d(t,w) = \sup_{u\in X(w)} \|\wedge^d D_uS(t,w)\|$$

下面是得到有界 Hausdorff 维数的一个重要定理.

定理 1.1.3 [19] 设 S 是可分 Hilbert 空间 H 上的一个随机动力系统, 令 $w \mapsto X(w)$ 是一随机紧集, 且关于 S 严格不变. 假设 S 按 (1.1.1) 在 X 上弱可导, 若存在 d 和 $t_0>0$ 满足 $\mathbb{P}$-a. s.

$$\sup_{u\in X(w)} \|\wedge^d D_uS(t_0,w)\| = \varGamma_d(t_0,w) < 1$$

且

- $\gamma_1(t,w) \in L^\infty(\varOmega;\mathbb{P})$ 对 $t \geqslant 0$ 成立,
- $g_\delta(t,w) \in L^\infty(\varOmega;\mathbb{P})$ 对 $t \geqslant 0$ 成立,
- $g_\delta(t,w)$ 在 $L^\infty(\varOmega;\mathbb{P})$ 意义下趋于 0, 其中 $t>0$,

则 X 的 Hausdorff 维数满足 $\dim_H(X) \leqslant d$.

1.2 大偏差

大偏差理论源于 Donsker 和 Varadhan 的奠基性工作 [24], 经 1980 至 1990 年代众多学者的开拓发展, 现已成为概率论的一个重要分支, 在偏微分方程, 马氏过程, 动力系统及其随机扰动, 统计力学的现代 Giggs 场理论, 统计等众多领域都有广泛的应用.

我们给出动力系统中大偏差的一个定义.

定义 1.2.1 [24] X 是 Polish 空间, $\mathcal{B}(X)$ 记为 X 的 Borel σ-域. 随机族 $\{\phi^\varepsilon\}$ 若满足下列三个条件, 则称随机族 $\{\phi^\varepsilon\}$ 在 X 上满足好速率函数 I 的大偏差原理.

1. I **是好速率函数.** $I: X \to [0,\infty]$ 称为速率函数, 若对任意 $M \in [0,\infty)$, 水平集 $\{\phi \in X: I(\phi) \leqslant M\}$ 是 X 中的紧子集, 则称 I 是好速率函数, 若 $A \in \mathcal{B}(X)$, 则 $I(A) =$

$\inf_{\phi\in A} I(\phi)$.

2. **大偏差上界.** 对 X 中任一闭子集 F, 有

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(\phi^\varepsilon \in F) \leqslant -I(F).$$

成立.

3. **大偏差下界.** 对 X 中任一开子集 G, 有

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(\phi^\varepsilon \in G) \geqslant -I(G).$$

成立.

关于随机偏微分方程和半线性发展方程大偏差准则已经有了很多的结果 [25–33], 处理的方法均比较类似, 对满足好速率函数 $\tilde{I}$ 能够用其再生核 Hilbert 空间 (RKHS) 表示, 对高斯噪声 $\sqrt{\varepsilon}W$ 驱使的随机系统, 由一般的 Schilder 定理就可以推出大偏差准则. 然而因为本文考虑的不是可加噪声, 随机过程不是噪声的连续函数, 这给处理带来难度. 本书的方法是应用 Laplace 准则和弱收敛方法 [34, 35], 直接证明速率函数 I 的水平集是紧的, 然后建立原系统的解弱收敛于将原系统噪声 $\sqrt{\varepsilon}W$ 换成它的再生核 Hilbert 空间中随机元素 h_ε 的随机控制方程的解.

1.3 章节安排

第 2 章研究了下列三维随机 Navier-Stokes-Voight (SNSV) 方程的渐近行为:

$$v_t - \nu\Delta v - \alpha^2\Delta v_t + (v\cdot\nabla)v + \nabla p = f(x) + n(t), \quad x \in D \tag{1.3.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in D; \quad v(x,t) = 0, \quad x \in \partial D \tag{1.3.2}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in D \tag{1.3.3}$$

其中 $D \subset \mathbb{R}^3$ 具有光滑边界 ∂D 的有界区域, $v = v(x,t)$ 是速度向量, p 是压力项, $\nu > 0$ 是 kinematic 黏性系数, α 是表示流体弹性的长度参数, f 是给定的外力, $n(t)$ 是随机力场, 记作 $\frac{\partial}{\partial t}W(t)$. 我们假设 $W(t)$ 是 H-值无限维布朗运动, 具有形式

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \beta_j(t) e_j$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \cdots$ 是完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一列独立标准布朗运动 (期望记作 $\mathbb{E}$), $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是标准正交基.

系统 (1.3.1) ~ (1.3.3) 描述了 Kelvin-Voight 黏弹性不可压流体的随机动力学, 其确定模型 (即 $n(t) = 0$) 在文献 [36] 中在被作为线性黏弹性流的运动模型提出, 可看到非黏性简化

Bardina 模型 [37–39] 与非黏性确定 Navier-Stokes-Voight 方程 (1.3.1) ~ (1.3.3) 是一致的. 文献 [40] 将非黏性简化 Bardina 模型 (非黏性确定 Navier-Stokes-Voight 方程) 看作带有周期边界条件的三维无粘欧拉方程的正则化. 文献 [36] 得到确定系统 (1.3.1) ~ (1.3.3) ($n(t)=0$) 存在唯一弱解, 在文献 [41, 42] 中, 作者得到 (1.3.1) ~ (1.3.3) ($n(t)=0$) 生成的半群有有限维全局吸引子的结论. 最近 Cao、Lunasin 和 Titi [40] 得到了三维无粘确定 Kelvin-Voight 模型的整体正则性. 确定三维黏弹性 Navier-Stokes-Voight 方程 (即 Kelvin-Voight 方程) 的正则性和全局吸引子在文献 [43] 和 [44] 中给出.

本章中考虑带有可加噪声 $n(t)$ 的随机 Navier-Stokes-Voight 方程, 研究其渐近行为. 首先, 我们通过引进辅助的 Ornstein-Uhlenbeck 方程, 把带有可加噪声 $n(t)$ 的随机 Navier-Stokes-Voight 方程转化成随机系数的偏微分方程. 因为这样不用考虑随机积分, 于是可以按轨道几乎处处来处理问题. 通过一系列先验估计, 我们得到了方程的适定性, 从而定义了随机动力系统. 利用随机动力系统理论我们证明了该系统具有一个全局随机吸引子. 进一步利用定理 1.1.3, 得到 Hausdorff 维数的有界性.

第 3 章研究 Boussinesq 系统, 它模拟了地球物理学和气候学中的动力行为. 该系统由 Navier-Stokes 方程和盐度扩散方程耦合而成, 由于流体边界盐度流量的不确定性, 在边界考虑随机影响是合理的. 记 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是带有 C^1 光滑边界的有界区域, 同时考虑带有随机力和随机边界扰动 [45] 的 Boussinesq 系统:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}t} &= \Big(\frac{1}{Re}\Delta u^\varepsilon-\nabla p-u^\varepsilon\cdot\nabla u^\varepsilon-\frac{1}{Fr^2}\theta^\varepsilon \boldsymbol{k}\Big)+\sqrt{\varepsilon}\sigma_0(t,\phi^\varepsilon)\dot W_0, \quad 在\ D\times\mathbb{R}_+\\
\operatorname{div} u^\varepsilon &= 0, \quad 在\ D\times\mathbb{R}_+\\
u^\varepsilon &= 0, \quad 在\ \varGamma\times\mathbb{R}_+\\
u^\varepsilon(0) &= u_0^\varepsilon\\
\frac{\mathrm{d}\theta^\varepsilon}{\mathrm{d}t} &= \Big(\frac{1}{RePr}\Delta\theta^\varepsilon-u^\varepsilon\cdot\nabla\theta^\varepsilon\Big)+\sqrt{\varepsilon}\sigma_1(t,\phi^\varepsilon)\dot W_1, \quad 在\ D\times\mathbb{R}_+\\
\frac{\mathrm{d}\theta_\varGamma^\varepsilon}{\mathrm{d}t} &= \Big(\frac{-\partial_n\theta_\varGamma^\varepsilon-c\theta_\varGamma^\varepsilon+f(x,t)}{\epsilon}\Big)+\sqrt{\varepsilon}\sigma_2(t,\phi^\varepsilon)\dot W_2, \quad 在\ \varGamma\times\mathbb{R}_+ \qquad (1.3.4)\\
\gamma\theta^\varepsilon &= \theta_\varGamma^\varepsilon\\
\theta^\varepsilon(0) &= \theta_0^\varepsilon \qquad (1.3.5)
\end{aligned}$$

其中 $u^\varepsilon=u^\varepsilon(t,x)=\big(u_1^\varepsilon(t,x),u_2^\varepsilon(t,x)\big)\in\mathbb{R}^2$ 是速度向量, $\theta^\varepsilon=\theta^\varepsilon(t,x)\in\mathbb{R}$ 是盐度, $\phi^\varepsilon=(u^\varepsilon,\theta^\varepsilon,\theta_\varGamma^\varepsilon)$, 压力为 p, $x=(\xi,\eta)\in D$ 和 $t>0$. 这里 Δ 是 Laplace 算子, γ 是边界迹算子, ∇ 是梯度算子, div 是散度算子, Fr 是 Froude 数, Re 是 Reynolds 数, Pr 是 Prandtl 数, $\dot W_0$、$\dot W_1$ 和 $\dot W_2$ 是白噪声, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^2$ 是垂直向上的单位向量. 若随机边界条件 (1.3.4) 换成通常的周期边界条件, 文献 [46] 给出了该系统的大偏差准则.

带有随机边界条件的随机抛物偏微分方程的动力学可以参考文献 [47–50]. 本章的 Boussinesq 系统因耦合二维 Navier-Stokes 方程, 处理方法有所不同. 我们应用文献 [45] 中的策略把随机边界条件嵌入随机发展方程中, 通过边界条件和方程线性部分的性质, 我们可以构造一线性对称算子, 其特征函数生成一个完备正交空间, 然后在该空间上考虑方程的动力学性质. 在 [45] 中, 通过 Galerkin 逼近和一系列先验估计, 得到了随机吸收集的存在, 从而证明了可加噪声驱使的带有随机边界条件的 Boussinesq 系统具有全局吸引子. 本章中我们考虑乘法噪声驱使的带有随机边界条件的 Boussinesq 系统, 我们首先得到了该系统在给定空间中存在唯一弱解, 然后运用弱收敛的方法和 Laplace 准则得到大偏差理论.

第 4 章研究气象学中的一个基本模型——原始方程. 通过 Boussinesq 逼近, 原始方程由有旋 Navier-Stokes 方程耦合温度和盐度扩散方程中推出, 同时由于大气和海洋层的深度较地球半径非常的小, 在大尺度意义下大气海洋垂直方向的运动远远小于水平方向的运动, 所以我们在垂直方向的动量方程用流体静力学方程代替. 欲了解更多详细的信息, 参见文献 [51] 和 [52].

原始方程数学框架下的研究源于 J. L. Lions、R. Temam 和 S. Wang 1990 年代的论文 [53] 和 [54]. 他们定义了弱解和强解并且证明了弱解的存在性. 关于局部强解的存在性和唯一性在文献 [55] 和 [56] 给出. 定义在薄区域上, 且初值依赖区域的薄度的原始方程的整体强解的存在唯一性在文献 [57] 中得到, 突破性的进展由 Cao 和 Titi [58] 给出, 他们得到在模型顶部和底部满足 Neumann 边界条件的原始方程整体强解的适定性, 文献 [59] 和 [60] 有类似的结论. 在此基础上, 文献 [61] 得到了全局吸引子的存在性. 满足 Dirichlet 边界条件的解的正则性在 [62] 中给出.

在确定原始方程基础上考虑随机效应是合理的. 可加噪声驱使的二维原始方程在文献 [63] 中被研究, 类似三维 Navier-Stokes 方程, 在研究三维原始方程时由于对流项的存在, 较之二维情况更难处理. B. Guo 和 D. Huang [64] 研究了可加噪声驱使的三维随机原始方程的全局适定性和长时动态行为, 得到方程存在随机吸引子, 但该吸引子仅仅满足弱紧性质. 首先, 我们应用不同于文献 [64] 的先验估计、Aubin-Lions 紧性引理、Riesz 引理和一些连续性结论, 同样得到强解的全局适定性, 并且得到方程存在紧的全局吸引子, 进一步得出吸引子具有有限 Hausdorff 维数. 其次, 我们研究二维乘法噪声驱使的随机原始方程. 忽略盐度和温度方程的耦合, 在文献 [65] 中得到了二维乘法噪声驱使的随机原始方程的弱解的存在性和唯一性. 本书中, 我们推广了文献 [65] 的结果, 应用不同和更为细致的先验估计, 得到耦合温度方程的二维乘法噪声驱使的随机原始方程的解的适定性, 同时得到其满足 Wentzell-Freidlin 型的大偏差准则. 注意到在文献 [66] 中, 得到几类非线性随机模型的大偏差准则, 其中包括二维 Navier-Stokes 方程、二维 MHD 模型、二维磁性 Bénard 问题和一些带有扰动的壳层模型, 但因为本节中映射 B 不满足文献 [66] 中的条件 (C1), 所以我们的结果不包含在

内. 接着, 我们考虑三维乘法噪声驱使的随机原始方程, 应用 Galerkin 逼近、Itô 公式和弱收敛方法, 得到了方程解的适定性, 其中一致先验估计是难点也是关键点.

对于全黏度的原始方程, 黏性原始方程存在一个尚未解决的数学问题, 即关于弱解的唯一性, 通过将 z-弱解的概念引入二维或三维黏性原始方程中, 可以得出一些关于唯一性的结果, 请参见文献 [67–69]. 由于外力和内部不稳定过程的影响, 近来关于随机原始方程适定性、正则性、随机吸引子以及不变测度的存在性和正则性, 请参考文献 [64, 70–72]. 对于偏差原理和小时间原始方程的渐近性, 请参见文献 [73, 74]. 对于无黏度的原始方程, 在文献 [75] 中获得了爆破结果, 另请参见 [76]. Han-Kwan 和 Nguyen[77] 对 Sobolev 空间有不适定结果. 对于部分黏度的原始方程, 它是介于适定和不适定之间的一个中间模型. Cao、Li 和 Titi [78, 79] 研究了仅有水平耗散的原始方程. 在周期设定下, 通过考虑垂直速度扩散系数, 得到了初值在 H^1 附近时强解的全局适定性以及初值属于 H^1 时强解的局部适定性. 不同于考虑消失的垂直黏度极限, 通过一种直接的方法, 特别避免了不必要的顶部和底部边界条件, Hussein 等 [80] 对于仅有水平黏度的三维原始方程, 研究了初值和时间周期问题, 得到初值在 $H_z^1L_{xy}^2$ 中的 z-弱解的局部存在唯一性和初值在 H^1 中的局部强解存在唯一性. 此外, 若 $\partial_z v_0 \in L^q$ 对于 $q > 2$, 局部 z-弱解扩展到整体强解. 对于部分高黏度和完全高黏度的情况, 在 [81] 中, Hussein 得到了高黏度 Navier-Stokes 和原始方程的弱解的强收敛性. 在上述基础上, 我们研究仅有水平耗散的随机原始方程鞅解的适定性.

第 5 章研究两类非 Lipschitz 条件下随机流体方程: Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 方程和原始方程, 其中 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 方程由控制速度的 Navier-Stokes 方程和控制相位参数的 Cahn-Hilliard 模型耦合而成. 利用迭代技巧、合理的假设条件、一致先验估计和弱收敛方法, 我们给出了上述两个方程的全局适定性.

第 2 章 三维随机 Navier-Stokes-Voight 方程

本章我们研究三维随机 Navier-Stokes-Voight 方程的渐近行为. 2.1 节研究方程的解的适定性, 并证明方程存在全局随机吸引子. 2.2 节证明全局随机吸引子具有有限 Hausdorff 维数.

2.1 SNSV 方程的全局吸引子

本节研究随机 Navier-Stokes-Voight 方程的解的适定性, 并证明方程存在全局随机吸引子.

2.1.1 模型和一些记号

我们研究下列三维随机 Navier-Stokes-Voight (SNSV) 方程:

$$\begin{aligned} v_t - \nu\Delta v - \alpha^2\Delta v_t + (v\cdot\nabla)v + \nabla p &= f(x) + n(t), \quad x \in D &(2.1.1)\\ \operatorname{div} v = 0, \quad x \in D; \quad v(x,t) &= 0, \quad x \in \partial D &(2.1.2)\\ v(x,0) &= v_0(x), \quad x \in D &(2.1.3)\end{aligned}$$

其中 $D \subset \mathbb{R}^3$ 是带有光滑边界 ∂D 的有界区域, $v = v(x,t)$ 是速度向量, p 是压力项, $\nu > 0$ 是 kinematic 黏性系数, α 是表示流体弹性的长度参数, f 是给定的外力场, $n(t)$ 是随机力场, 记作 $\frac{\partial}{\partial t}W(t)$. 我们假设 $W(t)$ 是 H-值无限维布朗运动, 具有形式

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \beta_j(t) e_j$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \cdots$ 是完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一列独立标准布朗运动 (期望记作 $\mathbb{E}$), $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是标准正交基.

本节我们用到以下数学记号:

- $L^p(D), 1 \leqslant p \leqslant \infty$ 和 $H^s(D)$ 分别是通常的 Lebesgue 和 Sobolev 空间.
- 对 $v = (v_1, v_2, v_3)$ 和 $u = (u_1, u_2, u_3)$, 我们记

$$(u,v) = \sum_{j=1}^{3}(u_j, v_j)_{L_2(D)}, \quad \|v\|^2 = \sum_{j=1}^{3}\|v_j\|^2_{L_2(D)}$$