WEIJIFEN

微积分简明教程

WEIJIFEN JIANMING JIAOCHENG

主　编　武瑞丽　钱小瑞

重庆大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分简明教程 / 武瑞丽、钱小瑞主编. --重庆 : 重庆大学出版社,2021.4

ISBN 978-7-5689-2166-4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①武…②钱… Ⅲ. ①微积分—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 083995 号

微积分简明教程

主　编　武瑞丽　钱小瑞

副主编　严　峻　龙　琼　柴容倩

责任编辑:文　鹏　　版式设计:文　鹏

责任校对:刘志刚　　责任印制:邱　瑶

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:饶帮华

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190　88617185(中小学)

传真:(023) 88617186　88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@ cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm　1/16　印张:13.5　字数:323 千

2021 年 7 月第 1 版　2021 年 7 月第 1 次印刷

印数:1—2 600

ISBN 978-7-5689-2166-4　定价:42.00 元

前 言

微积分是以极限为工具研究微分学、积分学以及有关概念和应用的数学分支.它是由英国伟大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨在总结前人工作的基础上分别独立创立的.它的创立极大地推动了数学、其他科学及技术的发展.恩格斯曾指出:“在一切理论成就中,未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利.”

本书是应用技术型大学数学课程系列教材中的一本,全书共8章,主要内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分,多元函数微积分学,微分方程简介及无穷级数简介.本书注重适当渗透现代数学思想,加强对学生运用数学方法解决实际问题的能力的培养.本书具有如下特色:

1.内容编排上,重思想、重方法、重应用,删除了某些繁杂的理论证明过程,每一章都有一节专门加入了应用实例.

2.文体风格上,力求通俗易懂、直观简洁.一般从实际例子引入概念和理论,描述问题也简洁明确,便于学生阅读.

3.例题和习题的选取兼顾丰富性和层次性.按节配备了难度适中的习题(除第7章和第8章),每章配有单元检测题,书后附有答案提示.

限于编者水平,书中难免有疏漏之处,恳请同行专家和读者不吝赐教,我们表示深深的感谢.

编　者

2020年8月8日

目 录

第1章 函数、极限与连续

函数是数学中最重要的基本概念之一,是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的重要反映.在本章中,我们将在中学已有知识的基础上,进一步阐明函数的一般定义,总结在中学已学过的一些函数,并介绍极限理论与函数的连续性.

§1.1 函数

1.1.1 集合

集合是现代数学的一个最基本的概念,数学的各个分支普遍运用集合的表示方法和符号.我们在中学阶段已经学习过集合的知识,现在对其中部分内容进行回顾.

1)集合的概念

定义1 具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**.例如,某学校图书馆的藏书,方程 $x^2-4x+3=0$ 的实数解等,都分别构成一个集合.集合通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

组成集合的对象称为集合的元素,元素通常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

若 a 是集合 A 的元素,记作"$a\in A$",读作"a 属于 A";否则记作"$a\notin A$"(或 $a\overline{\in}A$),读作"a 不属于 A".

2)集合的表示法

集合的表示法有列举法和描述法两种.

(1)列举法

列举法是把集合中的元素一一列举出来,写在大括号{ }内,每个元素只写一次,不分次序.例如,小于10的正偶数构成的集合表示为 $A=\{2,4,6,8\}$;满足不等式 $|x+1|\leqslant 2$ 的所有整数构成的集合表示为 $B=\{-3,-2,-1,0,1\}$.

(2)描述法

描述法是把集合中的元素所具有的共同性质描述出来,写在大括号{ }内.如不等式 $|x+1|\leqslant 2$ 的所有实数解构成的集合表示为 $B=\{x\,|\,-3\leqslant x\leqslant 1\}$.

集合中的元素都是数时,该集合称为数集.常见的数集有自然数集 $\mathbf{N}$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数集 $\mathbf{R}$,正整数集 $\mathbf{N}^*$.

3)区间

区间是高等数学中常用的实数集,分为有限区间和无限区间,具体定义如下(设 a,b 为任意实数,且 $a<b$):

(1)有限区间

开区间 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$,

闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$,

半开半闭区间 $(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$, $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$.

a,b 称为区间的端点;$b-a$ 称为区间的长度.

(2)无限区间

$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a,x\in\mathbf{R}\}$,　　$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\}$,

$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b,x\in\mathbf{R}\}$,　　$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$,

$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\}$.

4)邻域

设 $x_0\in\mathbf{R},\delta>0$,开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ **邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$,即 $U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$,其中 x_0 称为**邻域中心**;δ 称为邻域半径.

从数轴上看,$U(x_0,\delta)$ 表示到点 x_0 的距离小于 δ 的点的集合,如图 1.1 所示. 故有

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}.$$

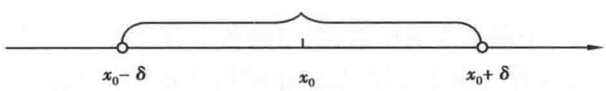


图 1.1

点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后,称为点 x_0 的去心邻域,如图 1.2 所示,记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,因而有

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}.$$

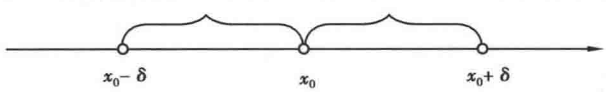


图 1.2

另外,把开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为 x_0 的左 δ 邻域,把开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的右 δ 邻域.

1.1.2　函数

在自然现象或实际问题中,通常会发生一个量随另一个量的变化而变化的情况.例如,物体运动时运行的路程 S 随时间 t 的改变而改变;圆的面积 A 随半径 r 的改变而改变. 将两个量之间的这种关系定义为函数关系.

1)函数的概念

定义 2　设 x,y 是两个变量,数集 $D\subseteq\mathbf{R}$ 且 $D\neq\varnothing$,若 $\forall x\in D$("$\forall$"表示"任意的"),按

照某种对应法则f,y都有确定的值与之对应,则称y为x的**函数**,记作$y=f(x)$,$x\in D$.自变量x的取值范围(数集D)称为函数的**定义域**,记作D_f.

若自变量在定义域内任取一个数值,对应的函数值只有一个,则称函数为单值函数,否则称为多值函数. 例如,$y=x+1$为单值函数;$y^2=x+1$为多值函数. 在本书中若没有特殊说明,均为单值函数.

由函数定义知,对D_f中的任意给定的数值x_0,y都有确定的值y_0与之对应,称y_0为函数$y=f(x)$在x_0处的函数值,记作$f(x_0)$.

函数值的全体构成的集合称为函数$y=f(x)$的**值域**,记作R_f,即

$$R_f=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}.$$

若两个函数的定义域和对应法则分别相同,则这两个函数为相同的函数(此时值域必定相同).例如,函数$y=|x|$与$y=\sqrt{x^2}$是相同的函数;而$y=x+1$与$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$是不同的函数,因为$y=x+1$的定义域为实数集$\mathbf{R}$,而函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的定义域为$\{x\,|\,x\neq 1\}$,由于定义域不同,所以它们是不同的函数.

例 1.1 设函数$y=x+\dfrac{2}{x}$,求$f(1)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解

$$f(1)=1+\frac{2}{1}=3,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{2}{\frac{1}{x}}=2x+\frac{1}{x}.$$

设函数$y=f(x)$的定义域为D_f,取定一个$x_0\in D_f$,就有一个对应的y_0,由x_0、y_0构成的一组实数对(x_0,y_0)对应xOy平面上的一个点. 当x取遍D_f上所有值时,得到xOy平面上的点集M为$M=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$.

点集M称为函数$y=f(x)$的**图像**(或图形). 图像M在x轴上的垂直投影点集是D_f,在y轴上的垂直投影点集就是R_f,如图1.3所示.

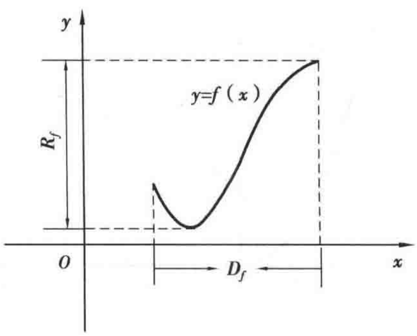


图 1.3

若一个函数在自变量的不同取值范围内有不同的对应法则,则称该函数为**分段函数**.

下面举几个分段函数的例子.

例 1.2 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0.\\ -1, & x<0\end{cases}$$

其定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,如图 1.4 所示.

对 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $x=(\operatorname{sgn} x)\cdot|x|$.

例 1.3 取整函数 $y=[x]=n,n\leqslant x<n+1,n\in\mathbf{Z}$.

对任意实数 x,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,其定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=\mathbf{Z}$.如图 1.5 所示,$[0.2]=0$,$[-3.1]=-4$,$[5]=5$.

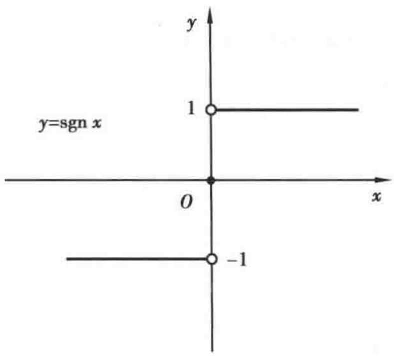


图 1.4

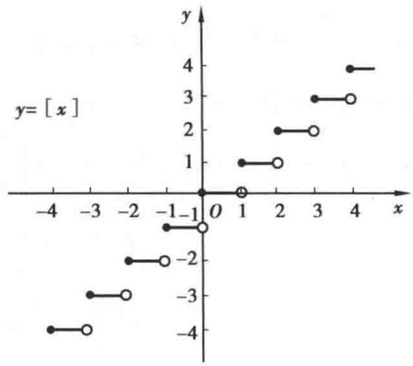


图 1.5

例 1.4 函数 $y=\begin{cases}x^2, x\leqslant 0\\ x+1, x>0\end{cases}$.

定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,如图 1.6 所示.

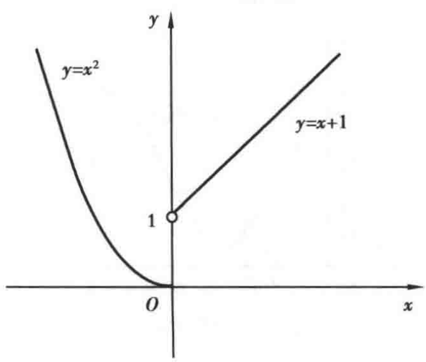


图 1.6

2)函数的几种特性

(1)奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称.若对 $\forall x\in D_f$,有 $f(-x)=-f(x)$ ($f(-x)=f(x)$),则称 $y=f(x)$ 为**奇函数(偶函数)**.

例如,$f(x)=x^2$ 为偶函数;$f(x)=x$ 为奇函数;$f(x)=x^2+x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

由奇函数定义知,奇函数图像关于原点对称(图 1.7),偶函数图像关于 y 轴对称(图 1.8).

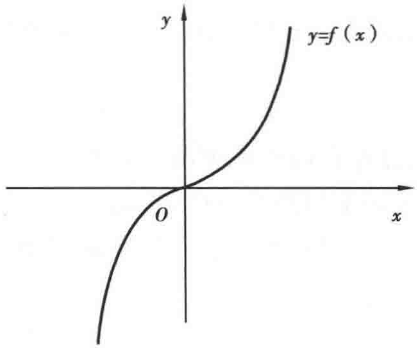


图 1.7

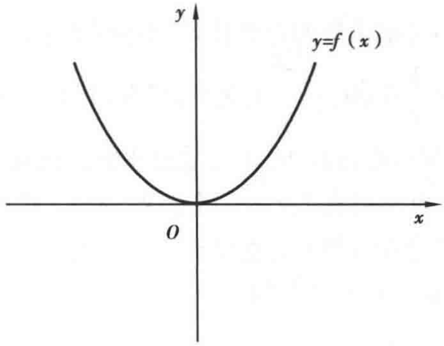


图 1.8

(2)单调性

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,如果 $\forall x_1<x_2\in I\subseteq D_f$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加(单调减少).单调增加函数的图像沿 x 轴正向上升,单调减少函数的图像沿 x 轴正向下降,如图 1.9、图 1.10 所示.

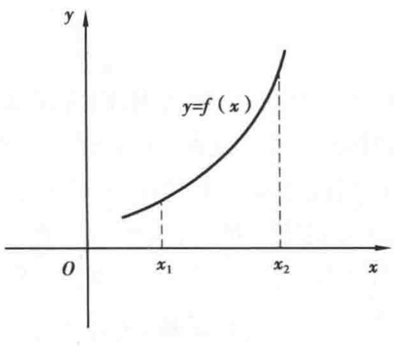


图 1.9

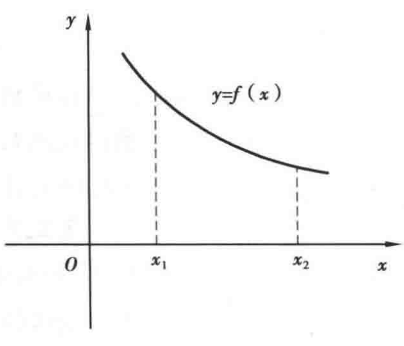


图 1.10

(3)有界性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,$I\subseteq D_f$,如果存在正数 M,使 $\forall x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**.相反地,如果对于任意正数 M,总存在 $x_0\in I$,使得 $|f(x_0)|>M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

由绝对值不等式知,$|f(x)|\leqslant M$ 等价于 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$,因此,当函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界时,函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图像必介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间,如图 1.11 所示.

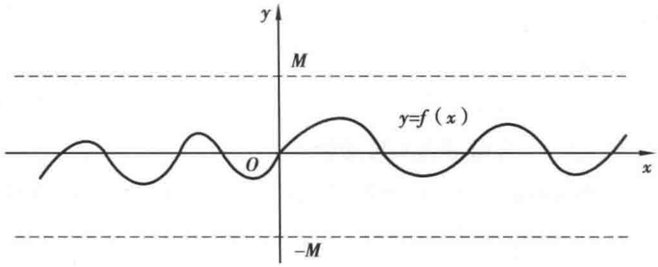


图 1.11

注:考虑函数的有界性时,不但要注意函数本身的特点,还要注意自变量的取值范围.如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界,但在 $(1,2)$ 上有界.

如果存在常数 M(不一定是正数),使对 $\forall x\in I$,总有 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 I 上有上界,且 M 称为 $f(x)$ 在 I 上的一个上界. 易知,任何大于 M 的数均是 $f(x)$ 在 I 上的一个上界;同样的,如果存在常数 m, 使对 $\forall x\in I$,总有 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$ 在 I 上有下界. 易知,任何小于 m 的数均是 $f(x)$ 在 I 上的一个下界.

(4)周期性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f,如果存在一个正数 T,使 $\forall x\in D_f$,有 $f(x)=f(x\pm T)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**,称 T 为 $f(x)$ 的一个**周期**.

显然,若 T 为 $f(x)$ 的一个周期,则 $kT(k=1,2,3,\cdots)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期.通常将最小正周期称为函数的周期.

例如,函数 $\sin x,\cos x$ 的周期为 2π;$\tan x,\cot x$ 的周期为 π.

1.1.3 反函数

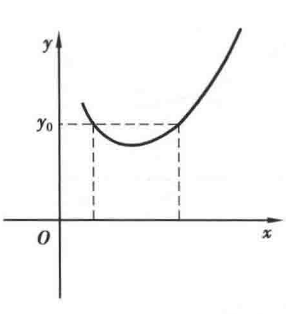


图 1.12

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f,值域为 R_f.因为 R_f 是由函数值组成的数集,所以对每一个 $y_0\in R_f$,必定有 $x_0\in D_f$,使得 $f(x_0)=y_0$,但这样的 x_0 可能不止一个,如图 1.12 所示.

定义 7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f,值域为 R_f. 若 $\forall y\in R_f$,D_f 中有唯一的 x 与之对应,使得 $f(x)=y$,则得到一个以 y 为自变量的函数,称为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 R_f,值域为 D_f.由于习惯上自变量用 x 表示,故将 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

而且,函数 $y=f(x),x\in D_f$ 与反函数 $y=f^{-1}(x),x\in R_f$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,如后面的图 1.15 所示.

并非所有函数都存在反函数. 但单调函数一定存在反函数,且有如下定理:

定理 1 若对 $\forall x\in D_f$,$y=f(x)$ 是单调增加(减少)函数,则它一定存在反函数 $y=f^{-1}(x)$,$x\in R_f$ 且该反函数与 $y=f(x)$ 具有同样的单调性.

1.1.4　基本初等函数

以前已经学习过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数 5 种函数，今后接触的函数大部分是它们经过某种运算得到的，现将这 5 种函数简单总结如下：

1)幂函数

定义 8　形如 $y=x^a$（a 是常数）的函数称为**幂函数**. 其定义域视 a 的值而定. $y=x^a$ 中，$a=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 是最常见的幂函数，图像如图 1.13 所示.

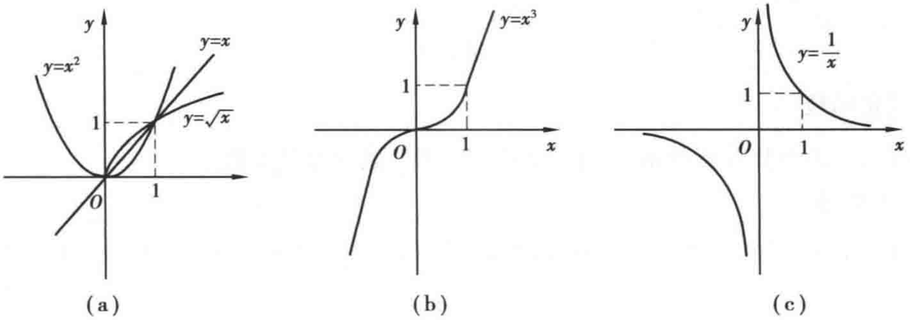


图 1.13

2)指数函数

定义 9　形如 $y=a^x$（$a>0,a\neq1$）的函数称为**指数函数**. 其定义域为实数集 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}^+$. 图像经过(0,1)点.

$a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 单调增加；$0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 单调减少，如图 1.14 所示.

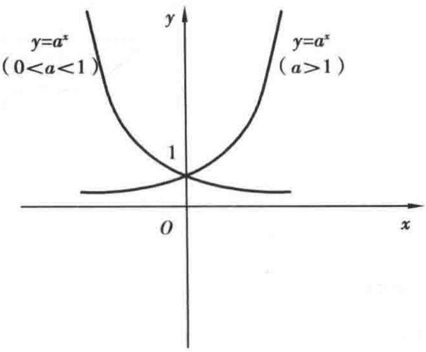


图 1.14

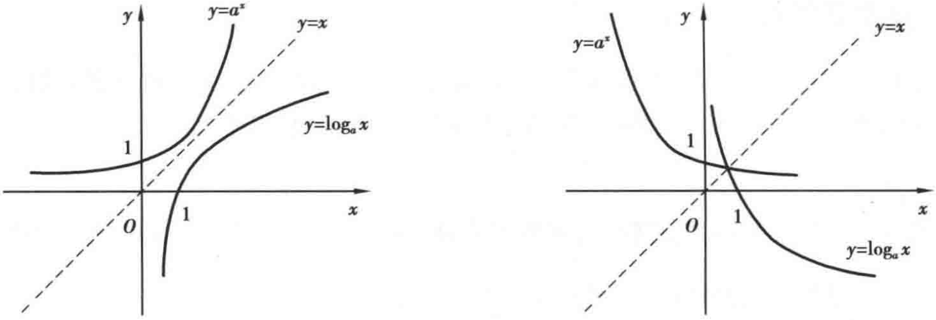
3)对数函数

定义 10　形如 $y=\log_a x$（$a>0,a\neq1$）的函数称为**对数函数**.其定义域为 $\mathbf{R}^+$，值域为 $\mathbf{R}$，图像经过(1,0)点.

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0,a\neq1$）与指数函数 $y=a^x$（$a>0,a\neq1$）互为反函数.

$a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 单调增加；$0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 单调减少，如图 1.15 所示.

以无理数 e 为底的**对数函数**，称为自然对数函数，记作 $y=\ln x$.



(a) $a>1$　　　(b) $0<a<1$

图 1.15

4) 三角函数

常用的三角函数有正弦函数、余弦函数、正切函数和余切函数.

(1) 正弦函数

$y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$ 是周期为 2π 的函数, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $|\sin x|\leqslant 1$, 如图 1.16 所示.

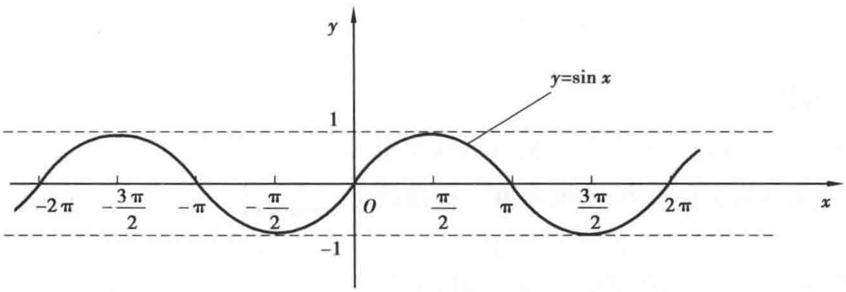


图 1.16

(2) 余弦函数

$y=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$ 是周期为 2π 的函数, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $|\cos x|\leqslant 1$, 如图 1.17 所示.

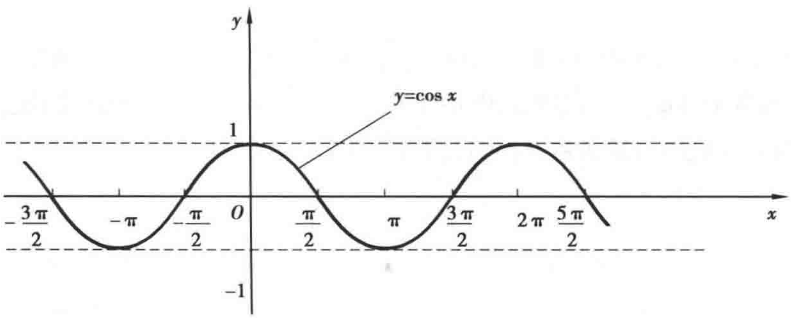


图 1.17