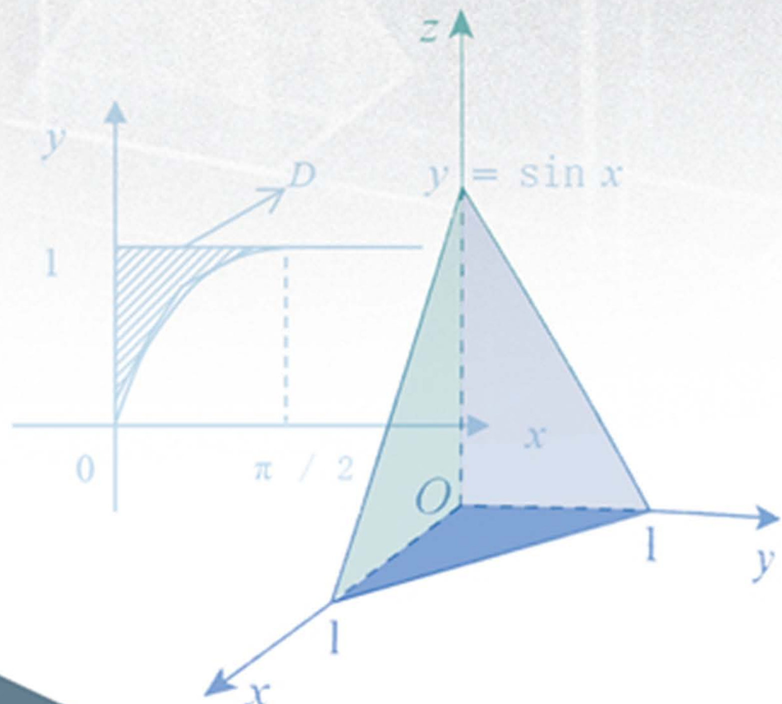
普通高等教育数学类基础课程系列教材

高等数学习题全解

（上册）

陈丽娟　郭　英　王　欣 / 主编



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育数学类基础课程系列教材

高等数学习题全解（上册）

主　编　陈丽娟　郭　英　王　欣
副主编　耿　雪　王丽莎　张　蕾　刘玉香

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是根据同济大学数学系编写的《高等数学》（第七版上册）而编写的解题指导配套用书，主要内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和微分方程。共分两部分，第一部分是习题全解，第二部分是试卷选编。本书知识点讲解全面，题目分析清晰明了。提高题目选取了大量考研真题和数学竞赛真题，让读者在同步学习中达到考研的备考水平，具有较高的出版价值。

本书结构完整、布局合理、习题解答清楚明了，既可作为修习此门课程的在校大学生的习题解答参考书，也可作为全国硕士研究生统一招生考试和全国大学生数学竞赛的辅导用书，还可作为讲授此门课程的大学教师的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解. 上册 / 陈丽娟，郭英，王欣主编. --北京：北京理工大学出版社，2021.8

ISBN 978-7-5763-0214-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… ②郭… ③王… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2021）第 169645 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
　　　　　（010）82562903（教材售后服务热线）
　　　　　（010）68944723（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 17. 25
字　　数 / 511 千字
版　　次 / 2021 年 8 月第 1 版　2021 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 45. 00 元

责任编辑 / 孟祥雪
文案编辑 / 孟祥雪
责任校对 / 刘亚男
责任印制 / 李志强

前　言

高等数学是非数学专业开设的一门专业基础必修课。作为一门基础学科，高等数学不仅是学好其他专业课程的前提和保障，还是很多后续课程的基础和工具，在许多学科领域里都有着重要的应用。本书是同济大学数学系编写的《高等数学》（第七版上册）的配套用书，是以指导学生理解概念、掌握基本解题为目的而编写的。

本书内容按照《高等数学》（第七版上册）的章节顺序设计，包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和微分方程。书中内容由两部分组成。第一部分是《高等数学》（第七版上册）的习题全解，每一章由以下四部分构成。

（1）主要内容：对每章涉及的基本概念、基本定理和基本公式进行系统的梳理。

（2）习题讲解：该部分对《高等数学》（第七版上册）中的所有习题给出了详细的解答，针对部分习题，本书还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维的能力。其中，习题中打星号的章节和题目均以二维码的形式出现。

（3）提高题目：编写了一些历年考研和数学竞赛中涉及的具有参考意义的题目，目的是给愿意多学一些、多练一些的学生及准备考研和参加数学竞赛的读者提供一些自学材料，也为教师在复习、考试等环节的命题工作提供一些参考资料。

（4）章自测题：精选有代表性、测试价值高的题目，以此检测、巩固学生所学知识，达到提高应试水平的目的。

第二部分是《高等数学》试卷选编，精选了四套试卷，并提供了试题的参考答案，以二维码的形式出现。

本书知识点讲解全面，题目分析清晰明了，既对重点及常考知识点进行了归纳，又对基本题型的解题思路、解题方法和答题技巧进行了总结。同时，提高题目选取大量考研真题和数学竞赛真题，让读者在同步学习中达到考研的备考水平。

本书由陈丽娟主编，其中第一章由郭英和陈丽娟完成，第二章由王欣完成，第三章由王丽莎完成，第四章由刘玉香完成，第五章和第六章由耿雪完成，第七章由张蕾和陈丽娟完成；第二部分试卷选编由陈丽娟完成。最后全书由陈丽娟统一整理定稿。在本书编写过程中，得到了青岛理工大学教务处、理学院领导和同事的关心和帮助；北京理工大学出版社给予了的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

目 录

第一部分

《高等数学》(第七版　上册)

习题全解

第一章

函数与极限

一、主要内容

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的概念
    - 函数的性质 — 有界性、单调性、奇偶性、周期性
    - 函数的运算 — 四则运算、反函数、 复合函数
    - 函数的分类 — 基本初等函数、初等函数、分段函数
  - 极限
    - 极限的定义
      - 数列极限
      - 函数极限
        - 自变量趋于无穷大时函数极限
        - 自变量趋于有限值时函数极限
        - 单侧极限与双侧极限
    - 极限的性质
      - 数列极限：唯一性、有界性、保号性，收敛数列与其子数列的关系
      - 函数极限：唯一性、局部有界性、局部保号性，函数极限与数列极限的关系
    - 极限的计算方法
      - 四则运算法则、幂指函数运算
      - 夹逼准则、单调有界准则
      - 两个重要极限、等价无穷小代换
    - 无穷小
      - 无穷小与无穷大的定义及关系
      - 无穷小的性质及运算，无穷小与极限的关系
      - 无穷小阶的比较
  - 连续
    - 连续的定义 — 初等函数、分段函数的连续性
    - 闭区间上连续函数的性质 — 有界性定理、最值定理、零点定理与介值定理
    - 间断点的分类
      - 第一类间断点：左右极限都存在
        - 可去间断点
        - 跳跃间断点
      - 第二类间断点：左右极限至少有一个不存在

二、习题讲解

习题1-1　解答　映射与函数

1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$；

(2) $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$，定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$，定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$；

(4) $4-x^2>0\Rightarrow|x|<2$，定义域为 $(-2,2)$；

(5) $x\geqslant 0$，定义域为 $[0,+\infty)$；

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，定义域为 $\left\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$；

(7) $|x-3|\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$，定义域为 $[2,4]$；

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$；

(9) $x+1>0\Rightarrow x>-1$，定义域为 $(-1,+\infty)$；

(10) $x\neq 0$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

注：求函数的自然定义域的一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集，则得所求定义域.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；　　(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；　　(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

解　(1) 不同，由于定义域不同；

(2) 不同，由于对应法则不同，$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$

(3) 相同，由于定义域、对应法则都相同；

(4) 不同，由于定义域不同.

3. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解　$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi(-2)=0$.

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

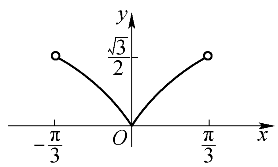


图 1-1

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\frac{x}{1-x}(-\infty,1)$；　　(2) $y=x+\ln x(0,+\infty)$.

证　(1) $y=\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$，$x\in(-\infty,1)$. 设 $x_1<x_2<1$. 由于

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{1}{1-x_2}-\frac{1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0,$$

从而 $y(x_2)>y(x_1)$，即 y 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2) $y=x+\ln x$，$x\in(0,+\infty)$. 设 $0<x_1<x_2$. 由于

$$y(x_2)-y(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

从而 $y(x_2)>y(x_1)$，即 y 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证　设 $-l<x_1<x_2<0$，故 $0<-x_2<-x_1<l$. 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以

$$f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1).$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，从而 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$. 因此 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证　(1) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均是偶函数，则有 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$.

设 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是 $F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$，所以 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 是奇函数，则有 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$.

设 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，于是 $G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$，所以 $G(x)$ 为奇函数.

（2）设$f_1(x)$，$f_2(x)$均为偶函数，则有$f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$.

设$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$，于是$F(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x)$，因此$F(x)$为偶函数.

设$g_1(x)$，$g_2(x)$均为奇函数，则$g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$.

设$G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$. 于是

$$G(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)g_2(x)=G(x),$$

因此$G(x)$为偶函数.

设$f(x)$为偶函数，$g(x)$为奇函数，则$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$.

设$H(x)=f(x)\cdot g(x)$，于是

$$H(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)=-H(x),$$

因此$H(x)$为奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

（1）$y=x^2(1-x^2)$；　　（2）$y=3x^2-x^3$；

（3）$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　（4）$y=x(x-1)(x+1)$；

（5）$y=\sin x-\cos x+1$；　　（6）$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解　（1）由于$f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$，故$f(x)$为偶函数；

（2）由于$f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$，$f(-x)\neq f(x)$，且$f(-x)\neq -f(x)$，故$f(x)$既非偶函数又非奇函数；

（3）由于$f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，故$f(x)$为偶函数；

（4）$y=f(x)=x(x-1)(x+1)$，由于

$$f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

故$f(x)$为奇函数；

（5）由于$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$，$f(-x)\neq f(x)$且$f(-x)\neq -f(x)$，故$f(x)$既非偶函数又非奇函数；

（6）由于$f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，故$f(x)$为偶函数.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

（1）$y=\cos(x-2)$；　　（2）$y=\cos 4x$；

（3）$y=1+\sin \pi x$；　　（4）$y=x\cos x$；

（5）$y=\sin^2 x$.

解　（1）周期函数，周期$l=2\pi$；

（2）周期函数，周期$l=\dfrac{\pi}{2}$；

（3）周期函数，周期$l=2$；

（4）不是周期函数；

（5）周期函数，周期 $l=\pi$.

9. 求下列函数的反函数：

（1）$y=\sqrt[3]{x+1}$；　（2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3）$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$；　（4）$y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

（5）$y=1+\ln(x+2)$；　（6）$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解　（1）根据 $y=\sqrt[3]{x+1}$，解得 $x=y^3-1$，反函数为 $y=x^3-1$；

（2）根据 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3）根据 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，解得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$，反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$；

（4）根据 $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$，解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$；

(5) 根据 $y=1+\ln(x+2)$，解得 $x=e^{y-1}-2$，反函数为 $y=e^{x-1}-2$；

（6）根据 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$，解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证　设 $f(x)$ 在 X 上有界，则存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in X$，从而 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in X$，说明 $f(x)$ 在 X 上有上界 M，下界 $-M$.

反之，设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1，下界 K_2，则 $K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1$，$x\in X$. 取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$，则 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in X$，说明 $f(x)$ 在 X 上有界.

11. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

（1）$y=u^2$，$u=\sin x$，$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$；（2）$y=\sin u$，$u=2x$，$x_1=\dfrac{\pi}{8}$，$x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

（3）$y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$；（4）$y=e^u$，$u=x^2$，$x_1=0$，$x_2=1$；

（5）$y=u^2$，$u=e^x$，$x_1=1$，$x_2=-1$.

解　（1）$y=\sin^2 x$，$y_1=\dfrac{1}{4}$，$y_2=\dfrac{3}{4}$；　（2）$y=\sin 2x$，$y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=1$；

（3）$y=\sqrt{1+x^2}$，$y_1=\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{5}$；　（4）$y=e^{x^2}$，$y_1=1$，$y_2=e$；

（5）$y=e^{2x}$，$y_1=e^2$，$y_2=e^{-2}$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

（1）$f(x^2)$；　（2）$f(\sin x)$；

（3）$f(x+a)(a>0)$；　（4）$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解　（1）$0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,1]$；

（2）$0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Rightarrow x \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$，$n \in \mathbf{Z}$；

（3）$0 \leqslant x + a \leqslant 1 \Rightarrow x \in [-a, 1-a]$；

（4）$\begin{cases} 0 \leqslant x + a \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x - a \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow$ 当 $0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时，$x \in [a, 1-a]$；当 $a > \dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $\varnothing$.

13. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$ $g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$

$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的图形分别如图 1-2 和图 1-3 所示.

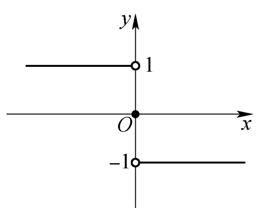


图 1-2

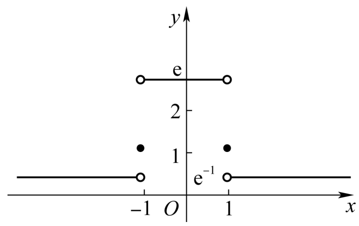


图 1-3

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi = 40°$（见图 1-4）. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

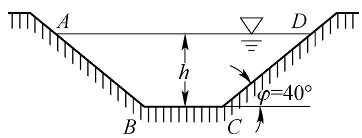


图 1-4

解 $AB = CD = \dfrac{h}{\sin 40°}$，由于 $S_0 = \dfrac{1}{2}h[BC + (BC + 2\cot 40° \cdot h)]$，计算得 $BC = \dfrac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h$，所以 $L = \dfrac{S_0}{h} + \dfrac{2 - \cos 40°}{\sin 40°}h$，又 $h > 0$ 且 $\dfrac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h > 0$，则湿周函数的定义域为 $\left(0, \sqrt{S_0 \tan 40°}\right)$.

15. 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 及直线 l：$x + y = t(t \geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

解 当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，$S(t) = \dfrac{1}{2}t^2$；当 $1 < t \leqslant 2$ 时，$S(t) = 1 - \dfrac{1}{2}(2-t)^2 = -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1$；

当 $t > 2$ 时，$S(t) = 1$，即

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

16. 求联系华氏温度（用 F 表示）和摄氏温度（用 C 表示）的转换公式，并求

（1）90 ℉的等价摄氏温度和-5 ℃的等价华氏温度；

（2）是否存在一个温度值，使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？

解 令 $F=mC+b$，其中 m、b 均为常数．由于 $F=32$ 相当于 $C=0$，$F=212$ 相当于 $C=100$，从而 $b=32$，$m=\dfrac{212-32}{100}=1.8$. 因此 $F=1.8C+32$ 或 $C=\dfrac{5}{9}(F-32)$.

（1）当 $F=90$ 时，$C=\dfrac{5}{9}(90-32)\approx 32.2$；当 $C=-5$ 时，$F=1.8\times(-5)+32=23$.

（2）设温度值 t 符合题意，则 $t=1.8t+32$，$t=-40$，说明 -40 ℉ 恰好也是 -40 ℃.

17. 已知 Rt$\triangle ABC$ 中，直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15，动点 P 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to B\to A$ 方向移动；动点 Q 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to A\to B$ 方向移动，移动到两动点相遇时为止，且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍．设动点 P 移动的距离为 x，$\triangle CPQ$ 的面积为 y，试求 y 与 x 之间的函数关系．

解 由于 $|AC|=20$，$|BC|=15$，从而 $|AB|=\sqrt{20^2+15^2}=25$. 根据 $20<2\times 15<20+25$，可知，P 和 Q 在斜边 AB 上相遇．令 $x+2x=15+20+25$，得 $x=20$. 即当 $x=20$ 时，点 P 和 Q 相遇．故所求函数的定义域为 $(0,20)$.

当 $0<x<10$ 时，点 P 在 CB 上，点 Q 在 CA 上（见图 1-5）．由 $|CP|=x$，$|CQ|=2x$，得 $y=x^2$.

当 $10\leqslant x\leqslant 15$ 时，点 P 在 CB 上，点 Q 在 AB 上（见图 1-6）．则 $|CP|=x$，$|AQ|=2x-20$.

设点 Q 到 BC 的距离为 h，则 $\dfrac{h}{20}=\dfrac{|BQ|}{25}=\dfrac{45-2x}{25}$，得 $h=\dfrac{4}{5}(45-2x)$，因此

$$y=\frac{1}{2}xh=\frac{2}{5}x(45-2x)=-\frac{4}{5}x^2+18x.$$

当 $15<x<20$ 时，P 和 Q 都在斜边 AB 上（见图 1-7）．则 $|BP|=x-15$，$|AQ|=2x-20$，$|PQ|=60-3x$. 设点 C 到 AB 的距离为 t，则 $t=\dfrac{15\times 20}{25}=12$，得

$$y=\frac{1}{2}|PQ|\cdot t=-18x+360.$$

故

$$y=\begin{cases}x^2, & 0<x<10,\\ -\dfrac{4}{5}x^2+18x, & 10\leqslant x\leqslant 15,\\ -18x+360, & 15<x<20.\end{cases}$$

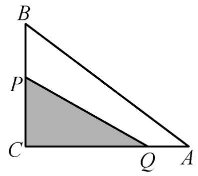


图 1-5

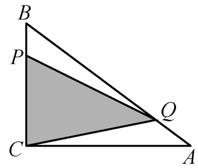


图 1-6

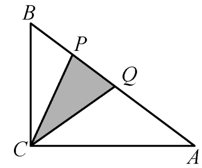


图 1-7

18. 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据以及指数模型来推测 2020 年的世界人口.

年份	人口数/百万	年增长率/%
2008	6 708.2	1.016 6
2009	6 786.4	1.014 0
2010	6 863.8	1.012 1
2011	6 940.7	1.010 7
2012	7 017.5	1.010 7
2013	7 095.2	

解 根据表中第 3 列数据，猜想 2008 年后任一年的世界人口是前一年人口的 1.011 倍.则在 2008 年后的第 t 年，世界人口数将为 $P(t)=6\,708.2\cdot(1.011)^{t}$（百万人）.

2020 年对应 $t=12$，则 $P(12)=6\,708.2\cdot(1.011)^{12}\approx 7\,649.3$（百万人）$\approx 76$（亿人），故推测 2020 年的世界人口约为 76 亿人.

习题 1-2　解答　数列的极限

1. 下列各题中，哪些数列收敛，哪些数列发散？对收敛数列，通过观察数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$；　(2) $\left\{(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$；

(3) $\left\{2+\dfrac{1}{n^2}\right\}$；　(4) $\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$；

(5) $\{n(-1)^n\}$；　(6) $\left\{\dfrac{2^n-1}{3^n}\right\}$；

(7) $\left\{n-\dfrac{1}{n}\right\}$；　(8) $\left\{[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}\right\}$.

解 (1) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$；

(2) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$；

(3) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)=2$；

(4) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=1$；

（5）发散；

（6）收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{3^n}=0$；

（7）发散；

（8）发散．

2.（1）数列的有界性是数列收敛的什么条件？

（2）无界数列是否一定发散？

（3）有界数列是否一定收敛？

解　（1）必要条件；（2）一定发散；

（3）未必一定收敛，例如，数列 $\{(-1)^n\}$ 有界，但它是发散的．

3. 下列关于数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a 的定义，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例．

（1）对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $x_n-a<\varepsilon$ 成立；

（2）对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 x_n，使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立；

（3）对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<c\varepsilon$ 成立，其中 c 为某个正常数；

（4）对于任意给定的 $m\in\mathbf{N}_+$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\dfrac{1}{m}$ 成立.

解　（1）错误．例如数列 $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$，$a=1$. 对任给的 $\varepsilon>0$（设 $\varepsilon<1$），存在 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$(-1)^n+\dfrac{1}{n}-1\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，但是 $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$ 的极限不存在．

（2）错误．例如数列 $x_n=\begin{cases}n, & n=2k-1,\\ 1-\dfrac{1}{n}, & n=2k,\end{cases}$ $k\in\mathbf{N}_+$，$a=1$. 对任给的 $\varepsilon>0$（设 $\varepsilon<1$），存在 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 且 n 为偶数时，$|x_n-a|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立，但是 $\{x_n\}$ 的极限不存在．

（3）正确．对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\dfrac{1}{c}\varepsilon>0$，则按假设存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<c\cdot\dfrac{1}{c}\varepsilon<\varepsilon$ 成立．

（4）正确．对任给的 $\varepsilon>0$，取 $m\in\mathbf{N}_+$，使得 $\dfrac{1}{m}<\varepsilon$. 则按假设存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\dfrac{1}{m}<\varepsilon$ 成立．

4—8. 此处解析请扫二维码查看．

4—8 二维码