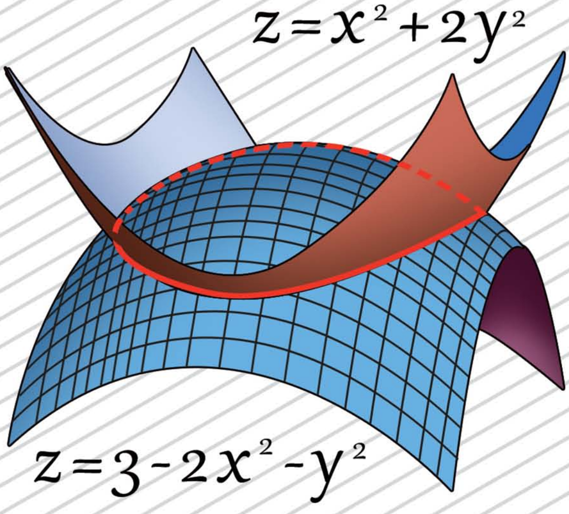

高等数学学习指导

◎ 主编 伊晓玲

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学学习指导

主　编　伊晓玲
副主编　张金柱　马继丰　黄小平
主　审　乔宝明

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

高等数学是理工类、经济类、管理类专业学生的一门必修课，也是非常重要的一门基础理论课。本书针对应用型本科院校而编写，为满足应用型本科学生系统学习的需要，本书强化了实用性、科学性、针对性，实现了知识结构的整体优化。全书内容分为11章，每一章包含四个模块：知识梳理、每节精选、总习题、同步测试。四个模块精练地总结了教材各章节的重点、难点问题，并对所有习题加以详细解析，能帮助学生更快、更好地掌握教材中的知识，同时增加了一些习题以供学生巩固所学的知识。

本书内容全面、体系合理、逻辑性强、结构紧凑、文字简洁，可作为理工类、经济类、管理类专业的学生学习高等数学的辅导用书，也可作为硕士研究生入学考试的复习用书及教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导／伊晓玲主编．— 北京：北京理工大学出版社，2021.8

ISBN 978－7－5763－0221－9

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①伊…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2021）第173573号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京国马印刷厂
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／12.5
字　　数／294千字
版　　次／2021年8月第1版　2021年8月第1次印刷
定　　价／38.00元

责任编辑／江　立
文案编辑／李　硕
责任校对／刘亚男
责任印制／李志强

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前 言 PREFACE

应用型本科教育的发展是高等教育进入大众化阶段的必然趋势，它已成为我国高等教育的重要组成部分。在人才培养上，它有着本科教育的共性，但又有别于研究型本科院校。因此，在应用型本科教学与教材（教辅）的编写过程中，必须坚持教学内容和结构符合专业培养方向的需求，既要适应现实，又要满足未来专业和学科发展的需求，使学生的知识层次与科学技术发展水平趋于同步。

高等数学作为应用型本科院校各类专业的基础课程，担负着为专业课提供必需的基础分析工具的使命，它在学生的本科学习中有着举足轻重的作用。要想学好“高等数学”这门课，在深刻领会教材内容和教师的课堂教学内容的基础上，还要辅以一定量的习题训练。而高等数学教材的配套习题一般只给出答案，并未给出具体的解答过程，造成很多同学对解题过程存在疑惑性。为了帮助学生更好地学习这门课程，编者编写了本书，以便开阔学生的学习视野，加深学生对教学内容的理解，解答学生在做题过程中产生的疑惑。

根据高等院校理工类、经管类学生特点，编者对全书的内容进行了严格的选择和合理的安排：将所要掌握的内容详细地罗列出来，可使学生全面、直观地理清全章的结构；对各章节的习题进行了精选，让学生能抓住重点、难点去学习，使学生在掌握理论知识的同时，做题有思路；将各章节的习题进行了详细解析，以解决学生在解答习题过程中遇到的各种问题；将教材中缺少的题型进行了补充及对各章节所学内容进行有效的检测，以供学生全面了解各种题型及巩固所学知识；对于学习能力较强的同学，每一章都节选了一些历年考研真题，可使学生开阔视野，活跃思路。

本书由伊晓玲（西安科技大学高新学院）担任主编，张金柱（西安科技大学高新学院）、马继丰（西安科技大学）、黄小平（西安科技大学高新学院）担任副主编。具体编写分工如下，第 1 ~4 章由伊晓玲编写，第 5 章由马继丰编写，第 6 章、第 8 章、第 10 章、第 11 章由张金柱编写，第 7 章、第 9 章由黄小平编写，全书最后由乔宝明教授（西安科技大学）统稿。

本书在编写过程中得到了西安科技大学高新学院的王丹老师和杨雯、窦珂同学的大力支持与帮助，在此表示深深的谢意。

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2021 年 3 月

目　录 CONTENTS

第 1 章　函数、极限与连续

一、知识梳理

- 函数、极限与连续
  - 函数的概念与性质
    - 区间常量与连续
    - 函数的概念
    - 函数的简单性质
    - 反函数和复合函数
    - 初等函数
  - 数列的极限
    - 数列极限的定义
    - 数列极限的存在准则
    - 数列极限的四则运算法则
  - 函数的极限
    - 自变量趋近于无穷大时函数的极限
    - 自变量趋近于有限值时函数的极限
    - 函数极限的四则运算法则
    - 极限存在准则及两个重要极限
  - 无穷小量与无穷大量
    - 无穷小量的概念
    - 无穷小量阶的比较
    - 无穷大量的概念
    - 无穷大量和无穷小量的关系
  - 函数的连续性
    - 变量的改变量
    - 连续函数的概念
    - 函数的间断点
    - 初等函数的连续性
    - 闭区间上连续函数的性质

二、每节精选

习题 1－1　函数的概念与性质

1. 用花括号记法表示下列集合.

（1）所有奇数的集合；

（2）平面上满足不等式 $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 8$ 的点集.

2. 设 $A = \{x \mid 1 < x < 2\}$，$B = \{x \mid -8 < x < 1.5\}$，求 $A \cup B$，$A \cap B$.

3. 分别用邻域及集合的记号，表示点3的δ－邻域及去心的δ－邻域$\left(\delta=\dfrac{1}{3}\right)$.

4. 求下列函数的定义域并用区间记号表示.

（1）$y=\sqrt{x^2-2x-3}$；　　（2）$y=\sqrt[3]{x}+\dfrac{x}{x^2-2x-3}$；

（3）$y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{x-2}{3}$；　　（4）$y=\dfrac{x-6}{\lg x}+\sqrt{25-x^2}$；

（5）$y=\lg\dfrac{x}{x-2}+\sqrt{9-x^2}$；　　（6）$y=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & |x|\leqslant 2\\ 2x+5, & 2<|x|\leqslant 5\end{cases}$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求函数$f(x+3)$的定义域.

6. 下列各组函数是否相同？为什么？

（1）$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$与$y=x+2$；　　（2）$y=\ln\dfrac{1+x}{1+x^2}$与$y=\ln(1+x)-\ln(1+x^2)$；

（3）$y=\sqrt{x^2}$与$y=(\sqrt{x})^2$；　　（4）$y=\cos(\arccos x)$与$y=\arccos(\cos x)$.

7. 下列各函数中，哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是既非奇又非偶的函数？

（1）$y=\dfrac{\sin x}{x}$；　　（2）$y=x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$；

（3）$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　（4）$y=xf(x^2)$；

（5）$y=x(x-1)$；　　（6）$y=x\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$.

8. 求下列函数的反函数，找出它们的定义域和值域.

（1）$y=2+\lg(x+1)$；　　（2）$y=3+\sqrt{x}$；　　（3）$y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

9. 设$f(10^x)=x$，求$f(2)$.

10. 设$f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求$f(g(x))$.

11. 设$f(x)=x^2-1$，$\varphi(x)=\arcsin x$，求$f(\varphi(x))$，$\varphi(f(x))$，并求它们的定义域.

12. 下列函数中，哪些是初等函数？哪些不是初等函数？

（1）$y=\dfrac{e^x}{x+1}$；　　（2）$y=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$；

（3）$y=\ln\left(\arctan\dfrac{e^x-1}{x^2+x+1}+\sqrt{x-1}\right)$；（4）$y=[x]$.

13. 若$f(x)$对其定义域上的一切点，恒有$f(x)=f(2a-x)$，则称$f(x)$对称于$x=a$.
证明：若$f(x)$对称于$x=a$及$x=b(a<b)$，则$f(x)$是以$T=2(b-a)$为周期的周期函数.

14. 证明：

（1）函数$y=\dfrac{x}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$上是有界的；

（2）函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的.

习题 1－2　数列的极限

1. 通过观察，下列数列哪些收敛？哪些发散？并求收敛数列的极限.

（1）$\{(-1)^n+(-1)^{n+3}\}$；　　（2）$\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$；

（3）$\left\{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1\right\}$；　　（4）$\{2^n\}$；

（5）$\left\{\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n\right\}$（$a>0$ 为常数）.

2. 设数列的通项 $x_n=0.\underbrace{99\cdots9}_{n个}$，求：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（2）对于 $\varepsilon=0.001$，找出正整数 N，使当 $n>N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于 ε.

3. 用 $\varepsilon-N$ 语言，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$.

4. 设 $x_n=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n+2}, & n\text{ 为奇数}\\ 1-\dfrac{1}{n+1}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$，问当 $n\to\infty$ 时，x_n 的极限是否存在？若存在，则写出此极限.

5.（1）数列的有界性是数列收敛的什么条件？

（2）无界数列是否一定收敛？

（3）有界数列是否一定收敛？

习题 1－3　函数的极限

1. 设 $f(x)=\begin{cases}3, & x\leqslant 9\\ \sqrt{x}, & x>9\end{cases}$，问 $\lim\limits_{x\to 9}f(x)$ 是否存在？

2. 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$，求 $f(0^-)$ 和 $f(0^+)$，问 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$ 存在吗？

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$，求 $f(2^-)$ 和 $f(2^+)$，问 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 存在吗？并作 $f(x)$ 的图像.

4. 利用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2(x-3)}=3$，若给定 $\varepsilon=0.0001$，问取 δ 为多少才能使 $\left|\dfrac{x^2-9}{2(x-3)}-3\right|<0.0001$.

5. 利用极限定义证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|l|$.

6. 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$. 问 X 为多少，才能使当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$？

习题 1-4　无穷小量与无穷大量

1. 判断题.

（1）非常小的数是无穷小量（　　）；

（2）零是无穷小量（　　）；

（3）无穷小量是一个函数（　　）；

（4）两个无穷小量的商是无穷小量（　　）；

（5）两个无穷大量的和一定是无穷大量（　　）.

2. 判断下列函数在自变量变化过程中，是否为无穷小量？是否为无穷大量？

（1）$\sin\dfrac{1}{x}$（当 $x\to\infty$ 时）；　　（2）$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$（当 $x\to 0$ 时）；

（3）$\dfrac{(-1)^n}{2^n}$（当 $n\to\infty$ 时）；　　（4）$x\sin\dfrac{1}{x}$（当 $x\to\infty$ 时）；

（5）$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$（当 $n\to\infty$ 时）；　　（6）$\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$（当 $x\to -1$ 时）.

3. 利用无穷小量的运算性质求极限（要说明理由）.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{x}\tan x+x\sin x)$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n^2+1}{n+1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)\cos(x-2)$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\arctan x$.

4. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大量？为什么？

习题 1-5　函数极限的四则运算法则

1. 下列极限的运算是否正确？若不正确，则说明理由，并写出正确的解法及结果.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=0$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)}=\infty$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0+0+\cdots+0=0$.

2. 求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2+2}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+5x^2+3x+1}{x^2+x-1}$; (3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+4}{x^2+1}-\dfrac{3x^2+1}{x^3+1}\right)$.

3. 求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$; (2) $\lim\limits_{x\to\beta}\left(\dfrac{1}{x-\beta}-\dfrac{2\beta}{x^2-\beta^2}\right)(\beta\neq 0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(3n+2)}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^n)(|q|<1)$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}}$; (8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^2-1}(n>2)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{2}{1+x}, & x<0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

5. 求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

6. 求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

习题 1－6　极限存在准则及两个重要极限

1. 求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\tan\alpha x\cot\beta x(\alpha\neq 0,\beta\neq 0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x}$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{n-1}\sin\dfrac{x}{2^n}(x\neq 0)$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\csc x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$; (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1+x)-\sin(1-x)}{x}$.

2. 利用夹逼准则计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

3. 利用极限存在准则证明：数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$ 的极限存在.

习题 1 -7　无穷小量阶的比较

1. 比较下列各对无穷小量的阶.

(1) 当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 与 x^2;　　(2) 当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x$ 与 x^2;

(3) 当 $x\to\infty$ 时，$\tan\dfrac{2}{x}$ 与 $\dfrac{1}{x}$;　　(4) 当 $x\to 1$ 时，$2\sin(x-1)$ 与 x^2-1.

2. 试证：当 $x\to 0$ 时，下列各对无穷小量是等价无穷小量.

(1) $\arctan x$ 与 x;　　(2) $\ln(1+x)$ 与 x.

3. 利用等价无穷小量的性质，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 7x}{\arcsin 5x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x\sin x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec x-1}{\tan^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

习题 1 -8　函数的连续性

1. 找出下列函数的间断点，试说明间断点类型.

(1) $y=\dfrac{x+2}{x^2+5x+6}$;　　(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=e^{\frac{1}{x}}$;　　(4) $y=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$;

(5) $y=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & -1<x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$;　　(6) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$.

2. 确定常数 a,k，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin kx}{x}, & x<0\\ a, & x=0\\ (1-x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

3. 研究 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右连续性.

习题 1－9　初等函数的连续性

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(1+x)+\sin x^2}{e^{\cos x}+1}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{\sin 2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3\sin x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\arcsin 4x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2}{e^{x^2}-1}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+2x)^2}{3x^2+1}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{5-3x}}{x-1}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\csc^2 x+3}{\csc^2 x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0\\ 3x^2-2x+k, & x\geqslant 0\end{cases}$，问 k 为何值时，函数在其定义域内连续？为什么？

习题 1－10　闭区间上连续函数的性质

1. 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$, $f(b)>b$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

3. 证明方程 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$ 有分别在 $(1,2)$,$(2,3)$ 内的两个实根.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

三、总习题

1. 选择题.

(1) 下列变量在给定变化过程中是无穷小量的有（　　）；

A. $2^{-x}-1(x\to\infty)$　　B. $\frac{\sin x}{x}(x\to 0)$

C. $\frac{x^2}{\sqrt{x^3-2x+1}}(x\to+\infty)$　　D. $\frac{x^2}{x+1}\left(3-\sin\frac{1}{x}\right)(x\to 0)$

(2) 下列极限不正确的是（　　）；

A. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$

C. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$

(3) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有（　　）；

A. $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量　　B. $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小量

C. $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量　　D. $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小量

(4) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=k$，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处无定义，则点 $x=a$ 是 $f(x)$ 的（　　）；

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 连续点　　D. 无穷间断点

(5) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $f(x)$ 在 (a,b) 上（　　）.

A. 必有最值　　B. 无界

C. 必有界　　D. 存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$

2. 求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\ln(1+9x^2)}{1-\cos 3x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin 2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+10}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{|x|}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\cot x}\right)^{\tan x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{e^{2x}-1}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x-1}}$；

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$.

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{1/x}+1}, & x<0\\ 1, & x=0\\ 2+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性，若不连续，指出间断点类型.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 1\\ a\cos \pi x, & x<1\end{cases}$，问常数 a 为何值时，$f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$内连续.

5. 若 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，求 k 的值.

6. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b 的值.

7. 设 $P(x)$是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)-x^3}{x^2}=2$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x)}{x}=1$，求 $P(x)$.

8. 试证方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个小于 3 的正根.

9. 若 $f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 (x_1,x_n)内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

四、同步测试

（一）填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 函数 $f(x)=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}+\arccos\dfrac{2x}{1+x}$ 的定义域是________________.

2. $f(x)=(x-2)(8-x)$，则 $f(f(3))=$________________.

3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x-3}$ 的连续区间是________________，间断点是________________.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=$________________，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$________________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ a-2, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________________.

（二）选择题（每题4分，共20分）.

1. $f(x)$在$x=x_0$处有定义是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的（　　）.

A. 充分条件但非必要条件　　B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 无关条件

2. $f(x)$在$x=x_0$处有定义是$f(x)$在$x=x_0$处连续的（　　）.

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 充要条件　　D. 无关条件

3. 当$x\to 0$时，与无穷小量$x+1\,000x^3$等价的无穷小量是（　　）.

A. $\sqrt[3]{x}$　　B. $\sqrt{x}$　　C. x　　D. x^3

4. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在(a,b)内（　　）.

A. 必有最值　　B. 无界

C. 必有界　　D. 存在一点ξ，使$f(\xi)=0$

5. 设$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$，则$x=0$是$f(x)$的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

（三）计算题（每题5分，共20分）.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{(e^{2x}-1)\tan 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\cos^2x+1}{(x+\sin x)^2}$.

（四）综合题（每题8分，共24分）.

1. 试问a为何值时，函数$f(x)=\begin{cases} -2e^{x-1}, & x\leqslant 1 \\ \dfrac{a^2-x^2}{x-1}, & x>1 \end{cases}$在点$x=1$处连续.

2. 若$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=b$，求常数$a,b$的值.

3. 设数列$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)$，$x_0>0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（五）证明题（每题 8 分，共 16 分）．

1. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根．

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒为正，证明：对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)(x_1<x_2)$，必存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$．

五、能力提升（考研真题）

1. 设对任意的 x，总有 $\phi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\phi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（　　）．（00 数三）

A. 存在且等于零　　B. 存在但不一定等于零

C. 一定不存在　　D. 不一定存在

2. 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$（　　）．（03 数三）

A. 在 $x=0$ 处左极限不存在　　B. 有跳跃间断点 $x=0$

C. 在 $x=0$ 处右极限不存在　　D. 有可去间断点 $x=0$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin x(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间上有界（　　）．（04 数三、数四）

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则（　　）．（04 数三、数四）

A. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点　　B. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

C. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点　　D. $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与 a 取值有关

5. 当 $x\to0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　　）．（07 数三、数四）

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+\sqrt{x})$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

6. 设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}$ 的值为（　　）．（08 数四）

A. a　　B. a^{-1}　　C. b　　D. b^{-1}

7. 当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 为等价无穷小量，则（　　）．（09 数一、数三）

A. $a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$　　B. $a=1$，$b=\dfrac{1}{6}$

C. $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{6}$　　D. $a=-1$，$b=\dfrac{1}{6}$