



# 博弈论与供应链管理

◎ 主编 李志国    ◎ 副主编 李慧杰 蒋莉

GAME THEORY AND SUPPLY CHAIN MANAGEMENT



重庆大学出版社



# 博弈论与供应链管理

◎ 主编 李志国    ◎ 副主编 李慧杰 蒋莉

GAME THEORY AND SUPPLY CHAIN MANAGEMENT

重庆大学出版社

## 内容提要

《博弈论与供应链管理》从内容上主要分为两大部分,第1章至第4章介绍了博弈论的基础理论和方法,第5章介绍了博弈论在解决供应链中相关经济管理问题的应用。本书涵盖了博弈论基础理论的主要内容,也对涉及论题给出了详细的数学推导和证明过程,既能满足一般读者了解博弈论基础内容的需要,也能帮助有一定理论基础的读者把握博弈论的思想和精髓。因此,本书既可以作为经济学研究生和高年级本科生了解、学习博弈论相关基础理论的入门教材,也可以作为拟在应用经济领域建立或使用博弈论模型的学者的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

博弈论与供应链管理 / 李志国主编. --重庆:重庆大学出版社,2021.8

ISBN 978-7-5689-2933-2

I. ①博… II. ①李… III. ①供应链管理—研究  
IV. ①F252.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 167193 号

## 博弈论与供应链管理

BOYILUN YU GONGYINGLIAN GUANLI

主 编 李志国

副主编 李慧杰 蒋 莉

责任编辑:尚东亮 龙沛瑶 版式设计:龙沛瑶

责任校对:刘志刚 责任印制:张 策

\*

重庆大学出版社出版发行

出版人:饶帮华

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址: <http://www.cqup.com.cn>

邮箱: [fxk@cqup.com.cn](mailto:fxk@cqup.com.cn) (营销中心)

全国新华书店经销

重庆市国丰印务有限责任公司印刷

\*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:10.5 字数:208 千

2021 年 8 月第 1 版 2021 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5689-2933-2 定价:45.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究

# 前言

自 1994 年普林斯顿大学博弈论大师约翰·纳什被授予诺贝尔经济学奖以来,至少有 8 届诺贝尔经济学奖与博弈论的研究有关,可见,博弈论深刻改变着经济学的研究范式。尽管博弈论的定义众说纷纭,但经过多年的发展,针对博弈论的经典案例、核心概念、规范表述等方面的理论体系已经形成,并且被广泛应用于运营管理、营销管理、供应链管理、机制设计等对策研究中。

这是一本适合管理类新文科高年级本科生和研究生学习的教材,是在近年来研究生讨论班讲义和对以 UTD 期刊为主的高水平文献复盘的基础上编写而成的。这本书有三个显著的特点:一是对学生起点的要求不高,具有高等数学基础知识的高年级本科生和管理类研究生就能够入门;二是强调从高水平论文中学习,能够为高年级本科生参与科研以及研究生进行科研训练、论文写作提供指导;三是与供应链管理高度结合,选择的高水平文献主要集中在供应链管理领域。本书的目的不是详细介绍博弈论的知识框架,而是打破博弈论的神秘感,培养学生利用理论来分析和设计与供应链管理相关的问题、对策的能力。需要特别指出的是,对这些高水平论文的复盘并非简单地“翻译”,而是选择对其中的供应链博弈模型进行讲解并进行验算,从而启发读者利用博弈论建模。

近年来笔者在赵骅教授(重庆工商大学副校长,重庆大学经济与工商管理学院博导)和赵瑞清教授、高金武教授的感召和引导下,一直探索在高年级本科生中开展学术训练接续研究生的培养模式。没有他们的指导和支持笔者很难下决心编写一本博弈论的教材,特别是赵瑞清教授和高金武教授亲自指导我们阅读和复盘了不少 UTD 期刊的高水平论文,在此表示由衷的感谢。

笔者本人严格来讲也算“新手”，而每一年都有新的本科生、硕士研究生和博士研究生加入，编写此书原本是为了提升我们研究生讨论班的学习效率，加上不少章节和文献复盘都出自学生之手，因此笔者认为这本书是非常适合新手学习使用的。向参与本书编写的全体研究生表示感谢，即博士研究生张晗，硕士研究生李慧杰、蒋莉、张兆琪、谢法琪、邓钰爽等。其中，本书由重庆工商大学管理科学与工程学院李志国副教授作为主编，负责总体策划及结构设计，并编写了前言、第1章、第2章、第5章的内容；重庆工商大学工商管理学院蒋莉作为本书副主编，编写了本书第3章的内容；重庆工商大学工商管理学院李慧杰作为本书副主编，编写了本书第4章的内容。其余人员参与了本书的编写、制图工作，具体分工如下：张兆琪参与第1章；谢法琪参与第2章；张晗、邓钰爽参与第5章。

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正。

李志国

2021年3月

# 目录

1	完全信息静态博弈	1
1.1	基础理论	1
1.2	完全信息静态博弈的经典模型	4
1.3	内容补充	7
2	完全信息动态博弈	11
2.1	完全且完美信息动态博弈基础理论	11
2.2	完全非完美信息博弈基础理论	17
3	非完全信息静态博弈	22
3.1	非完全信息静态博弈基础理论	22
3.2	非完全信息静态博弈的基本应用	26
4	非完全信息动态博弈	33
4.1	精炼贝叶斯均衡概述	34
4.2	信号博弈的精炼贝叶斯均衡	37
4.3	斯宾塞劳动力市场信号模型	41
4.4	精炼贝叶斯均衡的再精炼	48
5	博弈论在供应链研究中的应用	54
5.1	利用预售解决报童模型中的不确定性	54
5.2	供应链中企业研发合作行为的研究	57
5.3	在消费者估值不确定下的 P2P 市场和零售	63
5.4	供应商入侵下的投资溢出效应研究	66

5.5	零售平台下制造商的渠道选择及合同设计	70
5.6	供应商入侵时的零售商信息共享行为研究	75
5.7	非竞争性供应商不可靠时的双渠道采购分析	79
5.8	竞合供应链中的技术规范与生产时序研究	86
5.9	信号博弈在两期模型中的应用	91
5.10	折扣预售模型	101
5.11	研究供应商入侵行为带来的益处	103
5.12	信号博弈的经典模型	106
5.13	非对称信息下的供应商入侵行为研究	118
5.14	供需不确定下的预售模型	131
5.15	两期模型下分析策略型消费者的行为	134
5.16	利用博弈模型研究电力间歇性对投资的影响	141
5.17	分销渠道中的需求预测信息共享模式	145
	<b>参考文献</b>	<b>156</b>

# 1 完全信息静态博弈

本章将对完全信息静态博弈 (Static Games of Complete Information) 及其相关内容进行介绍。完全信息静态博弈简而言之就是参与博弈的局中人同时行动且局中人的收益函数为共同知识的一种博弈类型。在 1.1 节中详细介绍了完全信息静态博弈的相关理论,包括:完全信息静态博弈的定义、完全信息静态博弈的描述方式及完全信息静态博弈均衡解的定义。在 1.2 节中分析了完全信息静态博弈的两个经典应用模型:古诺 (Cournot) 双头垄断模型和贝特兰德 (Bertrand) 双头垄断模型,并在每个经典模型中详细说明了如何对博弈进行标准式描述,并给出求解此类博弈均衡解的方法与过程。在 1.3 节中对完全信息静态博弈的相关内容进行补充,介绍了重复剔除严格劣策略和混合策略。

## 1.1 基础理论

### 1.1.1 完全信息静态博弈定义及规范表示

根据吉本斯给出的完全信息静态博弈的定义,本书总结了完全信息静态博弈需要具备的条件以及其博弈的规范描述方式。

**定义** 完全信息静态博弈中,“完全信息”指每个局中人的可行策略集和收益集都是所有局中人的共同知识,“静态”指每个局中人在选择自己的策略时不知道其他局中人选择的策略,也就是同时行动。因此,完全信息静态博弈需要具备以下条件:

- (1) 至少有两个局中人;
- (2) 所有局中人都知道自己和其他人的行动集合、收益函数集合以及行动如何影响结果;

(3) 所有局中人都是理性的且都知道自己和其他局中人对结果的偏好。

其中,关于“共同知识”的详细介绍及正式定义可以参考奥曼和布兰登布格爾的文章,而对“局中人策略”的定义如下。

**定义** 局中人的一个策略是关于行动的一个完整计划,它明确了局中人在可能会遇到的每一种情况下对可行行动的选择。

一个博弈通常有三种规范的表示方法,即:标准式、矩阵式和扩展式。下文将对三种表述方式进行简单介绍,并分别用三种表述方式对一个完全信息静态博弈进行表述。

### 标准式

博弈的标准式表述应包括三个要素:(1) 博弈的局中人;(2) 每一个局中人可供选择的策略集;(3) 针对所有局中人可能选择的策略组合,每一个局中人获得的收益。即在一个  $n$  人博弈的标准式表述中,各局中人的策略空间为  $\{S_1, \dots, S_n\}$ , 收益函数为  $\{u_1, \dots, u_n\}$ , 用  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$  来表示此博弈。

### 矩阵式

矩阵式表述比较抽象,为了便于理解,以博弈论中的经典案例——囚徒困境 (Prisoner's Dilemma) 为例。囚徒困境假设了两个被捕且受到指控的犯罪嫌疑人,除非其中一人招认犯罪,否则警方并无充足证据将其按罪判刑。警方将两名犯罪嫌疑人关入不同的审讯室,并对他们说明不同行动所带来的后果:若两人都不坦白,将均被判入狱 1 个月;若两人都坦白,将均被判入狱 6 个月;若一人坦白一人拒不坦白,坦白一方会被立即释放,另一人则被判入狱 9 个月。其矩阵式表述如图 1.1.1 所示。

		囚徒1	
		沉默	坦白
囚徒2	沉默	-1, -1	-9, 0
	坦白	0, -9	-6, -6

图 1.1.1 “囚徒困境”的矩阵式表述

如同矩阵一样,行和列分别代表两个局中人及其策略,矩阵表可由任意多的行和列组成,每一行(列)分别代表对应局中人的策略。其中每个单元格中有两个数字,分别代表两个局中人选择相应策略下的收益,因此也称为“双变量矩阵表”。一般地,横行代表的局中人(此例中的囚徒 2)的收益位于两个数字的前面,纵列代表的局中人(此例中的囚徒 1)的收益置于其后。例如:假设一个两人博弈由局中人 1 和局中人 2 组成,其中每个局中人有有限数量的策略,假设局中人 1 的策略集为:  $S_1 = \{S_{11}, S_{12}, S_{13}\}$ , 假设局中人 2 的策略集为:  $S_2 = \{S_{21}, S_{22}\}$ , 两个局中人同时从其策略集中选择策略,此博弈的矩阵式表述如图 1.1.2 所示。

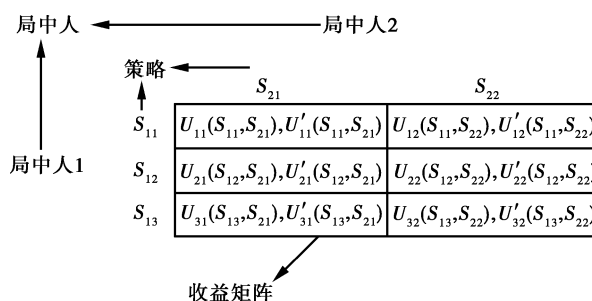


图 1.1.2 博弈的矩阵式表述

### 扩展式

关于扩展式的定义及表述方式将在第 2 章中进行详细介绍。

#### 1.1.2 纳什均衡的定义

完全信息静态博弈的均衡结果被称为纳什均衡。以收益最大化为目标的局中人所选择的策略是对其他局中人所选最优策略的最优反应,此时所有局中人的收益都是最优的,因此没有局中人会偏离这个最优结果,形成一种“战略稳定”或“自动实施”的状态,此种状态被称为“纳什均衡”,它是所有局中人最优策略所组成的一个稳定的策略集合。

**定义** 在  $n$  个局中人的标准式博弈  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$  中,如果策略组合  $\{S_1^*, \dots, S_n^*\}$  满足对每一个局中人  $i, S_i^*$  是他针对其他  $n-1$  个局中人所选策略  $\{S_1^*, \dots, S_{i-1}^*, S_{i+1}^*, \dots, S_n^*\}$  的最优反应策略,策略组合  $\{S_1^*, \dots, S_n^*\}$  所组成的策略集就是该博弈的一个纳什均衡。简而言之,纳什均衡是一个策略组合,处于均衡状态的每个局中人所选择的策略都是针对其他局中人选择策略的最优反应,即:

$$u_i(S_1^*, \dots, S_{i-1}^*, S_i^*, S_{i+1}^*, \dots, S_n^*) \geq u_i(S_1^*, \dots, S_{i-1}^*, S_i, S_{i+1}^*, \dots, S_n^*). \quad (1.1.1)$$

其中,不等式(1.1.1)对所有  $S_i$  中的  $s_i$  都是成立的,可以理解为  $s_i^*$  是以下最优化问题的解:

$$\max_{s_i \in S_i} u_i \{S_1^*, \dots, S_{i-1}^*, S_i, S_{i+1}^*, \dots, S_n^*\}. \quad (1.1.2)$$

寻找完全信息静态博弈均衡结果最直接的方法就是检验每一个策略组合是否符合不等式(1.1.1)的条件。例如在一个由两个局中人( $i, j$ )组成的博弈中,对局中人的每一个可选策略,确定局中人  $j$  相应的最优策略的方法,就是对比这个策略组合是否满足不等式(1.1.1)的条件,若满足,则这个策略组合就是此博弈的纳什均衡。

囚徒困境中,由于局中人都是理性的、追求收益最大化的,因此两个局中人均不想入狱。沿用 Brandenburger 的方法,首先考虑囚徒 1 的选择,他面对的问题是:如果囚徒 2 坦

白的话,自己坦白判6个月,沉默判9个月,那么当囚徒2选择坦白时,自己选择坦白比选择沉默好;如果囚徒2沉默,自己坦白会被立即释放,沉默则判1个月,当囚徒2沉默时,囚徒1选择坦白仍比沉默好。对囚徒2的分析亦如此。因此,不论对方如何选择,囚徒1或囚徒2的最优选择都是坦白,此时结果{坦白,坦白}呈“战略稳定”或“自动选择”状态,那么策略组合{坦白,坦白}就是该博弈的纳什均衡。

## 1.2 完全信息静态博弈的经典模型

### 1.2.1 古诺双头垄断模型

古诺(Cournot)模型又称为古诺双头垄断模型,是两个寡头企业进行产量竞争的简单模型,此模型由古诺在19世纪30年代提出。古诺模型已成为博弈论的经典模型之一,是产业组织理论的重要里程碑。在此以古诺模型的一种最简单的情况为例,说明博弈的标准式表述方式以及寻求均衡解的过程,在后面的章节中将会涉及这一模型的不同变形。

例1.2.1 在古诺模型中,假设市场上共有企业1、企业2两个局中人,每个企业可以选择的策略是其产品产量,即两个企业进行产量竞争。用 $q_i \geq 0 (i=1,2)$ 分别表示两个企业生产的产品产量,如此,易知市场中该产品的总供给为: $Q=q_1+q_2$ 。令 $P(Q)=a-Q$ ,其中, $P$ 表示两个企业的市场出清价格,为使其非负,则 $Q < a$ , $a$ 表示市场潜力或市场总需求, $Q$ 表示两个企业的总供给。假设企业不存在固定成本,且生产每单位产品的边际成本为常数 $c (c < a)$ ,因此企业 $i$ 生产 $q_i$ 数量的产品总成本可以表示为 $C_i(q_i) = cq_i$ ,除此之外,假定企业没有其他成本,此时企业的收益就是其净利润额(全部收益减去全部成本)。在完全信息静态博弈中,假定两个企业是同时决策其产量的。

此博弈的标准式表述为:

(1)局中人集合:{企业1,企业2};

(2)策略集: $s_1 = q_1 = [0, +\infty)$ ,  $s_2 = q_2 = [0, +\infty)$ ;

(3)收益函数: $u_1(q_1, q_2) = q_1[a - (q_1 + q_2) - c]$ ,  $u_2(q_1, q_2) = q_2[a - (q_1 + q_2) - c]$ 。

企业 $i$ 的收益 $u_i(s_i, s_j)$ 可以表示为:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(Q) - c] = q_i[a - (q_i + q_j) - c], \quad (1.2.1)$$

如果产出组合 $(q_1^*, q_2^*)$ 为纳什均衡,则对企业 $i$ 来说,其最优策略 $q_i^*$ 应为如下最大化问题的解:

$$\max_{0 \leq q_i \leq \infty} \pi(q_i, q_j^*) = \max_{0 \leq q_i \leq \infty} q_i [a - (q_i + q_j^*) - c]. \quad (1.2.2)$$

为使解有意义,假设  $q_j^* < a - c$ ,则企业  $i$  最优化问题的解为:

$$q_i = \frac{1}{2}(a - q_j^* - c). \quad (1.2.3)$$

如果产量组合  $(q_1^*, q_2^*)$  要成为纳什均衡,企业的产量选择必须满足:

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{1}{2}(a - q_2^* - c), \\ q_2^* = \frac{1}{2}(a - q_1^* - c). \end{cases} \quad (1.2.4)$$

因此,解方程组(1.2.4)可得:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3}, \quad (1.2.5)$$

同时,该均衡解也满足  $q_j^* < a - c$  的假设。

对例 1.2.1 均衡解的直观理解为,每家企业都希望成为市场的垄断者。当企业  $i$  为市场垄断者时,它会选择  $q_i$  使自己的利润  $\pi_i(q_i, 0)$  最大化,则其产量为垄断产量  $q_m = \frac{a - c}{2}$ ,可赚取垄断利润  $\frac{(a - c)^2}{4}$ 。然而,当市场上有两家企业的时候,要使两家企业总利润最大化,两家企业的产量之和  $q_1 + q_2$  应与垄断产量  $q_m$  相等。此时,垄断产量较低,相应的市场价格  $P(q_m)$  较高,提高产量,两企业的收益均能上升,在两家企业都是以各自收益最大化为目标的情况下,两家企业都有动机偏离这一结果,因为偏离能使各自收益增加。而在例 1.2.1 的古诺模型中,两家企业的总产量高于  $P(q_m)$ ,虽然降低了价格,但是两家企业均达到互为最优的状态,不会出现企业偏离的情况。

除了代数方式求解纳什均衡外,还可以通过图形求解。等式(1.2.3)可推导出针对企业 1 的任意一个策略企业 2 的最优反应,以及针对企业 2 的任意一个策略企业 1 的最优反应。假定企业 1 的策略  $q_1$  满足  $q_1 < a - c$ ,企业 2 对于企业 1 的策略  $q_1$  的最优反应为:

$$R_2(q_1) = \frac{1}{2}(a - q_1 - c), \quad (1.2.6)$$

同理,如果企业 2 的策略  $q_2$  满足  $q_2 < a - c$ ,企业 1 对于企业 2 的策略  $q_2$  的最优反应为:

$$R_1(q_2) = \frac{1}{2}(a - q_2 - c). \quad (1.2.7)$$

如图 1.2.1 所示,这两个最优反应函数只有一个交点,其交点就是最优产量组合  $(q_1^*, q_2^*)$ 。

## 1.2.2 贝特兰德双头垄断模型

贝特兰德(Bertrand)双头垄断模型是两个寡头企业相互竞争的另一个模型,由贝特

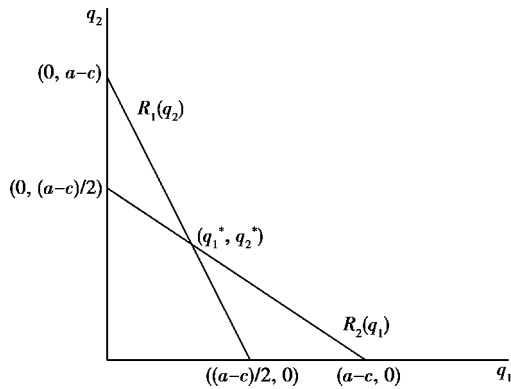


图 1.2.1 纳什均衡图形求解

兰德在 19 世纪 80 年代提出。不同于古诺模型,贝特兰德假设企业在竞争时选择的是产品价格竞争,例 1.2.2 介绍了贝特兰德价格竞争的一种简单情形,以此为例对完全信息静态博弈的标准式表述及求解均衡解的过程进行介绍。

例 1.2.2 在一个贝特兰德模型中,假设有企业 1、企业 2 两个局中人,它们可选择的策略是产品的价格,企业 1 和企业 2 选择价格分别为  $p_1 > 0$  和  $p_2 > 0$ 。与例 1.2.1 两企业的产品完全可替代的假设不同,这里假设两家企业生产的产品是部分可替代的,消费者对企业  $i (i = \{1, 2\})$  的需求可表示为:

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j. \quad (1.2.8)$$

其中,  $q_i$  表示在产品  $i$  的价格为  $p_i$ 、产品  $j$  的价格为  $p_j$  时消费者对产品  $i$  的需求,  $a$  表示市场潜力或市场总需求,  $b > 0$  表示企业  $i$  的产品对企业  $j$  的产品的替代率。假设企业生产无固定成本且边际成本为常数  $c (c < a)$ , 除此之外企业无其他成本,企业的收益函数等于其利润额,两个企业同时进行价格决策。

此博弈的标准式表述为:

- (1) 局中人集合: {企业 1, 企业 2};
- (2) 策略集:  $s_1 = p_1 = [0, +\infty)$ ,  $s_2 = p_2 = [0, +\infty)$ ;
- (3) 收益函数:  $u_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)(a - p_1 + bp_2)$ ,  $u_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)(a - p_2 + bp_1)$ 。

当企业  $i$  选择价格  $p_i$ , 企业  $j$  选择价格  $p_j$  时, 企业  $i$  的利润可表示为:

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)(p_i - c) = (a - p_i + bp_j)(p_i - c), \quad (1.2.9)$$

如果一对产出组合  $(p_1^*, p_2^*)$  为纳什均衡, 则对任意企业  $i$ , 其最优定价策略  $p_i^*$  应为如下最大化问题的解:

$$\max_{0 \leq p_i \leq \infty} \pi(p_i, p_j^*) = \max_{0 \leq p_i \leq \infty} (a - p_i + bp_j^*)(p_i - c), \quad (1.2.10)$$

对企业  $i$  求此最优化问题的解为:

$$p_i^* = \frac{1}{2}(a + bp_j^* + c). \quad (1.2.11)$$

如果产量组合 $(p_1^*, p_2^*)$ 要成为纳什均衡,那么两企业的产量选择必须满足:

$$\begin{cases} p_1^* = \frac{1}{2}(a + bp_2^* + c), \\ p_2^* = \frac{1}{2}(a + bp_1^* + c), \end{cases} \quad (1.2.12)$$

解方程组(1.2.12)可得:

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-b}. \quad (1.2.13)$$

## 1.3 内容补充

在此节中,本书对完全信息静态博弈的相关内容进行补充,介绍了重复剔除严格劣策略和混合策略。

### 1.3.1 重复剔除严格劣策略

重复剔除严格劣策略是除了代数方式求解、图形求解之外的另一种求均衡解的方法。在介绍此方法之前,需对“劣策略”进行定义,根据吉本斯的介绍,其定义如下:

**定义** 在一个标准式博弈 $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ 中,令 $s_i'$ 和 $s_i''$ 代表局中人 $i$ 的两个可行策略。如果对其他局中人每一个可能的策略组合, $i$ 选择 $s_i'$ 的收益都小于其选择 $s_i''$ 的收益,则称策略 $s_i'$ 相对于 $s_i''$ 是严格劣策略,即:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \dots, s_n). \quad (1.3.1)$$

理性的局中人不会选择严格劣策略,因为选择此策略会导致局中人收益减少。理论上,重复剔除严格劣策略就能帮助局中人不断缩小最优策略存在的空间,其过程为:首先找出局中人的劣策略(假定存在的话),把这个劣策略剔除;然后再剔除剩下的新的博弈中的劣策略;最后继续这个过程,直到没有劣策略存在。如果最后剩下的策略组合是唯一的,那么这个唯一的策略组合就是“重复剔除占优均衡”,如果这样的解存在,则称该博弈是“重复剔除占优可解”的。

下面以“智猪博弈”为例,演示重复剔除严格劣策略寻求均衡解的过程,以帮助理解此方法。

**例 1.3.1** 智猪博弈(Boxed Pig Game)也是博弈论中的经典案例。假设猪圈里有一

头大猪、一头小猪。猪圈的一头有猪食槽,另一头安装着控制猪食供应的按钮,按一下按钮会有10个单位的猪食进槽,但是谁按按钮就会先付出2个单位的成本。按钮和猪食槽在相反位置,按按钮的猪要付出2个单位的成本,并且丧失了先到槽边进食的机会。大小猪不同行动带来的后果:若大猪行动、小猪等待,两只猪均获得4个单位的收益;若大猪等待、小猪行动,大猪获得9个单位的收益、小猪获得-1个单位的收益;若大猪小猪同时行动,大猪获得5个单位的收益、小猪获得1个单位的收益;若大猪小猪均等待,收益均为0个单位。智猪博弈的双变量矩阵表如图1.3.1所示。

		小猪	
		行动	等待
大猪	行动	5, 1	4, 4
	等待	9, -1	0, 0

图 1.3.1 “智猪博弈”双变量矩阵表(a)

在这个博弈中,大猪的最优选择依赖于小猪的选择,但小猪的最优选择与大猪的选择无关。如果大猪知道小猪是理性的,大猪将选择“行动”。均衡是“大猪行动,小猪等待”。

剔除小猪劣策略后的双变量矩阵表如图1.3.2所示。

		小猪	
		行动	等待
大猪	行动		4, 4
	等待		0, 0

图 1.3.2 “智猪博弈”双变量矩阵表(b)

再剔除大猪劣策略后的双变量矩阵表如图1.3.3所示。

		小猪	
		行动	等待
大猪	行动		4, 4
	等待		

图 1.3.3 “智猪博弈”双变量矩阵表(c)

因此在智猪博弈中,策略组合(行动,等待)就是该博弈重复剔除严格劣策略后的结果。

“重复剔除严格劣策略”建立在理性局中人不会选择严格劣策略的原则上,此方法有以下两个缺陷:(1)使用此方法需要假定“局中人是理性的”是共同知识,即不仅要求“所

有局中人是理性的”“所有局中人都知道所有局中人是理性的”,而且还要求“所有局中人都知道所有局中人都知道所有局中人是理性的”,如此反复,以至无穷(满足这些条件就满足“‘局中人是理性的’是共同知识”这一假设);(2)使用此方法所得的博弈结果有可能是**不准确**的,可能存在没有可剔除的严格劣策略的情况,如图 1.3.4 所示。

		局中人2		
		上	中	下
局中人1	上	0, 4	4, 0	5, 3
	中	4, 0	0, 4	5, 3
	下	3, 5	3, 5	6, 6

图 1.3.4 双变量矩阵表

纳什均衡是较重复剔除严格劣策略寻求均衡结果更为精确的概念,因为局中人的纳什均衡策略绝不会在剔除严格劣策略的过程中被剔除掉,而重复剔除严格劣策略后所留策略却不一定满足纳什均衡策略的条件。只有用重复剔除严格劣策略把除策略组合  $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$  外的所有的策略组合都剔除掉,剔除后所剩策略组合才是此博弈唯一的纳什均衡,如上智猪博弈中的策略组合(行动,等待)。

### 1.3.2 混合策略

在 1.1.2 中给定纳什均衡定义的时候,把  $S_i$  定义为局中人  $i$  可行的策略集,并对任意局中人  $i, s_i^*$  是针对另外  $n-1$  个局中人所选策略的最优反应。但是在某些博弈中,不存在纯策略纳什均衡,以例 1.3.2 为例。

**例 1.3.2** 假设一个“猜硬币”的零和博弈,假设每个局中人拿一枚硬币,其策略集都是{正,反},每人选择是出正面向上还是背面向上,收益结果为:若两枚硬币相同面,则局中人 2 赢走局中人 1 的硬币;如果两枚硬币不同面,局中人 1 赢得局中人 2 的硬币。“猜硬币”的收益矩阵如图 1.3.5 所示。

		局中人1	
		正面	反面
局中人2	正面	-1, 1	1, -1
	反面	1, -1	-1, 1

图 1.3.5 “猜硬币”双变量矩阵表

在例 1.3.2 的博弈中,如果两个局中人选择的策略一致,那么局中人 2 渴望改变策略。同理,如果两个人选择的策略不一致,那么局中人 1 渴望改变策略。在博弈中,一旦

每个局中人去猜测其他局中人的策略选择,此时局中人的最优行为是不确定的,博弈的结果必然包含不确定性,因此就不存在纳什均衡,称一个局中人对其他局中人行为的不确定性为混合策略。规范的表述为,局中人  $i$  的混合策略是指其策略集  $S_i$  中的一些或全部策略呈概率分布,而称  $S_i$  中的每一个策略为  $i$  的纯策略。

**定义** 对标准式博弈  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ , 假设  $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iK}\}$ , 则局中人  $i$  的一个混合策略是一个概率分布  $(p_{i1}, \dots, p_{iK})$ , 其中  $p_{ik}$  表示局中人  $i$  选择策略  $s_{ik}$  的概率, 对所有  $k = 1, \dots, K$ , 有  $0 \leq p_{ik} \leq 1$  且  $p_{i1} + \dots + p_{iK} = 1$ 。

为了进一步理解混合策略和纯策略的区别与联系,现假设一个简单的两人博弈。假设局中人 1 有两个可选的策略  $S_1 = \{\text{上}, \text{下}\}$ , 局中人 2 有三个可选策略  $S_2 = \{\text{左}, \text{中}, \text{右}\}$ 。在该博弈中,左、中、右就是局中人 2 的三个纯策略,假设其概率分布为  $(q, r, 1-q-r)$ , 即  $q$  表示局中人 2 选择左的概率,  $r$  表示选择中的概率,  $1-q-r$  表示选择右的概率, 且满足  $0 \leq q \leq 1, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq q+r \leq 1$ 。在此博弈中,混合策略  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  表示局中人 2 出左、中、右的概率相同, 而  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  表示出左、中的概率相同, 但绝不可能出右。需要注意,局中人的一个纯策略只是混合策略的一种特例, 比如局中人 2 只出左的纯策略可以表示为混合策略  $(1, 0, 0)$ 。

另外在重复剔除严格劣策略中提到, 如果  $s_i$  为严格劣策略, 那么局中人  $i$  不可能针对其他局中人的策略选择  $s_i$  作为最优反应策略。根据混合策略的思想, 可以证明其逆命题: 如果局中人  $i$  针对其他局中人的策略绝不可能选择  $s_i$  作为其最优反应策略, 则一定存在另一个优于  $s_i$  的策略可供局中人  $i$  选择。