

数学王国

Alex's Adventures
in Numberland



[英] 亚历克斯·贝洛斯 (Alex Bellos) 著 刘小鸥 吕同舟 译

数学世界里的有趣探险和诙谐故事
展示数学迷人又出乎意料的一面

中信出版集团

图书在版编目(CIP)数据

数学王国的冒险之旅 / (英) 亚历克斯·贝洛斯著 ;
刘小鸥, 吕同舟译. —北京: 中信出版社, 2022.4
书名原文: Alex's Adventures In Numberland
ISBN 978-7-5217-3959-6

I. ①数… II. ①亚… ②刘… ③吕… III. ①数学—
普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第020753号

Alex's Adventures in Numberland
Copyright © 2010 by Alex Bellos
Illustrations © 2010 by Andy Riley
All rights reserved including the rights of reproduction in whole or in part in any form.
Simplified Chinese translation copyright ©2022 by CITIC Press Corporation
ALL RIGHTS RESERVED
本书仅限中国大陆地区发行销售

数学王国的冒险之旅

著者: [英] 亚历克斯·贝洛斯

译者: 刘小鸥 吕同舟

出版发行: 中信出版集团股份有限公司

(北京市朝阳区惠新东街甲4号富盛大厦2座 邮编 100029)

承印者: 中国电影出版社印刷厂

开本: 880mm×1230mm 1/32 印张: 16 字数: 304千字

版次: 2022年4月第1版 印次: 2022年4月第1次印刷

京权图字: 01-2021-6544 书号: ISBN 978-7-5217-3959-6

定价: 69.00元

版权所有·侵权必究

如有印刷、装订问题, 本公司负责调换。

服务热线: 400-600-8099

投稿邮箱: author@citicpub.com

1992年夏天，我在布赖顿的《防卫晚报》当见习记者。我每天和经常出入地方法院的犯事青少年打交道，采访店主对经济衰退的看法，还要每周更新两次蓝铃花铁路的运行时间。如果你是一名小偷或一位店主，这可能不算一段美好的回忆；但对我来说，这却是我一生中非常快乐的时期。

那时，约翰·梅杰刚刚连任首相不久。沉浸在胜利的喜悦中的他提出了一项最令人难忘（也饱受嘲讽）的政策倡议。他以国家领导人的严肃态度宣布设立一条电话热线，为民众提供有关锥形交通路标的信息。虽然这是一个平庸的提议，但首相提出它的阵势却搞得好像世界未来都要依靠它了一样。

但在布赖顿，交通锥可是人们关注的焦点。你开车进城的路上一定会遇到施工路段。以伦敦为起点的主干道A23（M）像一条由带橙色条纹的交通锥围起的走廊，从克劳利延伸到普雷斯顿公园。《防卫晚报》煞有介事地给读者提出了挑战，让他们猜猜，在数十英里（1英里约为1.6千米）长的A23（M）公路上一共有多少交通锥。资

深编辑颇为得意，认为自己想出了一个绝妙的主意：这道假日游园会风格的趣题不仅提供了背景信息，也取笑了中央政府，这简直是地方报纸的完美素材。

然而，比赛开始后才过几个小时，编辑部就收到了第一份答案，读者已经估算出了交通锥的正确数量。我记得那些资深编辑在办公室里垂头丧气，没有人说话，仿佛一位重要的地方议员刚刚去世。他们原本是想滑稽地模仿首相，但现在自己却被弄得像傻瓜一样。

编辑认为猜出20英里左右的高速公路上有多少交通锥是不可能完成的任务。显然事实并非如此，我想我是这栋大楼里唯一一个知道原因的人。假设交通锥以相同的间距放置，你只需要进行一步计算就可以得到结果：

$$\text{交通锥数量} = \text{道路长度} \div \text{交通锥间隔的距离}$$

道路的长度可以通过开车记录行驶距离或者测量地图得出。要计算相邻交通锥的间距，你只需要一把卷尺。即使交通锥之间的间距可能会有一些变化，估计的道路长度也可能会有误差，但在很长的距离上，这种估算的准确性已经足够赢得地方报纸组织的竞猜活动了（而且交警向《防卫晚报》提供正确答案时所使用的计算方式可能与此并无二致）。

我一直清楚地记得这件事，这是在记者的职业生涯中，我第一次意识到数学思维的重要性的时刻。我也不安地意识到，大多数记者不懂数学。其实算出排在路边的交通锥的数量并不复杂，但对我的同事来说，计算并不简单。

在这件事发生的两年半前，我刚拿到了数学和哲学学位，横跨文理两个领域。表面上看起来，进入新闻业标志着我放弃了理科，投身于文科。在“交通锥惨败事件”后不久，我离开了《防卫晚报》，到伦敦工作。最终，我成为一名驻里约热内卢的记者。我对数字的敏感性偶尔会有些用处，比如，我能发现近年被砍伐的亚马孙丛林的面积相当于哪一个欧洲国家，或者计算各种货币危机期间的汇率。但除此之外，我几乎已经把数学抛在了脑后。

几年前，我回到英国，不知道接下来要做什么。我卖过巴西足球运动员的短袖衫，开过博客，打过进口热带水果的主意，但差不多一事无成。在重新审视自己人生的过程中，我再次想起了数学这门耗费了我太多青春的学科，我正是在这里找到了灵感的火花，它引领我写成了这本书。

成年人进入数学世界的感受和孩子的感受完全不同。对孩子来说，学习数学代表着需要通过考试，这意味着，他们会错过很多真正引人入胜的东西。现在，我可以自由游走于其间，看到一个新奇又有趣的课题就去探索一番。我学习了民族数学，也就是研究不同文化如何对待数学，以及数学是如何被宗教塑造的学科。我对行为心理学和神经科学的前沿研究很感兴趣，这些研究渐渐弄清了大脑思考数字的原因和方式。

我意识到，这些探索也很像一位驻外记者，但不同的是，我访问的国家是一个抽象的国家，它叫“数学王国”。

我的旅程是一次真正意义上的旅行，因为我想通过现实世界体验数学。所以，我飞到印度，想弄清楚这个国家是如何发明“零”的，这是人类历史上最伟大的智力突破之一。我在里诺的一家大型

赌场预订了房间，想用实际行动看看什么是概率。我还在日本见到了世界上最会算术的黑猩猩。

随着研究的深入，我发现自己处于一个奇怪的位置，我既是专家，也是一位业余爱好者。重新学习学校教过的数学知识，就像重新认识老朋友一样，但还有很多朋友的朋友是我从来没有见过的，我也见到了很多新来的孩子。举个例子，在我写这本书之前，我不知道几百年来一直有人提倡要在我们的十进制系统中再引入两个数字，我也不知道为什么英国是第一个铸造七边形硬币的国家，我对数独背后的数学更是一无所知（因为在我上学时，数独还没有被发明出来）。

我来到了一个意料之外的地方，这些地方包括布伦特里、埃塞克斯和美国亚利桑那州的斯科茨代尔，还读到了一些意想不到的书。为了理解毕达哥拉斯为什么对食物如此挑剔，我花了一整天读了一本关于植物仪式历史的书。

这本书从第0章开始，因为我想强调，这一章讨论的主题是“前数学”，讲述了数字是如何产生的。从第1章开始，数字已经出现，我们就正式开始了。从这里到第11章结束，这本书将涵盖尽可能多的领域，包括算术、代数、几何、统计学，等等。我将精简关于专业上的内容，但有时别无他法，我就只能写出方程和证明。如果你觉得头疼，可以跳到下一节的开头，内容就会变得容易起来。每一章都是独立的，也就是说，不必阅读前面的章节就可以理解下一章。你也可以按任意顺序阅读，但我还是希望你从头到尾阅读所有章节，因为它们大致按照时间顺序介绍了这些数字思想，偶尔也

会回顾一下之前的要点。这本书的目标读者是非数学专业的读者，书中涵盖了从小学水平一直到本科快毕业时才会学到的概念。

因为数学也包括数学的历史，所以我还加入了一些历史资料。在人文学科中，总是有新的思想或风潮取代早先的观点；在应用科学中，理论会不断完善。但数学与它们不同：数学永不过时。毕达哥拉斯和欧几里得的定理现在仍然有效，因此，毕达哥拉斯和欧几里得是我们在学校里学到的最古老的名字。在英国普通中等教育证书（GCSE）的教学大纲中，几乎所有内容都是17世纪中期之前人们发现的数学知识；同样，英国中学高级水平考试（A-level）的范围也没有超过18世纪中期已知的数学知识。（我在大学里所学的最近的数学知识诞生于20世纪20年代。）

在写这本书的时候，与读者交流数学发现带来的兴奋和惊奇，一直是我的动力之源。（当然，也有一部分动力是为了证明数学家是很有趣的。我们是逻辑之王，对不合逻辑的东西有极强的辨别能力。）数学总是因枯燥和困难而广为人知。确实，数学往往很难，但数学也可以易于理解，并带来启发。最重要的是，它拥有非凡的创造力。抽象的数学思想是人类的伟大成就之一，它也可以说是人类进步的基础。

数学王国是一个了不起的地方，我建议你去那里看看。

亚历克斯·贝洛斯

2010年1月



在数学这个光怪陆离又奇妙有趣的世界里，人们建立了一座又一座奇妙的“景观”，吸引所有人来探索。

来自不同文化的人们发明了不同的计数系统，印度的十进制经过历史的沉淀，一骑绝尘，脱颖而出，成为当今普遍使用的计数系统。十二进制是唯一一个可以与之抗衡的系统，它的支持者建立了专门的协会试图推动这一进制的普及。人们开发出各种各样的数学工具、建立各个模型描述自然世界中的规律，甚至用编织来解决计算机都无可奈何的双曲面模型。人们热爱数学，为它写诗，为它拍电影，展现这个世界无与伦比的美，甚至用数学来衡量美。

在现实生活中，数学在很多领域都起着意想不到的作用。我们通常认为体育比赛中的胜负靠的是赛场内的主客观因素，但其实随机性也发挥了不小的作用，这也是体育彩票诞生的基础。从某种程度上说，人们往往低估了随机性对竞技体育成绩的影响。

本书将为你打开一个完全不同的数学世界。

扫码关注



我们提供知识 以应对变化的世界



作者简介

亚历克斯·贝洛斯

作家、数学问题和巴西问题专家，著有畅销书《迷人的逻辑题》《烧脑的逻辑题》等。其中《致敬欧几里得》已被翻译成20多种语言，获得多个奖项。此外，他也是研究巴西问题的专家，曾创作《足球：巴西式生活》一书。

译者简介

刘小鸥

常用笔名Takeko，学生时代曾在北极点附近的斯瓦尔巴群岛挖冻土，毕业后在科普领域玩耍多年。在三个大洲的9座城市学习生活过，现任科普公众号“原理”主笔，带着两只猫住在西湖边。

吕同舟

非主流工科生，大学时期沉迷美剧字幕译制，险些无法顺利毕业。在美国炸过薯条，在东南亚开过皮卡，在非洲谈过生意。不久前刚刚搬到钱塘江畔。

图书策划 中信出版·鸚鵡螺工作室

策划编辑 孔鑫鑫

责任编辑 丁家琦

营销编辑 金慧霖

装帧设计 卓义云天

出版发行 中信出版集团股份有限公司

服务热线：400-600-8099 网上订购：zxcbs.tmall.com

官方微博：weibo.com/citicpub 官方微信：中信出版集团

官方网站：www.press.citic

前 言 - V

第 0 章 - 数字的起源 - 001

约一万年前，人类凭借对数量的直觉发明了数字。虽然数字产生的过程尚不明确，但人和很多其他动物都天生具有数量的感觉。黑猩猩运用数字的能力有多强？恒河猴又是如何运用数字的？它们这些能力对我们有什么启发？

第 1 章 - 珠算中的数字 - 035

在人类历史发展过程中，生活在不同地区的人们发明了不同的计数系统和方法。二进制、十进制、十二进制、六十进制都曾被不同的社会使用，其中以十二进制对目前流行的十进制的冲击最为强大。

第 2 章 - 简单又迷人的折纸！ - 077

欧几里得几何揭示了三角形最美丽的特性，教堂等建筑中的装饰图案展现了各种图形的美。名片折纸艺术和门格尔海绵将人们对几何图形的想象进一步深化。在世界的很多地方，人们用折纸的方法来教授和学习几何。

第 3 章 - 关于零的故事 - 121

印度的数字系统引入了零的概念。如今，人们对零已十分熟悉，然而，正是这种熟悉让人似乎忽略了它的重要、简洁和实用。

第 4 章 - π 的一生 - 157

π 从诞生之日起，就激起了人们的无穷兴趣。一开始，人们只是想更精确地计算它的值，不断扩展它的小数位。后来，人们组织各种智力比赛，看看谁能背出最多的位数。人们甚至为它写诗、拍电影。

第 5 章 - 魔术中的数学 - 199

在 x 的助力下，人们提高了计算各种复杂结果的能力，也提升了解决实际问题的能力。这些实际问题包括，如果想在矩形空间内设计一个环岛，应如何选出最佳图形。

第 6 章 - 数学的休闲时光 - 243

日本数学爱好者开启了幻方和数独的新纪元。人们不仅可以享受揭开谜题的乐趣，也能从中体会到数学的纯净和整洁之美。

第 7 章 - 喜欢收集数列的人 - 291

在数学的星空中，有许多让人眼前一亮的点点繁星。素数、完全数等就属于这种。

第 8 章 - 黄金分割与审美 - 325

最能体现数学中的美的概念可能就是黄金分割了。它让我们可以用尺子测量通常认为无法衡量的视觉美感。斐波那契数也是一种经常出现在自然环境中的常见数列，存在于松果、菠萝、花椰菜和向日葵中。

第 9 章 - 如何打败概率 - 351

对于赌徒来说，赌场中最划算的赌法来自双色子赌桌，最不划算的赌法则是角子机。如果你精通概率并有足够的资金的话，你可能会把赌场算到倒闭。

第 10 章 - 面包店的诡计 - 405

统计学的诞生给数学的应用注入了新的力量。统计数字给我们带来的启示远比我们想象的还要深远。比如，体育比赛的成绩就有偶然性的因素参与。

第 11 章 - 钩针织出的双曲平面 - 445

你可能很难想象，连计算机都无法模拟出的双曲空间竟然可以由针编织出来。数学，以及数学家总是在意想不到的地方带给我们震撼。

词汇表 - 479

附录一 - 484

附录二 - 485

附录三 - 486

附录四 - 487

附录五 - 488

附录六 - 489

注释及参考文献 - 490

致 谢 - 499

第 0 章

数字的起源

在这一章中，作者试图找出数字的来源，因为数字出现的时间并不长。他遇到了一群住在丛林里的人，和一只一直住在城市里的黑猩猩。

我走进皮埃尔·皮卡（Pierre Pica）在巴黎狭小的公寓，一股驱蚊剂的臭味扑面而来。皮卡刚从亚马孙雨林回来，他在那里的一个印第安人部落中待了5个月，此时他正在给带回来的礼物消毒。书房的墙壁上装饰着部落面具、羽毛头饰和编织的篮子，书架上堆满了学术书籍。窗台上是一个没有被还原的魔方。

我问皮卡他这趟旅途怎么样。

“很难。”他回答。

皮卡是一位语言学家，也许正因如此，他说话总是缓慢而谨慎，对每个单词都格外注意。他50多岁^①了，但看起来有些孩子气。他有一双明亮的蓝眼睛，面色红润，一头银发柔软而蓬乱。他的声音很平静，动作却很紧张的样子。

皮卡是美国著名语言学家诺姆·乔姆斯基的学生，现在在法国国家科学研究中心工作。在过去的10年里，他一直在研究蒙杜鲁库人（Mundurucu），这是巴西亚马孙地区一个包含约7 000位原住民的

^① 本书英文版出版于2010年。后文中提到的年龄，均指原书出版时的年龄。——译者注

群体。蒙杜鲁库人是狩猎采集者，他们居住在雨林地区的小村庄中，分布的地盘面积大约是威尔士的两倍。皮卡的研究主要关注蒙杜鲁库人的语言：他们的语言没有时态，没有复数，也不存在大于5的数词。

为了进行田野调查，皮卡踏上了一段堪称伟大冒险家的旅程。离这群印第安人最近的大型机场位于圣塔伦，那是一个距大西洋500英里的小镇，位于亚马孙雨林中。从那里出发，他坐了15个小时的渡轮，沿着塔帕若斯河行驶近200英里，到达伊泰图巴，这是一个曾经历过淘金热的小镇，也是皮卡这一路能囤积食物和燃料的最后一站。在近期的一次旅行中，皮卡在伊泰图巴租了一辆吉普车，带上他的设备，包括电脑、太阳能电池板、电池、书和120加仑（约545升）汽油。然后，他沿着横贯亚马孙的高速公路行驶，这段公路是20世纪70年代在民族主义驱动下建成的，它现在已经变为一条破破烂烂的泥泞小路，常常无法通行。

皮卡的目的地是雅卡雷阿坎加，也就是位于伊泰图巴西南200英里的一个小型居住地。我问他开车到那里要花多长时间。“看情况。”他耸耸肩，“可能要一辈子，也可能两天就到。”

我重复了一遍问题，我想问的是这次他花了多长时间。

“你知道，你永远不知道要花多长时间，因为永远不会花相同的时间。雨季需要10到12个小时，这还是一切顺利的情况下。”

雅卡雷阿坎加位于蒙杜鲁库人领地的边缘。为了进入他们的领地，皮卡必须等人来和他们谈判，让他们用独木舟把自己带到那里。

“你等了多久？”我问。

“我等了很久。但我再说一次，别问我花了多长时间。”

“所以大概是一两天？”我试探性地问。

他皱起眉头想了几秒：“大约两周吧。”

离开巴黎一个多月后，皮卡终于快到达目的地了。我还想知道，从雅卡雷阿坎加到村庄要花多长时间。

但到这会儿，皮卡明显对我的问题有些不耐烦了：“我对所有事情的回答都一样——要看情况！”

我坚持问，那这次花了多长时间？

他结结巴巴地说：“我不知道。我想……也许……两天……一天一夜……”

我越是追问皮卡有关事实和数字的问题，他就越是不愿意回答。我有些恼火。我还不确定，他的反应背后是法国人的固执，还是学术上的迂腐，或者就是一种普遍的抵触情绪。我没有继续追问，而是转而讨论其他话题。几个小时后，当我们谈到在一个偏僻的地方待了这么久之后再回到家的感觉时，他才吐露实情。“从亚马孙平原回来后，我失去了时间感和数字感，或许也失去了空间感。”他说。他会忘记自己约了人见面，会被简单的指示弄得晕头转向。“我很难再适应巴黎，很难适应这里的角度和直线。”皮卡之所以无法给出数据，就是因为他受到的这种文化的冲击。他和那些几乎不会数数的人相处了那么久，以至于他失去了用数字来描述世界的能力。

没有人确切地知道数字是什么时候诞生的，但数字的出现可能不超过10 000年。这里我指的是用单词和符号表示数字的有效系统。一种理论认为，这样的系统是与农业和贸易一同出现的，因为数字是一种必不可少的工具，它可以用来盘货，并保证你没有被人骗。蒙杜鲁库人一直以来都是自给自足的农民，直到最近，钱才开始在