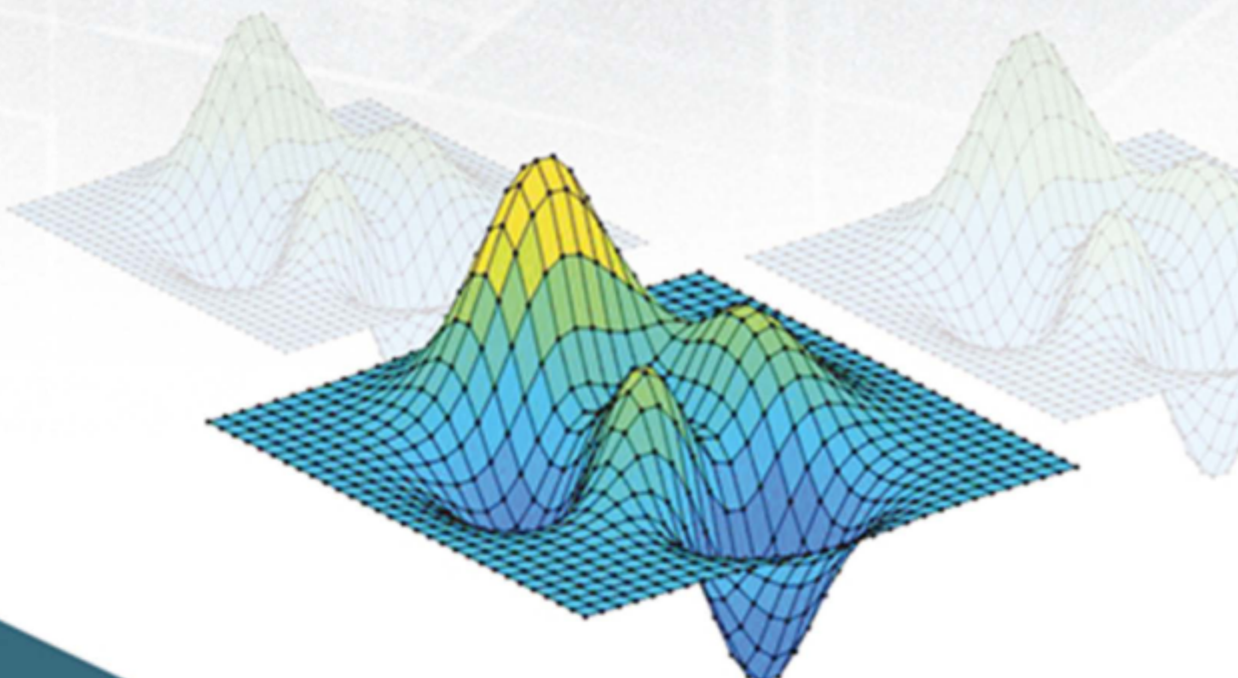
国家级一流课程建设配套教材
煤炭高等教育“十四五”规划教材
普通高等教育数学类基础课程系列教材

数值分析

曾繁慧　胡行华 / 主编



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数 值 分 析

主 编 曾繁慧 胡行华

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书介绍了科学和工程实际中常用的数值计算方法及其相关的理论，内容包括绪论、线性方程组的直接解法、线性方程组的迭代解法、非线性方程（组）的数值解法、插值法、函数逼近、数值积分与数值微分、常微分方程数值解法、矩阵特征问题的数值计算。每章都有相关的 Matlab 应用函数、主要数值方法的 Matlab 程序，并配有应用例题、数值计算习题和实验题。为便于自学，数值计算习题附有答案。每个知识点配以教学慕课视频，以及主要知识内容的导读、数值实验及程序演示、重点与难点解析、融入课程思政元素的数学家素材小视频，读者可以扫二维码获取相应知识信息。

本书注重实际应用和科学计算能力的训练，融入数字化素材与课程思政元素，由案例引入数值计算方法，起点低，跨度较大。本书可作为理工科大学各专业以及研究生的“数值分析”课程教材，并可供从事科学与工程计算的科技工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

数值分析 / 曾繁慧，胡行华主编. — 北京 ：北京理工大学出版社，2021.8
ISBN 978 - 7 - 5763 - 0229 - 5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①曾… ②胡… Ⅲ. ①数值分析 Ⅳ. ①O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2021）第 172977 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68944723（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　　张 / 21.5
字　　数 / 502 千字
版　　次 / 2021 年 8 月第 1 版　2021 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 59.00 元

责任编辑 / 朱　婧
文案编辑 / 李　硕
责任校对 / 刘亚男
责任印制 / 李志强

前　言 PREFACE

本书主编主持的“数值分析”是国家首批一流本科课程、辽宁省精品课、辽宁省一流本科课程、“学习强国”学习平台慕课，于“学堂在线”平台面向全国高校开放，此次编写本书旨在为该课程提供持续建设。

大数据、人工智能时代的到来对人才培养提出了新的要求，中国亟需一大批兼具家国情怀、通识根基、创新思维和实践技能的高水平人才，守正创新成为当下高等教育的历史使命，应用数值计算方法求解数学问题已成为数学学科的重要内容。“数值分析”是研究各种数学问题求解的数值计算理论及其方法的一门课程。在理工科数学类科目教学体系中，“数值分析”起着承上启下的作用。承上是使微积分、代数与几何、随机数学中的原理得以应用，方法得以实现，启下是为后续课程中数学问题的建模和求解提供思路，激发学生进一步学习数学、应用数学的意识和能力，是高等理工科院校的重要基础课程，同时其也能够培养学生的创新思维、创新能力。

“数值分析”是高等院校数学类、力学及计算机等专业的一门主要基础课程，也是理工科各专业本科及研究生的数学基础课程。“数值分析”是数学建模与数学实验之间的桥梁与媒介，本书编写的目的是促使读者掌握用数值计算方法处理各种数学问题的基本理论与技术；通过数学软件平台与程序设计的实验环节提高读者的科学计算与数值计算能力，为读者使用计算机解决科学与工程中的实际问题打下良好的理论基础和扎实的应用基础。在信息技术高速发展的时代，掌握这种能力是至关重要的。

为适应大数据时代信息技术发展的需要和建设创新型国家的需要，培养实践能力强、具备科学研究素质的应用创新型人才具有十分重要的战略意义。与国内同类教材相比，本书设计为数字化教材，具有新时代的气息，每个知识点配以教学慕课视频，以及主要知识内容的导读、数值实验及程序演示、重点与难点解析、融入课程思政元素的数学家素材小视频，读者可以扫描二维码获取相应知识信息。本书在介绍数值计算理论的基础上更加注重实际应用和科学计算能力的训练；融入课程思政元素，每章由简单的工程应用案例引入，然后由浅入深地介绍实用的数值方法，并配有相关的 Matlab 工具箱函数，编写了各种数值算法的函数程序，利用这些函数可以方便、快捷地求解工程实际中的复杂问题。每章在数值计算习题后都配有实验题，这些实验题需要借助于计算机，利用本书介绍的 Matlab 函数及程序来完成。认真准备与完成实验对读者掌握该章数值计算基本理论非常重要，可作为考查其掌握知识的依据。通过本书实验习题环节，使读者能够熟练运用计算机与数值计算软件、掌握各种数值计算算法、学会对数值结果进行分析。通过本书的学习，可以促进读者学习如何提出问题和解决问题，提高读者自身动手能力和独立思考能力，有效培养读者面向工程实际问题的算法设计与实现能力，进而培养读者成为具备科学计算能力、拥有科学研究素质的创新人才。作为教材，本书尽可能保证全书的系统性，既讲述数值方法的原理，又给出了算法公式的推导

和描述。为适应各专业的需要，本书利用简单的应用案例引入数值计算方法，内容按低起点、大跨度的原则选取。为便于自学，数值计算习题附有答案。本书可作为理工科大学各专业的“数值分析”课程教材，并可供从事科学与工程计算的科技工作者参考。

本书介绍了科学和工程实际中常用的数值计算方法及其相关的理论，内容包括绪论、线性方程组的直接解法、线性方程组的迭代解法、非线性方程（组）的数值解法、插值法、函数逼近、数值积分与数值微分、常微分方程数值解法、矩阵特征问题的数值计算。

本书由曾繁慧教授统稿，编写工作安排为：第 1、2、3 章由曾繁慧编写，第 4、5、6 章由胡行华编写，第 7、8、9 章由任思行编写。数字化素材编制工作安排为：曾繁慧主持慕课制作，第 6 章由胡行华录制，第 7 章由刘威录制，其余各章均由曾繁慧录制；知识导读、程序及数值实验、数学家思政素材等小视频由胡行华制作完成；任思行负责全书的校对工作。本书也借鉴了许多作者的成果，在此向他们一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，在内容的取材、结构的编排以及叙述方式上难免有不当之处，敬请读者和专家指正。

编者

2021 年 3 月

目　录 CONTENTS

第 1 章 绪论

MOOC 1.1 概述

课程简介

1.1 概述

数值分析（Numerical Analysis）是研究分析用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论的学科，它是计算数学的一个主要部分，计算数学是数学的一个分支. 数学学科研究内容十分广泛，本书只涉及工程和科学实验中常见的数学问题，如线性方程组、非线性方程（组）、函数的插值与逼近、微积分、常微分方程、矩阵的特征值问题等，是其他数学问题的基础.

众所周知，无论是自然科学、社会科学还是其他学科，其研究领域都大量涉及数学问题的求解，其解包括解析解和数值解. 解析解固然很重要，但不是任何时候都能获得的，即使能得到解析解，有时也不一定实用. 例如定积分 $I=\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，其中的被积函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 没有有限形式的原函数 $F(x)$，因此不能用牛顿－莱布尼茨公式 $I=F(b)-F(a)$ 求积分值. 又如，工程中常用的常微分方程模型 $y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$ 也没有有限形式的解析解，而从应用的角度看能得到数值解也就够了. 至于一般的非线性方程（组）、线性方程组和矩阵的特征值等问题，几乎无法用解析方法求解. 由此可见，数值方法是不可或缺的途径和手段. 特别是计算机高度发展的今天，应用数值方法，不仅可以求解常规的数学问题，而且可以求解大规模的复杂数学问题.

数值分析是一门内容丰富、研究方法深刻、有自身理论体系的课程，其特点如下：

（1）建立在严格的数学理论基础上，是一门实用性很强的课程；

（2）面向计算机，根据计算机特点提供实际可行且计算复杂性好的有效算法；

（3）具有可靠的理论分析与数值试验，以保证算法的计算结果达到要求的精度，验证一个算法是行之有效的.

根据数值分析课程的特点，学习时首先要注意掌握方法的基本原理和思想，要注意方法处理的技巧及其与计算机的结合，要重视误差分析、收敛性及稳定性的基本理论；其次，要通过实际问题的解决，学习使用各种数值方法；为了掌握课程内容，还应进行一定数量的理论分析和计算练习，以及完成结合数学软件 Matlab 的实验题. 由于本课程包括了微积分、线性代数、常微分方程的数值方法，这就要求读者必须掌握这几门课的基本内容，才能学好这门课程.

本章导读

1.2　数值计算的误差

1.2.1　误差的来源

应用数学方法研究工程或科学问题，一般只能得到问题的近似解. 误差的产生主要有以下几方面.

1）模型误差

用计算机解决科学计算问题首先要建立数学模型，它是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的，因而是近似的. 将模型与实际问题之间出现的误差称为模型误差.

2）观测误差（测量误差）

建模时，实验、量测等数据误差称为观测误差.

3）方法误差（截断误差）

由于计算机本身的特性，要求算法必须在有限步内完成，这就要求把数学模型用数值分析方法导出一个计算公式来近似，由此而产生的误差称为方法误差.

由 Taylor（泰勒）公式求 e^x 的近似值，由于

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

取 n 项近似则有 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$，方法误差为$\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$.

4）舍入误差

由于计算机字长有限，参加运算的数据只能截取有限位，由此而产生的误差称为舍入误差.

用 0.333 3 近似代替 1/3，产生的误差为

$$1/3 - 0.333\,3 = 0.000\,033\cdots$$

注　在数值分析中，主要关心方法误差和舍入误差.

1.2.2　误差的概念

MOOC 1.2.2
误差的概念

精确值是指理论意义上的一个客观量. 设 x^* 为精确值，a 为 x^* 的一个近似数.

1）绝对误差

定义 1　称 $E(a) = x^* - a$ 为近似数 a 的**绝对误差**，简称为**误差**.

如果 $|E(a)| \leqslant \delta$，则称 δ 为近似数 a 的**绝对误差限**，简称为**误差限**.

若测量光速误差为 4 km/s，运动员的跑速误差为 0.01 km/s. 从数量大小上看，后者误差小.

但是，0.01 km/s = 10 m/s，已经接近运动员的真实跑速. 二者比较可知，光速的测量更准确.

一般来说，绝对误差（或误差限）的大小不能充分说明近似数的精确程度.

2） 相对误差

定义 2 称 $E_r(a)=(x^*-a)/x^*$ 为近似数 a 的**相对误差**.

如果 $|E_r(a)|\leqslant\delta_r$，则称 δ_r 为近似数 a 的**相对误差限**.

实际运算时，由于精确值总是不知道的，通常取 $E_r(a)=(x^*-a)/a, \delta_r=\delta/|a|$.

$a=3.14$ 是 π 的近似值，则误差 $|E(a)|=|\pi-3.14|<0.002$，误差限 $\delta\approx0.002$. 相对误差 $|E_r(a)|\leqslant\dfrac{0.002}{\pi}\approx\dfrac{0.002}{3.14}\approx6.369\times10^{-4}$，相对误差限 $\delta_r\approx6.369\times10^{-4}$.

3） 有效数字

当精确值 x^* 有多位数时，常常按四舍五入的原则得到前几位近似值. 如 $\pi=3.141\,592\,65\cdots$，取 3 位有效数字，则 $a=3.14$，$|E(a)|\leqslant0.002$；取 5 位有效数字，则 $a=3.141\,6$，$|E(a)|\leqslant0.000\,008$.

它们的误差都不超过末位数字的半个单位，即

$$|E(3.14)|=|\pi-3.14|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2},\quad |E(3.141\,6)|=|\pi-3.141\,6|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

一般地，经过四舍五入后得到的近似数，从第一位非零数开始直到最末位，有几位就称该近似数有几位有效数字.

定义 3 设 x^* 的近似值 a 可表示为

$$a=\pm10^m\times0.a_1a_2\cdots a_n$$

式中，a_1 是 1 ~ 9 中的一个整数，a_2，…，a_n 为 0 ~ 9 中的任意整数，m 为整数，若使

$$|E(a)|=|x^*-a|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{m-n}$$

成立，则称 a 近似 x^* 有 n 位**有效数字**.

设 $x^*=0.002\,567$，$a=0.002\,56=10^{-2}\times0.256$，则

$$|x^*-a|\leqslant0.000\,05=\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

因为 $m=-2$，所以 $n=2$，即 a 有 2 位有效数字.

设 $x^*=9.000\,3$，则 $a=9.000$ 具有 4 位有效数字.

注 近似数的有效数字不但给出了近似值的大小，而且还指出其绝对误差限.

4） 有效数字与相对误差的关系

近似值的有效数字与相对误差密切相关. 粗略地说，有效数字的位数是 n，则相当于相对误差约为10^{-n}，反之亦然.

确切地说，有如下两个定理.

定理 1 设 x^* 的近似数为 $a=\pm 10^m\times 0.a_1a_2\cdots a_n$，其中 $a_1\neq 0$，如果 a 具有 n 位有效数字，则 a 的相对误差限为

$$\delta_r=\frac{1}{2a_1}\cdot 10^{-(n-1)}=\frac{5}{a_1}\cdot 10^{-n}$$

证明 显然有

$$0.a_1\times 10^m\leqslant |a|<(0.a_1+0.1)\times 10^m \text{ 或 } a_1\times 10^{m-1}\leqslant |a|<(a_1+1)\times 10^{m-1},$$

于是，a 的相对误差为

$$|E_r(a)|=\left|\frac{x^*-a}{a}\right|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-n}\cdot\frac{1}{a_1\times 10^{m-1}}=\frac{1}{2a_1}\cdot 10^{-(n-1)}=\frac{5}{a_1}\cdot 10^{-n}$$

相对误差限约为 $\delta_r=\dfrac{1}{2a_1}\cdot 10^{-(n-1)}=\dfrac{5}{a_1}\cdot 10^{-n}$.

注 如果 a 的有效数字位数越多，则 a 的相对误差就越小.

反过来，可以从近似数 a 的相对误差限来估计 a 有效数字的位数.

定理 2 设 x^* 的近似数为 $a=\pm(0.a_1a_2\cdots a_n)\times 10^m(a_1\neq 0)$，如果 a 的相对误差满足 $|E_r(a)|=\left|\dfrac{x^*-a}{a}\right|\leqslant\dfrac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}=\dfrac{5}{(a_1+1)}\times 10^{-n}$，则 a 至少具有 n 位有效数字.

证明 由于

$$|x^*-a|=|a|\left|\frac{x^*-a}{a}\right|\leqslant(a_1+1)\times 10^{m-1}\cdot\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-n}$$

故 a 至少具有 n 位有效数字.

推论 设 $a=\pm(0.a_1a_2\cdots a_n)\times 10^m(a_1\neq 0)$，如果 a 的相对误差满足

$$|E_r(a)|=\left|\frac{x^*-a}{a}\right|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-n}$$

则 a 至少具有 n 位有效数字.

证明 由于

$$|x^*-a|=|a|\left|\frac{x^*-a}{a}\right|\leqslant(a_1+1)\times 10^{m-1}\times\frac{1}{2}\times 10^{-n}=\frac{(a_1+1)}{10}\times\frac{1}{2}\times 10^{m-n}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-n}$$

故 a 至少具有 n 位有效数字.

1.2.3 函数值的误差估计

MOOC 1.2.3 函数值的误差估计

设 a、b 分别为精确值 x、y 的近似值；δa、δb 分别为 a、b 的误差限. 对于一元函数 $f(x)$ 和二元函数 $f(x,y)$，讨论其近似值 $f(a)$ 和 $f(a,b)$ 的误差估计问题. 分析方法采用一阶 Taylor 展开，变量更多的函数与此类同.

1) 一元函数 $f(x)$ 的误差估计

$f(a)$ 为 $f(x)$ 的近似函数值. 设函数 $f(x)$ 在 a 的邻域上连续可微，由一阶近似

Taylor 展开：

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

得

$$|f(x) - f(a)| \approx |f'(a)(x-a)| \leqslant |f'(a)|\delta a$$

则近似函数值 $f(a)$ 的误差限、相对误差限估计式为

$$\begin{cases} \delta f(a) \approx |f'(a)|\delta a \\ \delta_r f(a) = \dfrac{\delta f(a)}{|f(a)|} \approx \left|\dfrac{f'(a)}{f(a)}\right|\delta a \end{cases}$$

2） 二元函数 $f(x,y)$ 的误差估计

$f(a,b)$ 为 $f(x,y)$ 的近似函数值．设函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 的邻域上连续可微，由一阶近似 Taylor 展开：

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)$$

得

$$|f(x,y) - f(a,b)| \approx \left|\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)\right| \leqslant \left|\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\right|\delta a + \left|\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right|\delta b$$

则近似函数值 $f(a,\ b)$ 的误差限、相对误差限估计式为

$$\begin{cases} \delta f(a,b) \approx \left|\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}\right|\delta a + \left|\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right|\delta b \\ \delta_r f(a,b) = \dfrac{\delta f(a,b)}{|f(a,b)|} \end{cases}$$

3） 简单算术运算的误差限和相对误差限

用计算机进行数值运算时，由于所有的函数都必须化成算术运算，因此在函数值的误差分析中最基本的是算术运算．根据二元函数的误差估计，两个数的加、减、乘、除算术运算得到的误差限和相对误差限分别为

$$\delta(a \pm b) \approx \delta a + \delta b,\ \delta_r(a \pm b) \approx \frac{\delta a + \delta b}{|a \pm b|}$$

$$\delta(ab) \approx |b|\delta a + |a|\delta b,\ \delta_r(ab) \approx \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|} = \delta_r a + \delta_r b$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{1}{|b|}\delta a + \left|\frac{a}{b^2}\right|\delta b,\ \delta_r\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|} = \delta_r a + \delta_r b$$

注　在作加减运算时，应尽量避免接近的两个数相减，否则会使相对误差增大，导致有效数字损失．显然，加减运算结果的精度不会比原始数据高．在作乘除运算时，计算结果的相对误差是原始数据的相对误差之和，因此，计算结果的精度也不会比原始数据高．由于高精度数据的运算需要更多的时间和空间，所以应避免用高精度数据和低精度数据作混合运算，否则是不经济的．