



[苏] Л. А. 魏因施泰因 著

开放腔和开放波导

科学出版社

开放腔和开放波导

〔苏〕 И. А. 魏因施泰因 著

徐承和 刘国政 廖正久 译

科学出版社

1987

内 容 简 介

开放式谐振腔即用于激光、自由电子激光和电子回旋微波激射中的光学谐振腔和准光学谐振腔；开放波导是指相应的传输系统。作者采用了波导模式的分析方法，将物理概念与数学推导紧密结合，对开放腔作了系统的理论分析。

全书共十二章，前五章从理论上分析了各种形状（平面镜、球面镜、柱面镜和圆筒形）的开放腔的特性；第六章介绍研究开放腔的几何光学方法；第七章讨论有实用价值的共焦腔的衍射理论；第九章讨论介质腔和开放腔中含有介质体的情况；第十和十一两章建立开放腔中模式激励的严格理论；最后一章介绍开放腔在物理和工程中的应用。每章后附有习题，书后有文章的简要评述及文献索引。

本书可供从事激光物理、红外和毫米波技术、微波器件、等离子体物理、电子回旋微波激射器等科技工作的工程技术人员和高等院校有关专业的师生阅读。

Л. А. Вайнштейн

ОТКРЫТЫЕ РЕЗОНАТОРЫ И ОТКРЫТЫЕ ВОЛНОВОДЫ

Издательство «Советское Радио»,

Москва, 1966

开放腔和开放波导

〔苏〕Л. А. 魏因施泰因 著

徐承和 刘国政 廖正久 译

责任编辑 唐正必

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经营

*

1987年7月第一版 开本：787×1092 1/6

1987年7月第一次印刷 印张：22 3/4

印数：0001—1,500 字数：526,000

经一书号：15931·776

本社书号：4836·15-10

定价 5.40元

译者序

本书作者Л. А. 魏因施泰因 (Вайнштейн) 是苏联著名学者, 曾发表过许多有关电磁场理论方面的论文, 撰写有三本专著。除本书外, 另两本是“Электромагнетные Волны” (电磁波) 和“Теория Диффракции и Метод Факторизации” (衍射理论和因子化方法)。这些著作有其独到的见解, 在国内外颇有影响, 特别是本书和最后一本书反映了作者的大量的研究成果。

对于微波波段来说, 开放式谐振腔是相对于被金属壁所封闭的谐振腔而言, 因为这种腔的边界部分地乃至大部分地开放, 并伴随有向外的辐射。它目前主要应用于激光器中。从事激光方面的学者往往称之为光学谐振腔或法布里-珀洛腔。国内方洪烈编著的《光学谐振腔》一书 (科学出版社, 1981年), 对这类腔作了相当全面的介绍, 同时还指出了本书作者在开放式谐振腔的理论方面所作的贡献。故《光学谐振腔》可供阅读本书时参考。近十年来, 自由电子激光的研究工作大量展开, 其工作波段可以是可见光, 也可以是远红外等, 而腔体则采用开放式谐振腔。在毫米波段能产生很高功率的回旋管目前已投入使用。近年来, 国内外均在研究采用准光学腔的回旋管以缩短其工作波长。不少人认为回旋管向亚毫米波段发展, 改用准光学腔作为它的谐振系统是很有前途的。

本书对开放腔和开放波导进行了系统的、严密的分析, 理论上独树一帜。它的特点是将微波波导和谐振腔的模式分析方法推广到这类开放系统, 对它们的衍射损失也进行了深入而又独到的分析。它是国外唯一的一本系统地论述开放谐振腔和开放波导的理论的专著, 出版后不久即被译成英文版 (“Open Resonators and Open Waveguides”, Golem press, Boulder, Colorahdo, 1969)。如今, 该书仍被国内外从事微波和激光等研究的许多科技人员所引用, 不失为一本经典性的著作。

我们主要根据俄文原本译出, 同时也参照了英译本。但英译本译文有缺漏, 并保留了原文的不少错误。我们在译文中对原书的错误一一作了订正, 对个别不易理解的内容, 则通过加注来说明, 同时, 我们在书后还加了一个附录, 以供读者学习研究该书内容时参考。有些科学名词若直译不易被读者所接受, 则按照我国的习惯进行了意译。例如, 俄文中的“ E_{mnq} 振动”译为“ E_{mnq} (振荡) 模式”; “光量子振荡器”译为“激光器”, 等等。我们在翻译过程中力求译文符合原著精神, 语句准确通顺, 但由于水平有限, 错误及疏漏之处在所难免, 敬请有关专家及读者不吝指教。

前 言

众所周知，在激光器中⁺，采用开放式谐振腔作为振荡系统，在最简单的情况下这种腔由两面相互对置的镜子组成。这是开放腔的初步应用，但它的应用远非至此。它的优越之处在于腔的所有尺寸都比波长大多，而其本征频率谱则比同样大小的封闭式谐振腔的稀疏；此外，开放式谐振腔的某些本征振荡的辐射⁺⁺损耗可以做得非常小，所以这些振荡具有很高的品质因数，往往超过封闭式谐振腔中振荡的品质因数。由于这原因，开放式谐振腔不仅在光波，而且在毫米波和亚毫米波波段越来越被广泛地用于物理学和技术领域。在某些情况下，对更长的波长也有应用。

本书注重于开放式谐振腔的理论，而且很大程度是以作者在1962—1965年期间完成并发表的论文为基础加以阐述的。由周期排列的透镜或反射镜组成的开放式波导能实现毫米波和亚毫米波的远距离传输。书中还引进了开放式波导的理论，它在许多方面类似于开放式谐振腔的理论。然而对传输线理论的一系列专门问题（容差和统计性质的计算），书中未予研究。

本书的目标是把开放系统的理论的基本结果系统化。为了尽量减少书中引文的数量，在全书末给出了每章所用文献的综述。每一章后面都附有习题（及解答）作为正文的补充以减轻对正文的详细阐述。

开放式谐振腔与开放式波导的基本性质取决于衍射现象。因此这些系统的理论主要依据衍射理论的数学工具，这些数学早先应用于波动光学问题，无线电波传播理论与厘米波段的无线电技术（即天线、波导和空腔谐振器理论）而发展起来的。与普通的波导和谐振腔相比较，开放式系统的理论中认为波长较之腔的全部特征尺度（镜面宽度，镜与镜之间距离等等）是很小的，这就有可能引入许多近似方法，特别是被广泛应用的几何光学法（尤其是第七章）。

开放式系统的理论的主要内容是研究开放式谐振腔中本征振荡和开放式波导中的本征模式波，以及计算外加源对这些振荡和模式的激励。如果把它们看作“封闭式系统”（微波技术中应用的谐振腔和波导）的发展，那么这种对开放式系统的处理方法完全是自然的。这种处理方法只有当开放式系统中的振荡或波有弱衰减时才是正确的，所以直到现在这种方法在衍射和波传播的理论中几乎未被采用。

作者感谢И. Л. 卡皮查和В. А. 福克对此书的关心和支持。作者非常感激В. П. 贝科夫和С. П. 卡皮查对开放式系统的许多有关问题所作的有价值的评论。

⁺ 原文直译为“光子振荡器”。按我国习惯统一译为“激光器”。——译者注

⁺⁺ 原文为Излучение（研究），系Излучение（辐射）之误。——译者注

目 录

译者序	(i)
前言	(iii)
第一章 平行平面镜型开放式谐振腔	(1)
§ 1. 开放式谐振腔的基本特性	(1)
§ 2. 波导开口端的衍射	(3)
§ 3. 抛物型方程与波导开端的衍射	(7)
§ 4. 平面镜组成的二维谐振腔	(16)
§ 5. 矩形镜组成的开放式谐振腔	(22)
§ 6. 圆形镜组成的开放式谐振腔	(24)
§ 7. 本征频率频谱	(29)
习题	(31)
第二章 平面镜型开放式谐振腔的容差	(45)
§ 8. 用于任意形状镜的积分方程	(45)
§ 9. 镜的倾斜	(47)
§ 10. 镜的平行移动	(55)
§ 11. 镜的弯曲	(58)
习题	(59)
第三章 柱面镜型开放式谐振腔	(71)
§ 12. 椭圆坐标系和抛物型方程	(71)
§ 13. 焦散面	(74)
§ 14. 积分方程	(76)
§ 15. 共轴镜型开放式谐振腔	(79)
§ 16. 有限长度的柱面镜	(81)
§ 17. 柱面镜间的电磁场	(82)
习题	(84)
第四章 球面镜 (开放式) 谐振腔	(89)
§ 18. 椭球坐标系	(89)
§ 19. 圆口球面镜	(91)
§ 20. 矩形口球面镜	(93)
§ 21. 衍射现象	(95)
§ 22. 共心球面镜	(98)
§ 23. 电磁场、总评注	(100)
习题	(102)
第五章 圆柱形和桶形开放式谐振腔	(106)

§ 24. 圆柱形谐振腔	(106)
§ 25. 内焦散面	(110)
§ 26. 旋转长椭球坐标中的桶形谐振腔	(114)
§ 27. 旋转扁椭球坐标中的桶形谐振腔	(118)
§ 28. 球坐标下的桶形谐振腔	(120)
§ 29. 桶形谐振腔的积分方程	(122)
§ 30. 扇形截面的桶形谐振腔	(124)
§ 31. 电磁场	(126)
习题	(129)
第六章 开放式谐振腔的几何光学理论	(132)
§ 32. 椭圆柱面镜内的光线流	(132)
§ 33. “量子化”条件	(134)
§ 34. 量子化条件的解析推论	(137)
§ 35. 镜和焦散面	(141)
§ 36. 不同曲率镜构成的开放式谐振腔	(142)
§ 37. 在三轴椭球体中的射线流	(145)
§ 38. 拉梅函数的渐近公式和量子化条件	(149)
§ 39. 所得结果在开放式谐振腔中的应用	(153)
§ 40. 应用几何光学的可能性	(158)
习题	(160)
第七章 共焦镜开放式谐振腔中的衍射	(168)
§ 41. 共焦柱面镜的微分方程	(168)
§ 42. 标准方程法. 对函数 $g(u, v)$ 的研究	(171)
§ 43. 有焦散面的振荡模式	(177)
§ 44. 过渡型模式	(180)
§ 45. 无焦散面的模式	(181)
§ 46. 数值结果	(182)
§ 47. 圆形口共焦球面镜的微分方程	(185)
§ 48. 方程 (47.30) 的渐近积分	(189)
§ 49. 方程 (47.24) 的渐近积分	(192)
§ 50. 圆口共焦镜的衍射损失	(194)
§ 51. 在镜曲率半径对镜间距为任意比值下的衍射	(196)
习题	(199)
第八章 开放波导	(204)
§ 52. 开放波导的基本特性	(204)
§ 53. 由透镜或反射镜组成的开放波导中的旁轴射线流	(208)
§ 54. 开放波导中的衍射	(213)
§ 55. 关于自由空间中透镜上的衍射. 近似分离变量法	(218)
§ 56. 介质波导	(221)

§ 57. 其它类型的开放波导	(225)
习题	(226)
第九章 有介质的开放式谐振腔	(234)
§ 58. 介质球的电磁振荡	(234)
§ 59. 理想导电球和阻抗球的外部电磁振荡	(237)
§ 60. 矩形棱镜的二维电磁振荡	(239)
§ 61. 在平面镜之间的矩形棱镜	(244)
§ 62. 关于有介质的谐振腔的一般评论	(253)
习题	(254)
第十章 开放式谐振腔的激励 (一般理论)	(260)
§ 63. 衰减自由振荡和连续谱的本征函数	(260)
§ 64. 开放式谐振腔的强迫振荡	(266)
§ 65. 科希问题	(268)
§ 66. 电磁场的连续谱本征函数	(270)
§ 67. 给定电流下开放式谐振腔的激励	(273)
§ 68. 电磁场的科希问题	(275)
§ 69. 关于开放波导的激励	(277)
习题	(278)
第十一章 开放式谐振腔的激励 (特定问题)	(283)
§ 70. 开放式谐振腔的一维模型	(283)
§ 71. 径向偶极子激励球体	(289)
§ 72. 范数 N_s 的计算	(291)
§ 73. 共焦镜间模式的积分方程和范数	(293)
§ 74. 平行盘开放式谐振腔的激励	(297)
习题	(299)
第十二章 用于物理学和技术中的开放式谐振腔	(306)
§ 75. 开放式谐振腔和开放波导的应用	(306)
§ 76. 电子学中开放式谐振腔	(306)
§ 77. 测量技术中开放式谐振腔	(312)
§ 78. 频谱进一步稀疏的开放式谐振腔	(317)
§ 79. 天线技术中的开放式谐振腔	(320)
§ 80. 作为开放式谐振腔的超方向性的环形天线	(323)
§ 81. 两孔径间的能量传输	(327)
§ 82. 球形闪电?	(330)
习题	(331)
结束语	(341)
文献综述	(342)
参考文献	(345)
附录	(349)

第一章 平行平面镜型开放式谐振腔

§ 1. 开放式谐振腔的基本特性

在厘米波段的电磁波，广泛采用空腔谐振腔^{*}作为振荡系统。如果随着工作波长变化而按比例改变空腔谐振腔的尺寸，那么在向长波过渡时就会出现越来越庞大的系统。这最终将迫使采用由电容器和电感线圈组成的低频振荡回路。然而在向更短波长过渡时，空腔谐振腔将越来越小，其品质因数也将随着下降，因此在毫米波和亚毫米波段上，波长越短，空腔谐振腔的效能就越低。

若保持空腔谐振腔的尺寸不变，对于较短的波长，就要利用高指标数的模式振荡（高次振荡模式），其本征振荡频率高于厘米波段中应用的小指标数模式的振荡频率。但沿此途径不可能前进多远，因为封闭式谐振腔的本征频率频谱在向高频端过渡时趋于密集：在频率区间 $\Delta\omega$ 内振荡的个数 ΔN 等于：

$$\Delta N = \frac{V}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta\omega \quad (1.01)$$

式中， V ——腔体积， c ——光速。

这个渐近式（角频率 ω 越高，它越精确）在物理学文献中（例如文献〔1〕）通常称为瑞利-琼斯（Рэлей-Джинс）公式。对于矩形腔或其他规则形状（如球形、圆柱形）的腔，很容易导出此式。对于任意形状的腔，柯朗（Курант）^[2]已作出推导，此时在式（1.01）上要添加附加项，因此在数学文献中通常称之为柯朗定理。为进行比较，我们引出对于二维区域的类似公式

$$\Delta N = \frac{S}{\pi c^2} \omega \Delta\omega \quad (1.02)$$

（ S ——区域面积）而对于一维区域则

$$\Delta N = \frac{2L}{\pi c} \Delta\omega \quad (1.03)$$

（ L ——区域长度，此区域实为长度 L 的区间）。在这些公式中已考虑到电磁波的矢量特征，即考虑到存在两个独立的极化；对于标量振荡则应在这些式子右边乘以 $1/2$ 。

如同从式（1.03）所看到的那样，对于一维区域不存在频谱密集。一维振荡系统（例如弦的振动）的本征频率形成等距离频谱，简单地说，就是等差级数。对于二维，特别是对于三维区域，当转向更高频率时，则频谱密集。这就妨碍了对高次振荡模式的利用，因为由于腔壁焦耳损耗所引起的衰减系数在电导率为常数时正比于 $\sqrt{\omega}$ ，于是对固定尺寸的谐振腔在足够高的频率下其谐振曲线相互重叠，因而失去谐振特性。正如公式（1.01）所表示的那样，对于高频（指波长小于谐振腔的各个尺度）频谱分布，一般

* 这里的空腔谐振腔（объемный резонатор）系指通常在微波中应用的由金属壁包围的封闭式谐振腔。
——译者注

与谐振腔的形状无关，而仅由腔的体积来确定。

这些一般的见解迫使人们去探索新的振荡系统，而这些新的系统将不受式 (1.01) 的限制，并且还会有比空腔谐振腔更为稀疏的本征频率谱。这样的系统差不多同时由普洛赫洛夫^[3]、萨夫洛夫和汤斯^[4]提出来的，其结构是两块对置的大小相同的平行平面镜。

文献〔3〕（还可参看文献〔5〕和〔6〕）中的物理论证可大致表述如下：从几何光学的观点看，在二平行镜之间能有二个平行光束，在镜反射下这二光束相互转换。这些光束由于衍射而变宽（发散），形成该系统的本征振荡，这样的系统等价于上述的一维振动系统（见式 (1.03)，式中 L 应理解为二镜间距离）。

文献〔4〕中把镜间的本征振荡看作受扰动的柱形空腔谐振腔的本征振荡，该柱形腔的底面（端面）与镜面重合。可把封闭式柱形腔中每一振荡分解为一些平面波和表示成平行光线束的叠加。由于衍射（移去侧壁变为自由空间中的二镜时），这些束与镜面法线构成的夹角越小，它们受到的扰动也就越小。这夹角越小，则振荡的辐射损失应越小，振荡也就有更高的品质因数。对大多数的模式来说这夹角并不足够小，这些振荡模式便因辐射损失大而“退出竞赛”，从而达到频谱稀疏。

上述见解仅是提示性的，不能用来计算给定振荡系统的基本特性。然而这些见解却能预料从定量理论（参看下面§5-7）推导出的结果，同时还表明在类似的系统中辐射损失利多弊少。因为虽由于辐射使各种振荡模有附加衰减，但这种衰减对于不同模式差别很大，只对于少数模式它才是很小。由于辐射，本征频率频谱变得稀疏。假如空腔谐振腔中损耗具有选择性，那么这些损耗同样可以导致频谱稀疏，但是不论是焦耳损耗，还是腔壁上耦合小孔所造成的损失都不具有这种选择性。

开放式谐振腔是这样的系统，它具有足够高的品质因数的本征振荡模式，且其振荡伴随有向自由空间的辐射。上述由两个平面镜组成的开放式谐振腔的例子，阐明了辐射具有原则上的重要性。不是所有的开放式谐振腔都有弱衰减的振荡模式，如果上例中二镜不平行，那么在某个倾斜角下（见第二章）所有振荡模式的辐射会增大，大到谐振特性消失。这种性质使开放式谐振腔根本区别于封闭式谐振腔，而在封闭腔中，在任意形状的封闭曲面内都具有谐振特性。不过，必须注意到在封闭腔的腔壁上和填充介质中有损耗的情况下，谐振特性同样可能消失。因此，开放式谐振腔的辐射起着其他形式损耗的同样的作用。

在开放式系统中，只要有下述三个物理现象中的一个，就能出现高品质因数的振荡模式，这三个现象是：1）谐振腔的边缘反射；2）焦散面的形成；3）完全内反射。

边缘反射存在于由二个平行平面镜组成的开放式谐振腔中（见第一章）。这些谐振腔在作用原理上类似于声学中的开管和作为米波振荡系统的一段双根传输线。其差别在于：开放式谐振腔中平面镜间距比波长大得多，振荡的形成是由于“波导”波在接近截止频率的频率下反射的结果。

焦散面的形成能使球面镜开放式谐振腔中一系列本征振荡的辐射损失为极小（见第四章）。已知由于射线汇⁺的反射或折射往往形成焦散面，此焦散面与反射或折射的射

+ 射线汇原文是система лучей，这里借用光学中“光线汇”名词（见M. 玻恩，E. 沃尔夫，光学原理（上），科学出版社，1978年，第170页）转译的，二者含意相仿，但这里讨论的不限于可见光，故把光线改为射线。——译者注

线相切并将这些射线限制在焦散面的一侧。在射线不能穿过的焦散面外侧的那部分空间中波场很弱，并且在远离焦散面处波场很快（成指数地）衰减。在球面镜腔中某些振荡模式所形成的外焦散面能阻止这些振荡向外辐射，使其辐射损失小到可以忽略。

完全内反射出现在光密介质被光疏介质包围的系统中。例如，在被真空包围的介质棒中由于全内反射能够传输非衰减的单色波（见文献〔1〕，§66），所以置于二平面镜之间的一段介质棒，象介质环或介质球一样，是高品质因数的开放式谐振腔。类似的振荡系统将在第九章中研究。

在很多系统中，我们会同时与上述现象中二个或三个打交道（参看第七和第九章），但通常只有其中一个是主要的。区分出保证本征振荡有小衰减的主要因素，不仅能形成该系统中振荡的清楚概念和定性列出它们的性质，而且还可以作为建立定量理论和创造有新颖特性的开放式谐振腔的出发点。

§ 2. 波导开口端的衍射

正如在§1中指出的那样，在平行平面镜开放式谐振腔中，小的辐射损失与下述情况有关：这种腔中的本征振荡模式当频率稍高于截止频率时，具有平行平面之间的波导波的特征。正如波导开口端衍射理论[†]中所阐明的那样，这些模式波当它们接近谐振腔边缘时，几乎不产生辐射而被反射回来，其反射系数的模接近于1。

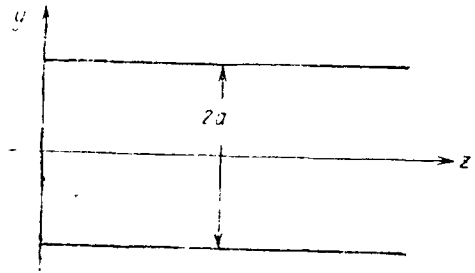


图1 开口波导

从以后的分析中可以知道，这一概念可以建立平面镜开放腔的定量理论，这样，此定量理论隐含有波导开口端的衍射理论。

现在让我们以稍不同于在书〔8〕中所采用的观点，但仍用〔8〕中所叙述的数学工具来研究波导开口端（图1）的衍射[†]。另一种物理上更为直观、数学上更为简单的方法（尽管不够完整）将在§3中加以叙述。

与时间有关的因子取作 $e^{-i\omega t}$ ，将认为波数 $k = \frac{\omega}{c}$ 与波导板间距 $2a$ 有关，其关系式为

$$ka = \pi (q/2 + p) \quad (2.01)$$

式中， q ——大整数，而 $|p| < 1/2$ 。

考虑一 $H_{0,q}$ 或 $E_{0,q}$ 模式波到达波导的开口端，场与 x 无关，根据式(2.01)其频率接近于它的截止频率（当 $p = 0$ 时它等于截止频率）。这模式波的衍射场由函数 $F(\omega)$ 给出，此函数与 $y = a$ 的上板上的表面电荷密度 $f(z)$ 的关系式为

[†] 这一节中介绍的平面波导开口端的衍射理论系根据作者另一本书《衍射理论与因子化方法》〔6〕中第一章的内容作小的修改并压缩写成。这部分理论对读者较生疏，介绍又过于简略，一般不易读懂。为此，译者根据文献〔8〕中的内容在附录中作补充介绍。如有些读者不熟悉本节所采用的数学工具，不妨对结论加以承认，因为以下各章作者大多采用其他近似方法（见§8）来讨论。本节内容不影响以后各章的阅读。——译者注

$$f(z) = \int_c e^{i\omega z} F(\omega) d\omega \quad (2.02)$$

式中回路 c 基本上沿实轴穿过,但从下面绕过对应入射波的 $\omega = -\omega_0$ 点.函数 $F(\omega)$ 由泛函方程(见文献〔8〕的第一章)确定.

$$\int_c e^{i\omega z} F(\omega) d\omega = 0 \quad \text{当 } z < 0, \\ \int_c e^{i\omega z} L(\omega) F(\omega) d\omega = 0 \quad \text{当 } z > 0, \quad (2.03)$$

其中,对于 $H_{0,q}$ 模

$$L(\omega) = \frac{k}{v} [1 - (-1)^q e^{2iva}], \quad (2.04)$$

而对于 $E_{0,q}$ 模

$$L(\omega) = \frac{v}{k} [1 - (-1)^q e^{2iva}]. \quad (2.05)$$

在条件¹

$$|w| \ll k, \quad \frac{2a}{k^3} |w|^4 \ll 1 \quad (2.06)$$

下,函数(2.04)和(2.05)可用更简单的解析函数

$$L(\omega) = 1 - e^{i(2\pi p - \omega^2 a/k)} \quad (2.07)$$

来代替,这是因为在指数中令

$$v = \sqrt{k^2 - \omega^2} = k - \frac{\omega^2}{2k} \quad (2.08)$$

而在括号前乘子中令 $v = k$.

当 $\omega = \pm \omega_j$ 时,函数(2.07)变为零,其中

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k}{2a}} s_j, \quad s_j = \sqrt{4\pi(j+p)}. \quad (2.09)$$

容易看出, ω_j 是平面波导中 $H_{0,q-z_j}$ 或 $E_{0,q-z_j}$ 模式的波数〔如果用于式(2.01)和(2.06)中,则是近似的〕.当 $j = 1, 2, \dots$ 时,在式(2.09)中得到可传输波;当 $j = -1, -2, \dots$ 时,得到衰减波(此时 $S_j = i |S_j| = i\sqrt{4\pi(-j-p)}$).值 $j = 0$ 的模式对应入射波 $H_{0,q}$ 或 $E_{0,q}$,当 $p > 0$ 时此波可传输,而当 $p < 0$ 时它则衰减.

下面来求解带有整函数(2.07)的方程(2.03),为此一开始就把与条件(2.06)的近似关系引入到衍射问题.函数(2.07)分解因子为

$$L(\omega) = L_+(\omega) L_-(\omega), \quad L_-(\omega) = L_+(-\omega), \quad (2.10)$$

式中 $L_+(\omega)$ 是在 $\text{Im } \omega \geq 0$ 的上半平面内的解析函数,它满足当 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时 $L_+(\omega) \rightarrow 1$ 的条件,并可由下式确定:

$$L_+(\omega) = e^{v(s,p)}, \quad s = \sqrt{\frac{2a}{k}} \omega, \\ U(s,p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - e^{i2\pi p - \frac{t^2}{2}}) \frac{dt}{t - se^{i\pi/4}}. \quad (2.11)$$

1) 这些条件的意义是,我们考察的波场在镜($y = \pm a$ 的板)平行的方向上的变化将比与镜垂直方向上的变化慢得多.如果所考察的波是平面波(或波导模式 $H_{0,q}$ 和 $E_{0,q}$,其中每一个都是两个平面波之和)的叠加,那么这些平面波的传播方向应与镜的法线构成小角度.场随切向及法向坐标的变化上的差别将在§3中过渡到抛物型方程时被利用到,这抛物型方程能给出有关波导开口端衍射的更为直观的概念.

函数 $U(s, p)$ 在书〔8〕中已作详细研究并列出了数表。求解方程(2.03)，得到函数 $F(w)$ 和 $f(z)$ 有以下形式:

$$F(w) = \frac{A}{2\pi i} \frac{L_+(w_0)}{(w+w_0)L_-(w)} \quad (2.12)$$

和

$$f(z) = A(e^{-iw_0 z} + \sum_j R_{0,j} e^{iw_j z}), \quad (2.13)$$

式中 A 是入射波的电流振幅，而

$$R_{0,j} = -i \frac{e^{U(s_0,p)+U(s_j,p)}}{(s_0+s_j)S_j} \quad (2.14)$$

是入射波转换为指标为 j ($j \neq 0$) 的模式波的传递系数，而 $R_{0,0}$ —— 入射波的电流反射系数。

当入射波取 $j=1$ 和 $j=-1$ 等，而不是 $j=0$ 的情况下，可得到类似的公式。所有这些公式都可从严格的表达式（文献〔8〕中第一章的习题6）得到，如果在这些式中令 $q \gg 1$, $p \sim 1$ 和 $|w_j| \ll k$ ($j=0, \pm 1, \dots$) 的话。

图2示出了当 $-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$ 时系数 $R_{0,0}$, $R_{0,1}$, $R_{1,1}$ 和 $R_{1,0}$ 的模随 p 的变化关系。由于存在关系式

$$U(is, p) = U^*(s, p) \quad (2.15)$$

我们就有

$$\begin{aligned} |R_{-1,-1}(p)| &= |R_{1,1}(-p)|, \\ |R_{-1,0}(p)| &= |R_{1,0}(-p)|, \\ |R_{0,-1}(p)| &= |R_{0,1}(-p)|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

这样，在小的 p 值下，指标 $j=0$ 的波要受到强烈的反射，几乎不能转换为 $j=\pm 1$ 的模式。在 $|p| < \frac{1}{2}$ 下后二个模式波在端点的反射很弱 ($|R_{1,1}|$ 和 $|R_{-1,-1}| < 0.1$)，也不能导致有辐射损失小的振荡。所以，下面只有以下的反射系数

$$R_{0,0} = -|R_{0,0}| e^{i\theta_{0,0}} \quad (2.17)$$

才是重要的，其相位 $\theta_{0,0}$ 示于图3；由于关系式(2.15)，其相位是 p 的奇函数，同时 $|R_{0,0}|$ 则是偶函数。在小 p 值下系数(2.17)可有以下形式¹⁾

$$R_{0,0} = -e^{i\beta(1+i)^{s_0}} \quad (2.18)$$

式中

$$\beta = -\frac{\xi(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = 0.824 \quad \text{和} \quad s_0 = \sqrt{4\pi p}, \quad (2.19)$$

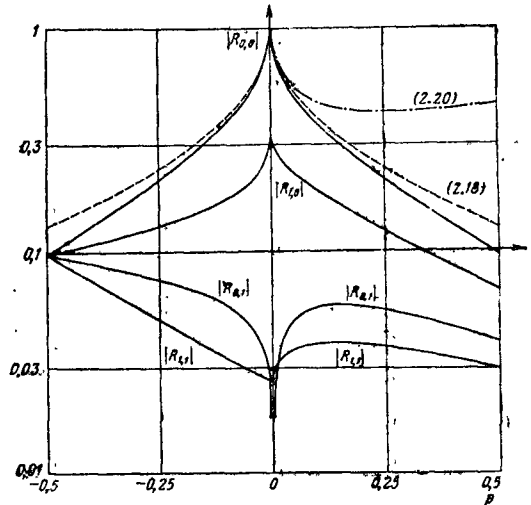


图2 电流反射系数和传递系数的模对参数 p 的关系。

1) 如果运用文献〔8〕中的公式(B.18)和(B.19)，就容易从式(2.14)推导出 $R_{0,0}$ 的表达式(2.18)。注意在文献〔8〕中式(B.18)中印刷有错， $\frac{1}{2}$ 应为 $-\frac{1}{2}$ 。

而 $\zeta(z)$ —— 里曼 ζ 函数

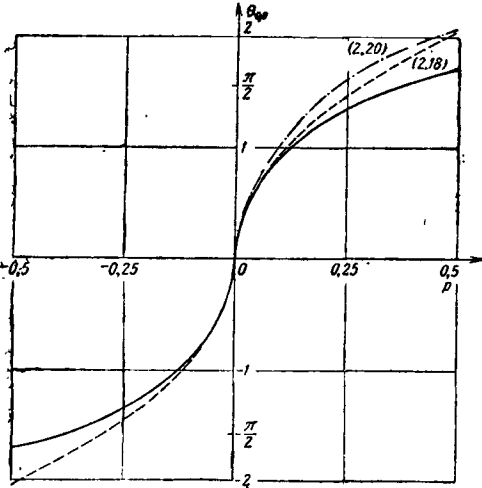


图 3 反射系数相位与参数 p 的关系

下面我们只用品式 (2.18)。

上面研究的逼近公式适用于高指标数模式在截止频率附近 ($ka \gg 1$) 时的反射。因此会很自然地提出问题：什么时候这些逼近规律有效？查看书〔8〕中给出的图可知，在一平面波导 ($ka \approx \frac{3\pi}{2}$) 中对于 $E_{0,0}$ 和 $H_{0,0}$ 模逼近公式已定性适用；随着 ka 的增大，即随波数 k 的增大，这些公式的精确度将迅速提高。

我们注意到，这逼近规律性不受尖锐边缘附近的电流分布特性的影响，而后者对于不同极化的波，即对于平面波导中 $H_{0,0}$ 和 $E_{0,0}$ 模是不同的。此外，所得到的解 (2.13) 中不包含有在外表面壁上流动的电流〔因为式 (2.07) 是整函数〕。所以逼近公式对于有法兰盘或壁厚度有限的波导是正确的（没有必要是金属壁，但要保证壁有全反射，例如由多层干涉造成的全反射）。在这里的情况唯一重要的是使反射表面与平面波导的表面（图 1）相同。

上面所得的结果具有如下的物理意义。大家所熟知的，可将平面波导中传输波表示成二个平面波之和，即二个平行射线束。如果波频率接近其截止频率，那么这些射线与波导壁的法线的夹角 ϵ_0 很小（图 4），所以，由于衍射的结果容易转折为角 $2\epsilon_0$ ，因而形成反射波。几乎没有转换成其他模式的现象，因为这样的转换需要将射线转成大得多的角度。反射系数不单是与角度 ϵ_0 有关，还与参量 $s_0 = \epsilon_0 \sqrt{2ka}$ 有关， s_0 是这种射线束的衍射发散的特征量，这射线束在二个半无限大壁之一上被反射，另一壁安放在距离 $2a$ 处，它使束折回形成反

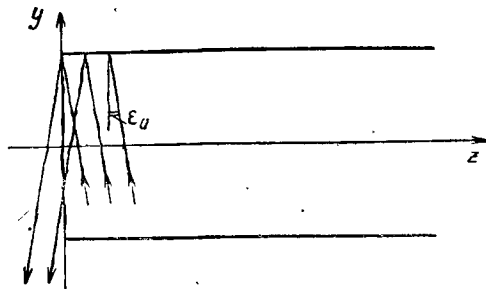


图 4 对式 (2.18) 的解释

在图 2 和 3 上用虚数标出的是按近似公式 (2.18) 计算出的函数 $|R_{0,0}|$ 和 $\theta_{0,0}$ ，正如从图中看到的，当 $|p| < 0.05$ ，这个公式给出的曲线是精确的，并可定性地一直应用到 $|p| \approx 0.5$ 。后一种情况有利于把式 (2.18) 与其他一些公式（在小的 s_0 下与前者等价）加以区别，其他公式的一个例子是

$$R_{0,0} = - \frac{1 + i\beta(1+i)s_0/2}{1 - i\beta(1+i)s_0/2}, \quad (2.20)$$

按式 (2.20) 算出的 $|R_{0,0}|$ 和 $\theta_{0,0}$ 在图 2 和 3 上用点划线标出。我们看到，在有限 s_0 值下公式 (2.20) 不再适用。因此

† 原文此处直译为“波的指标数”，与上句话逻辑上不连贯，英译本改为“波数”，现按英译本译出。——译者注

射波。

如果用抛物型方程法研究波导开端处衍射，这物理图象显得更为清晰。这将在下一节中进行研究。

§ 3. 抛物型方程与波导开端的衍射

抛物型方程是由列昂托维奇和福科^{9,10}在分析无线电波传播时首先提出的。以后曾不止一次地应用于衍射理论中，以获得在波长较所有特征尺寸小得多的条件下的近似（渐近）解。因为开放式谐振腔一般能满足这条件，抛物型方程法在建立开放腔理论中就得到广泛应用。在这一节中我们将利用抛物型方程来研究平面波导开端的衍射，波导的反射表面决定于下式

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad z = \pm l, \quad (3.01)$$

并且认为

$$kl \gg 1. \quad (3.02)$$

这是与在§2中研究过的同一问题，但其符号则参照开放式谐振腔理论中采用的符号（见§4和以后章节）作了改变。我们将采用§2中所作的假定来求解这一问题，即假定到达开放端处波的频率接近其截止频率。

求解波动方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0 \quad (3.03)$$

的解 $\phi = \Phi(x, z)$ ，并使其满足镜〔即式(3.01)给出的半平面〕上条件 $\phi = 0$ ，解取如下形式：

$$\Phi = W(x, z) e^{ikz} - (-1)^q W(x, -z) e^{-ikz}, \quad (3.04)$$

因为 Φ 或是 z 的偶函数，或是 z 的奇函数（ q 是整数）。式(3.04)中分离出 $e^{\pm ikz}$ 的原因，是由于行波场及由它引起的衍射场具有（非均匀）平面波的特征，这些波与 x 坐标弱相关，所以函数 $W(x, z)$ 与指数因子相比是慢变函数。要求使(3.04)式右边每一项都满足方程(3.03)，函数 W 就满足方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (3.05)$$

在这方程中略去 $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$ 项，就使问题归结为求解抛物型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (3.06)$$

这里考虑到¹¹复数波振幅 W 的横向扩散（在 x 方向），而舍弃了纵向扩散（沿 z 轴，在我们的问题中波的传输方向与 z 轴成小角度）。同 W 随 x 的变化相比， W 随 z 的变化很微弱，故可以略去。如果改为无量纲变量，就容易对这些变化关系作出估计。这将在本节末尾进行，现在则要利用方程(3.06)把问题的求解进行下去。

抛物型方程有以下的格林函数（当 $z > z'$ ）：

$$G(x-x', z-z') = \sqrt{\frac{k}{2\pi(z-z')}} \exp i \left[\frac{k(x-x')^2}{2(z-z')} - \frac{\pi}{4} \right], \quad (3.07)$$

它满足极限条件

$$\lim_{z \rightarrow z'+0} G(x-x', z-z') = \delta(x-x'), \quad (3.08)$$

而当 $z < z'$ 时, 格林函数为零. 容易验证, 当 $z > z'$ 时, 有以下关系式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x', z-z') dx = 1. \quad (3.09)$$

式 (3.08) 右边是 δ 函数, 它满足类似的关系式

$$\int_{x'-\Delta x}^{x'+\Delta x} \delta(x-x') dx = 1, \quad (3.10)$$

式中 Δx 是任意小的正值.

式 (3.04) 中函数 $W(x, z)$ 是来自下镜 $x = -l$, 沿正 z 方向传输波的振幅 (时间因子是 $e^{-i\omega t}$ 和 $k = \frac{\omega}{c}$). 当 $z = -l$ 和 $x < 0$, 这种波显然就不存在, 所以有

$$W(x, -l) = 0, \quad x < 0. \quad (3.11)$$

还有, 由边界条件 $\phi = 0$ 导出关系式

$$W(x, -l) = e^{i(2kl - \pi q)} W(x, l), \quad \text{当 } x > 0. \quad (3.12)$$

考虑到条件 (3.11), 则方程 (3.06) 的解有以下的形式:

$$W(x, z) = \int_0^{\infty} G(x-x', z+l) W(x', -l) dx', \quad z > -l. \quad (3.13)$$

令 $z = l$, 并利用条件 (3.12), 使得到积分方程

$$W(x, -l) = e^{i(2kl - \pi q)} \int_0^{\infty} G(x-x', 2l) W(x', -l) dx', \quad (3.14)$$

此方程很容易转换成

$$f(\xi) = \frac{e^{i(2\pi p - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{i\frac{(\xi - \xi')^2}{2}} f(\xi') d\xi' \quad (3.15)$$

式中

$$f(\xi) = W(x, -l), \quad (3.16)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{k}{2l}} x, \quad (3.17)$$

而参量 p 由下式给出:

$$2\pi p = 2kl - \pi q, \quad (3.18)$$

由此

$$kl = \pi(q/2 + p), \quad (3.19)$$

它与表达式 (2.01) 相符. 以后将认为 $|p| < \frac{1}{2}$, 或甚至有 $|p| \ll 1$; 这样从条件 (3.02) 得出 q 是大整数.

假如我们研究的不是半无限长波导, 而是两边都是无限长的波导, 那么在积分方程

(3.15) 中将以 $+\infty$ 和 $-\infty$ 作上、下限。积分上、下限为 ∞ 、 $-\infty$ 的方程有以下解⁺：

$$f(\xi) = \text{常数} \times e^{\pm i s_j \xi}, \quad s_j = \sqrt{4\pi(j+p)}, \quad (3.20)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

这里为明确起见，设在实数 p 下要么 $s_j = |s_j|$ ，要么 $s_j = i |s_j|$ 。求解式 (3.20) 近似地对应在平行平面 $z = \pm l$ 之间的传输或衰减的波导波，它可分解为二个平面波，其波矢量 (k_x, k_y, k_z) 满足条件

$$|k_x| \ll k, \quad k_y = 0, \quad k_z \simeq \pm k. \quad (3.21)$$

现在我们考虑 (对 $p > 0$) 在二个平行平面镜 ($z = \pm l, x > 0$) 构成的平面波导的开端处 $j = 0$ 模式的衍射。为此我们求解的方程 (3.15) 有以下形式的解⁺⁺：

$$f(\xi) = A(e^{-i s_0 \xi} + \sum_j R_{0,j} e^{i s_j \xi}), \quad (3.22)$$

式中 $Ae^{-i s_0 \xi}$ 项是 $j = 0$ 横行波，级数项包括所有沿正 x 方向传输或衰减的模式，它们在波导端发生，振幅为 $AR_{0,j}$ 。把表达式 (3.22) 代入方程 (3.15)，就得到未知量 $R_{0,j}$ 的方程⁺⁺⁺

$$e^{-i s_0 \xi} F(-\xi - s_0) + \sum_j R_{0,j} e^{i s_j \xi} F(-\xi + s_j) = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (3.23)$$

式中

$$F(s) = \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{i \frac{t^2}{2}} dt \quad (3.24)$$

是复数菲涅耳积分。

为了从方程 (3.23) 得到系数 $R_{0,0}$ 的粗略估计，设 $\xi = 0$ ，除 $R_{0,0}$ 外并忽略所有的 $R_{0,j}$ ，于是

$$R_{0,0} = \frac{F(-s_0)}{F(s_0)}. \quad (3.25)$$

此外，如果量 p 和 s_0 ⁺⁺⁺⁺ 很小，即行波的频率离其截止频率足够近时，那么公式 (3.25) 就转为公式 (2.20) ⁺⁺⁺⁺⁺，而且量

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1.13, \quad (3.26)$$

它与 § 2 中得到的精确值 $\beta = 0.824$ 有差别。

用维纳-霍普夫-福科方法能精确求解方程 (3.15)，为此要运用傅里叶积分变换和

⁺ 可用反证法证明此解。把式 (3.20) 的解代入下限改为 $-\infty$ 的积分方程 (3.15) 中，得

$$e^{\pm s_j \xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(2\pi p - \frac{\pi}{4})} e^{-\frac{i}{2} s_j^2 \xi \pm s_j \xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2} [\xi' + (\pm s_j - \xi)]^2} d\xi'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{\pm s_j \xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i z^2} dz,$$

按郭敦仁，数学物理方法，人民教育出版社，1978年，p.113，其复数菲涅耳积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i z^2} dz = \sqrt{\pi} e^{i \frac{\pi}{4}}.$$

这就证明式 (3.20) 是下限改为 $-\infty$ 的方程 (3.15) 的一个特解。——译者注

⁺⁺ 解的形式可写成式 (3.20) 的形式，读者可参看式 (2.13)。——译者注

⁺⁺⁺ 方程 (3.23) 的证明与译者对式 (3.20) 的证明类似，可参看上页注。——译者注

⁺⁺⁺⁺ 原文此处误为 s ，应为 s_0 。——译者注

⁺⁺⁺⁺⁺ 对此可证明如下：把式 (3.24) 代入式 (3.25) 得