



信息科学技术专著丛书

激光传输与控制

吴国华 编著

Laser Propagation and Control

非外借



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com



信息科学技术专著丛书

激光传输与控制

吴国华 编著



北京邮电大学出版社
[www. buptpress. com](http://www.buptpress.com)

内 容 简 介

本书是一本理论专著。全书对激光在自由空间、光学系统和大气湍流中传输的研究方法和主要论题做了系统深入的研究。其中,第1章理论基础,阐述激光光学的基本理论基础、研究方法,以及部分相干光传输的基本理论。第2章激光的方向性,阐述完全相干光束和部分相干光束产生的必要条件。第3章几种特殊光束的传输特性,研究单束和多束平顶光束的传输特性,研究径向偏振光的焦移现象,研究空心光束的远场矢量结构。第4章大气湍流,介绍大气湍流模型,阐述光束在大气湍流中的传输理论。第5章大气湍流效应,研究大气湍流引起的光束展宽,光束漂移,以及光束质量因子的变化。第6章应用实例——鬼成像,介绍鬼成像的研究进展,以及大气湍流中的鬼成像。

本书可作为高等院校光学及相关专业本科生、研究生的参考书籍,为他们在相关领域研究工作的开展提供帮助。

图书在版编目(CIP)数据

激光传输与控制 / 吴国华编著. -- 北京:北京邮电大学出版社, 2021. 8

ISBN 978-7-5635-6497-2

I. ①激… II. ①吴… III. ①激光—光传输技术—研究 IV. ①TN24②TN818

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 170029 号

策划编辑:姚 顺 刘纳新 责任编辑:毋燕燕 封面设计:七星博纳

出版发行:北京邮电大学出版社

社 址:北京市海淀区西土城路 10 号

邮政编码:100876

发行部:电话:010-62282185 传真:010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销:各地新华书店

印 刷:唐山玺诚印务有限公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:11.5

字 数:214 千字

版 次:2021 年 8 月第 1 版

印 次:2021 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-6497-2

定 价:39.00 元

· 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前 言

自从 1960 年美国科学家梅曼发明第一台激光器以来，激光技术及其在众多领域的应用受到了各国科学家的重视。在激光器的实际工程应用时，激光器输出的激光束需要通过一些光学系统、自由空间或大气信道的传输后，才能到达激光与物质相互作用面。激光在大气中传输时，大气湍流会对激光传输产生一些影响。这些效应限制了大气环境中激光技术的实际应用。经过传输后的激光参数可能无法满足激光应用的要求，因此激光传输与控制的一系列问题受到研究者们的高度关注和深入研究。

激光传输与控制研究的内容十分丰富，学科涉及面也比较广泛。激光传输与控制主要研究激光束通过各种光学系统、自由空间和各种介质传输后的变化规律。大气湍流会对激光传输产生影响，这些湍流效应包括：光束展宽、光束漂移、光强起伏，以及光束质量因子的变化等。激光在大气中传输特性，尤其是部分相干光在大气中的传输特性研究一直是学术界极为关注的热点。对于照明激光器而言，空间相干性较差的激光束对其照明光斑更加有益。当大气湍流参数一样时，大气湍流对部分相干光束的影响会小于完全相干光束的影响。在长距离照明和探测中，这对如何选择激光束的参数提供了一些指导。同时激光的偏振也会对其在大气湍流中的传输特性产生影响。弄懂激光在光学系统、自由空间和大气湍流中的传输规律，抑制大气湍流对激光传输的影响，已成为激光在大气中应用的一个基础性问题。系统掌握激光光学的基础知识和研究方法，并将其用于解决激光应用的实际问题，对于从事激光应用的人员来说都是必备的。

本书以激光束描述、传输变换和激光在大气湍流中的传输特性为重点内容编写。全书从内容上可以分为以下几部分：第 1 章理论基础；第 2 章激光的方向性，研究激光束产生的必要条件，有代表性的高斯光束和部分相干光束（ J_0 相关的 Shell 模型光束）；第 3 章几种特殊光束的传输特性，研究几种特殊光束在自由空间和光学系统中的

传输特性，主要包括单束和多束平顶光束的传输特性、径向偏振光的焦移，空心光束远场矢量结构等；第4章大气湍流；第5章大气湍流效应，研究包括光束展宽、光束漂移和光束质量等；第6章应用实例——鬼成像，介绍鬼成像的研究进展，以及大气湍流中的鬼成像。由于选材的前沿性和作者水平有限，书中难免有一些不妥之处，敬请读者朋友谅解，并批评指正。在此作者表示衷心感谢。

目 录

第 1 章 理论基础	1
1.1 自由空间麦克斯韦方程的解	1
1.1.1 角谱解	3
1.1.2 衍射积分解	6
1.2 部分相干光的传输	9
1.2.1 部分相干光的基本理论	9
1.2.2 部分相干光的传输变换公式	12
1.3 光学中的矩阵及矩阵变换	17
1.3.1 几何光学中的矩阵	18
1.3.2 高斯光束的矩阵变换	28
1.3.3 偏振光学变换矩阵	31
本章参考文献	43
第 2 章 激光的方向性	45
2.1 描述部分相干光的数学-物理模型	45
2.1.1 高斯-谢尔模型光束	46
2.1.2 J_0 相关的 Shell 模型光束	47
2.2 Gauss 光束产生的必要条件	47
2.3 J_0 相关的矢量 Shell 模型光束产生的必要条件	50
本章参考文献	56



第 3 章 几种特殊光束的传输特性	58
3.1 平顶光束的传输和组束特性	58
3.1.1 描述平顶光束的数学—物理模型	58
3.1.2 单束平顶光束的传输特性	62
3.1.3 多束平顶光束组束后的传输特性	68
3.2 径向偏振光的焦移现象研究	73
3.2.1 径向偏振光的产生和应用	73
3.2.2 径向偏振光的焦移	75
3.3 空心光束在远场的矢量结构分析	81
3.3.1 描述空心光束的几种模型	81
3.3.2 描述空心 Gauss 光束的产生	84
3.3.3 空心 Gauss 光束的矢量结构分析	86
本章参考文献	90
第 4 章 大气湍流	94
4.1 大气湍流模型	94
4.2 光束在大气湍流中的传输理论	97
4.2.1 Born 近似理论	98
4.2.2 Rytov 近似理论	99
4.3 大气湍流对光束传输的影响及数值仿真	101
4.3.1 相位起伏,强度起伏和到达角起伏	101
4.3.2 湍流介质中激光传输的数值仿真	106
本章参考文献	110
第 5 章 大气湍流效应	112
5.1 激光的方向性	112
5.2 光束展宽	119
5.2.1 水平路径	119

5.2.2 斜程路径	130
5.3 光束漂移	137
5.4 光束质量	143
本章参考文献	148
第6章 应用实例——鬼成像	154
6.1 国内外动态	154
6.2 部分相干光鬼成像的原理	157
6.3 大气湍流中鬼成像的原理	159
本章参考文献	167

第 1 章

理论基础

1.1 自由空间麦克斯韦方程的解

电磁场的普遍运动规律由麦克斯韦方程组^[1-3]：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

以及物质方程：

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.7)$$

来描述。其中 \mathbf{E} 为电场强度， \mathbf{D} 为电位移矢量， \mathbf{B} 为磁感应强度， \mathbf{H} 为磁场强度， ρ 为自由电荷密度， \mathbf{J} 为电流密度， σ 为电导率， ϵ_0 和 μ_0 分别为真空中的电容率和磁导率， \mathbf{P} 为电极化强度， \mathbf{J} 为电流密度， \mathbf{M} 为磁化强度。

方程(1.1)是法拉第定律的微分形式。其物理意义：随时间变化的磁场会产生电场。等式右边的负号表示随时间变化的磁场感生的电流方向

总是阻碍磁场的变化,即楞次定律。如果已知磁场随时间变化,就可以求出感生电场的旋度,即感生电场绕该点旋转的变化趋势。反之,如果已知感生电场,就可以求出磁场随时间的变化。

方程(1.2)是安培-麦克斯韦定律的微分形式。其物理意义:电流以及随时间变化的电场会产生磁场。 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 是位移电流,即变化的电场会产生磁场,电场的变化也是磁场的源。方程(1.1)和方程(1.2)表明变化的电场会产生变化的磁场,变化的磁场能产生变化的电场,两者相互激化,从而可以在真空中传播。

方程(1.3)是电场高斯定律的微分形式。其物理意义:电荷产生电场,电荷是电场的源,电荷产生的电场从正电荷出发,终止于负电荷。如果某一位置有正电荷,该位置的散度就为正,电场从该点出发。根据电位移矢量的空间分布,就可以计算出该位置的自由电荷密度。如果已知自由电荷密度,就可以确定电场的散度。

方程(1.4)是磁场高斯定律的微分形式。其物理意义:磁场的散度为零,磁场总是从N极出发,终止于S极,但是N极和S极总是成对出现,不存在单独的N极或者S极。磁场的这个特性可以判断矢量场是否是磁场。

在自由空间中, $\rho=0, \mathbf{J}=0$,因此,自由空间中麦克斯韦方程组可表示为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.11)$$

物质方程可表示为:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.13)$$

平板区域角谱解结构示意图如图 1.1 所示。

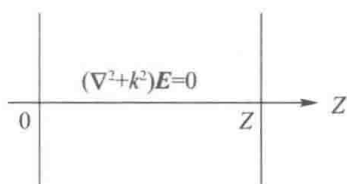


图 1.1 平板区域角谱解结构示意图

假设一单色平面波

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (1.15)$$

在自由空间中传输, 传输区间为:

$$0 \leq z \leq Z \quad (1.16)$$

将方程(1.14)和(1.15)代入方程(1.8)~方程(1.11)中, 约去共同因子 $e^{-i\omega t}$ 后可得:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.20)$$

去方程(1.17)的旋度并利用方程(1.18), 可得:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \quad (1.21)$$

由矢量场的性质可得:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.22)$$

将方程(1.22)和方程(1.19)代入方程(1.21), 可得:

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = 0 \quad (1.23)$$

其中

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad (1.24)$$

1.1.1 角谱解

假设其电场强度可表示为傅里叶积分形式, 即:

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(u, v, z) e^{i(ux+vy)} dudv \quad (1.25)$$

其中 $(r=x, y, z)$ 。将方程(1.25)代入方程(1.23), 可得:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} [\nabla^2 + k^2] [\tilde{E}(u, v, z) e^{i(ux+vy)}] dudv = 0 \quad (1.26)$$

经过微分运算后, 方程(1.26)可表示为:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left[(-u^2 - v^2 + k^2) \tilde{E}(u, v, z) + \frac{\partial^2 \tilde{E}(u, v, z)}{\partial z^2} \right] e^{i(ux+vy)} dudv = 0 \quad (1.27)$$

方程(1.27)对任意的 x, y 都成立, 所以被积函数必须为零。也就是说, 函数 $\tilde{E}(u, v, z)$ 满足以下微分方程:

$$w^2 \tilde{E}(u, v, z) + \frac{\partial^2 \tilde{E}(u, v, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (1.28)$$

其中

$$w^2 = k^2 - u^2 - v^2$$

方程(1.28)的通解可表示为:

$$\tilde{E}(u, v, z) = A(u, v) e^{iuz} + B(u, v) e^{-iuz} \quad (1.29)$$

其中

$$w = \begin{cases} +\sqrt{k^2 - u^2 - v^2}, & \text{若 } u^2 + v^2 \leq k^2 \\ -i\sqrt{u^2 + v^2 - k^2}, & \text{若 } u^2 + v^2 \geq k^2 \end{cases} \quad (1.30)$$

因此, 将方程(1.29)代入方程(1.25), 可得:

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(u, v) e^{i(ux+vy+uz)} dudv + \iint_{-\infty}^{\infty} B(u, v) e^{-i(ux+vy+uz)} dudv \quad (1.31)$$

为了更好地理解方程(1.31), 下面将探讨其物理意义。

(1) $e^{i(ux+vy+uz)}$, 当 $w = +\sqrt{k^2 - u^2 - v^2}$, $u^2 + v^2 \leq k^2$ 。很显然, 这是一个从左边界 $z=0$ 平面传播到右边界 $z=Z$ 平面的均匀平面波;

(2) $e^{i(ux+vy+uz)}$, 当 $w = +i\sqrt{u^2 + v^2 - k^2}$, $u^2 + v^2 \geq k^2$ 。这是一个从左边界 $z=0$ 平面传播到右边界 $z=Z$ 平面, 振幅随着传输距离指数衰减的波;

(3) $e^{i(ux+vy-uz)}$, 当 $w = +\sqrt{k^2 - u^2 - v^2}$, $u^2 + v^2 > k^2$ 。很明显, 这是一个从右边界 $z=Z$ 平面传播到左边界 $z=0$ 平面的均匀平面波;

(4) $e^{i(ux+vy-uz)}$, 当 $w = +i\sqrt{u^2 + v^2 - k^2}$, $u^2 + v^2 > k^2$ 。这是一个从右边界 $z=Z$ 平面传播到左边界 $z=0$ 平面, 振幅随传输距离指数增大的波。

假设半空间内 $n(\omega) = 1$, 场从 $z=0$ 平面处已知传播到无限远。很明显, 半空间中的角谱解可以看成是平板区域中角谱解的一种特殊情况, 即 $z \rightarrow \infty$ 。因此, 半空间中的角谱解可用方程(1.31)来表示。为了简化该方程, 可将方程(1.31)右边的第 2 项分解成均匀波和非均匀波两部分, 即:

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} B(u, v) e^{i(ux+vy+uz)} \, dudv \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq k_0^2} B(u, v) e^{i(ux+vy-|w|z)} \, dudv + \iint_{u^2+v^2 \geq k_0^2} B(u, v) e^{i(ux+vy+|w|z)} \, dudv \end{aligned} \quad (1.32)$$

其中 k_0 是真空中波数。因为当 $u^2 + v^2 \geq k_0^2$ 时, $|w| = \sqrt{u^2 + v^2 - k_0^2}$ 。从方程(1.32)可以看出, 其右边第 2 项中被积函数的振幅随着传输距离 z 的增大而增大, 当 $z \rightarrow \infty$ 时, 其值也为无穷大。这在物理上是不可能的。因此

$$B(u, v) = 0 \quad (1.33)$$

所以, 麦克斯韦方程在半空间的角谱解可表示为:

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(u, v) e^{i(ux+vy+uz)} \, dudv \quad (1.34)$$

为了以后讨论方便, 做以下变量代换:

$$u = k_0 p, v = k_0 q, w = k_0 m \quad (1.35)$$

因此, 方程(1.34)变为:

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(p, q) e^{ik_0(px+qy+mz)} \, dpdq \quad (1.36)$$

其中

$$a(p, q) = \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} E(x', y', 0) e^{-ik_0(px'+qy')} \, dx' dy' \quad (1.37)$$

$$m = \begin{cases} +\sqrt{1-p^2-q^2}, & \text{若 } p^2+q^2 \leq 1 \\ i\sqrt{p^2+q^2-1}, & \text{若 } p^2+q^2 > 1 \end{cases} \quad (1.38)$$

从方程(1.37)可以看出,可将其分解成均匀波和非均匀波两部分,即:

$$a(p, q) = \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \iint_{p^2+q^2 \leq 1} E(x', y', 0) e^{-ik_0(px'+qy')} dx' dy' + \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \iint_{p^2+q^2 > 1} E(x', y', 0) e^{-ik_0(px'+qy')} dx' dy' \quad (1.39)$$

其等式右边的第1项是均匀波,第2项是消逝波(evanescent),这种波的振幅随着 z 的增加呈指数衰减,当传输距离 $z \gg \lambda$ 时,可以忽略其贡献。

1.1.2 衍射积分解

首先考虑一个严格单色标量波:

$$E(x, y, z, t) = E(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (1.40)$$

在真空中,空间相关的部分 $E(x, y, z)$ 满足:

$$(\nabla^2 + k^2)E(x, y, z) = 0 \quad (1.41)$$

假设 v 是闭合面 S 所包围的体积, P 是 S 内的任意一点(如图1.2所示),并假设 E 在 S 内和 S 上具有一阶和二阶偏微分连续。 E' 为任意一其他函数,与 E 满足同样的连续性条件,则由格林定理可得:

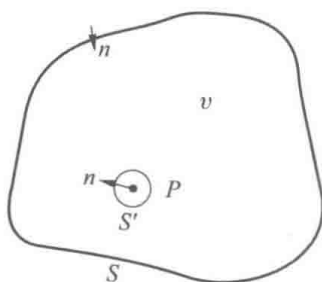


图 1.2 Helmholtz-Kirchhoff 积分定理推导:积分区

$$\iiint_v (E \nabla^2 E' - E' \nabla^2 E) dv = - \iint_S \left(E \frac{\partial E'}{\partial n} - E' \frac{\partial E}{\partial n} \right) ds \quad (1.42)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示沿 S 面内向法线的微分。如果 E' 满足与实践无关的波动方程,即:

$$(\nabla^2 + k^2)E'(x, y, z) = 0 \quad (1.43)$$

因此, 方程(1.42)左边被积函数在 v 的每一点都为零, 即:

$$\iint_S \left(E \frac{\partial E'}{\partial n} - E' \frac{\partial E}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (1.44)$$

假设 $E' = \frac{e^{iks}}{s}$, 其中 s 表示 P 点到 (x, y, z) 这一点的距离。此时, 这个函数在 $s=0$ 位置处有一个奇异点。因为 E' 连续可导, 所以 P 点可以从积分中去掉。因此, 方程(1.44)可表示为:

$$\left\{ \iint_S + \iint_{S'} \right\} \left[E \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial E}{\partial n} \right] dS = 0 \quad (1.45)$$

因此,

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[E \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial E}{\partial n} \right] dS \\ &= - \iint_{S'} \left[E \frac{e^{iks}}{s} \left(ik - \frac{1}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial E}{\partial n} \right] dS' \\ &= \iint_{\Omega} \left[E \frac{e^{ike}}{\epsilon} \left(ik - \frac{1}{\epsilon} \right) - \frac{e^{ike}}{\epsilon} \frac{\partial E}{\partial s} \right] \epsilon^2 d\Omega \end{aligned} \quad (1.46)$$

其中 Ω 为一个元立体角。因为对 S 的积分与 ϵ 无关, 所以右边界可以用它在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时的极限值来代替; 在极限情况下, 该积分的第 1 项和第 3 项没有贡献, 而第 2 项的总贡献为 $4\pi E(P)$ 。所以,

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[E \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial E}{\partial n} \right] dS \quad (1.47)$$

这就是 Helmholtz-Kirchhoff 积分定理的一种形式。

如果 P 点位于体积 v 之内, 则

$$\iint_S \left[E \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial E}{\partial n} \right] dS = 4\pi E(P) \quad (1.48)$$

R^+ 和 R^- 的几何意义如图 1.3 所示。

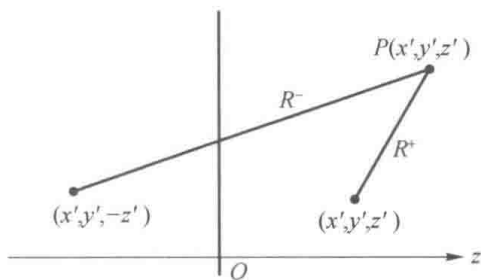


图 1.3 R^+ 和 R^- 的几何意义

如果 P 点位于体积 v 之外, 则

$$\iint_S \left[E \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial E}{\partial n} \right] dS = 0 \quad (1.49)$$

假设区域 v 为 $z \geq 0$ 的半空间。此时, 积分面 S 由平面 $z' = 0$ 和该半空间的一个半球面组成, 半球面中心在原点, 半径为无穷大。 $z > 0$ 半空间中以原点为球心的那个球面 ($r \rightarrow \infty$) 对积分没有贡献。如果观测点 $P(x, y, z)$ 位于 $z > 0$ 的半空间, 则有:

$$\frac{1}{4\pi\omega} \iint_{z'=0} \left[E \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{e^{ikR^+}}{R^+} \right) - \frac{e^{ikR^+}}{R^+} \frac{\partial E}{\partial z'} \right] dx' dy' = E(x, y, z) \quad (1.50)$$

其中

$$R^+ = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (z > 0) \quad (1.51)$$

P 点的对应点 $P(x, y, -z)$ 将位于体积 v 之外 $z < 0$ 的半空间, 所以

$$\frac{1}{4\pi\omega} \iint_{z'=0} \left[E \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{e^{ikR^-}}{R^-} \right) - \frac{e^{ikR^-}}{R^-} \frac{\partial E}{\partial z'} \right] dx' dy' = 0 \quad (1.52)$$

其中

$$R^- = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2} \quad (1.53)$$

此时

$$\frac{e^{ikR^+}}{R^+} \Big|_{z'=0} = \frac{e^{ikR^-}}{R^-} \Big|_{z'=0} \quad (1.54)$$

且

$$\frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{e^{ikR^-}}{R^-} \right) \Big|_{z'=0} = - \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{e^{ikR^+}}{R^+} \right) \Big|_{z'=0} \quad (1.55)$$

将方程(1.54)和方程(1.55)代入方程(1.50), 可得:

$$\frac{1}{4\pi\omega} \iint_{z'=0} \left[-E \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{e^{ikR^+}}{R^+} \right) - \frac{e^{ikR^+}}{R^+} \frac{\partial E}{\partial z'} \right] dS = 0 \quad (1.56)$$

方程(1.50)减去方程(1.56), 并令 $R^+ |_{z'=0} = s$, 可得:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\omega} \iint_{z'=0} E(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) dx' dy' \quad (1.57)$$

其中 $s = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ 。方程(1.57)是第一类 Rayleigh 衍射积分的解, 即 Dirichlet 边值问题的解。如果将方程(1.52)加上方程(1.57), 并令并令 $R^+ |_{z'=0} = s$, 可得:

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi\omega} \iint_{z'=0} \left[\frac{\partial E(x', y', 0)}{\partial z'} \right] \frac{e^{iks}}{s} dx' dy' \quad (1.58)$$

方程(1.58)为第二类 Rayleigh 衍射积分,即 Neumann 边值问题的解。

上面我们介绍了标量 Helmholtz 方程的两种解形式,对于矢量 Helmholtz 而言,其解可表示为:

$$E_x(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi\omega} \iint E_x(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) dx' dy' \quad (1.59)$$

$$E_y(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi\omega} \iint E_y(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) dx' dy' \quad (1.60)$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\omega} \iint \left[E_x(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) + E_y(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) \right] dx' dy' \quad (1.61)$$

利用球面波的 Weyl 表示法,可以将两种解的形式角谱解和衍射积分解统一起来。具体的推导过程可以见本章参考文献[1]。

1.2 部分相干光的传输

在上一小节中,我们给出了完全相干光在半自由空间的传输规律。众所周知,自然界中存在的电磁波总会有某种程度的随机涨落。热光源的随机涨落来源于原子的自发辐射,激光的随机涨落来源于一些不可控的原因,例如温度的涨落等。如何建立光扰动自身和扰动之间的关联,以及两者的传输规律显得尤为重要,以下介绍部分相干性理论。

1.2.1 部分相干光的基本理论

1. 空间-时间域

在经典物理的框架里,光场的涨落可用几率分布或相关函数来表示。在空间-时间域中,用互相干函数 $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 来描述两个场点 $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ 间的