前言 2022版

在这个前言里，我想谈三点.

第一，《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》在 2020 年 9 月做了重要修订，本书全面贯彻落实了此次大纲修订的内容. 值得指出的是，在新大纲的要求下，客观题在试卷中的占比增加，与本书配套的《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》加大了客观题的占比，有利于考生做好训练. 但话说回来，真正学懂知识才是根本，题型形式的训练，多在习题集，更多在模考试卷中体现.

第二，教育部考试中心作为命题单位，其关于考研数学试卷难度的最新阐述："作为选拔性考试，选拔什么样的人是最重要的，标准一旦确定，就应坚持，试卷更加注重的是区分度. 得分率低不见得就是坏事，要弄清原因，如果是题目问题，自然要调整命题思路；但如果是考生没有达到相关课程的要求，就应该在教学、学习和复习上多下功夫. ”考生必须在数学上真学东西，学真东西，只有在充沛的时间里，付出足够的努力，深刻理解知识，熟练掌握方法，才能在未来的考试中脱颖而出，取得好的成绩.

第三，考生要高度重视本书每一讲开篇的知识结构，全面掌握这个知识结构，这对于解好数学题是至关重要的.

张宇

2020 年 12 月于北京

前言 2021版

以《张宇高等数学18讲》为代表的考研数学36讲(包括《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》(以下简称《36讲》))正式出版已有十年了.人们说,十年磨一剑,这第十版,理应在这套书的发展历程中具有里程碑式的意义.

十年间,《36讲》从汇总课堂讲义出版时的名不见经传,到现在成为广大考研考生错爱的畅销书.在感谢读者厚爱和支持的同时,我深感责任重大、战战兢兢、如履薄冰,总是在思考如何把书写得更对得起读者.十年间,考研人数从一百多万增长到现在的三百多万,几乎增长了两倍.我深切感受到考研群体的快速壮大给考研命题和教学带来的巨大影响,总是在思考,如何在新的形势下把书写得更符合新的命题和教学趋势.十年间,我从一个意气风发、不知天高地厚却充满闯劲和干劲的年轻教师,到现在步入不惑之年、岁月的沧桑爬满了面颊的教书匠.在慨叹时光飞逝的同时,更多的是,深知自己能力的不足和感谢学生给予的信任和帮助.

这第十版,我做了全新的编写,这不是一时之举,而是十年间不断积累、总结和创新的成果,是十年间与学生沟通、交流以及教学相长的成果,是十年间顺应考试发展变化的成果.这些成果汇聚成了这第十版,但愿能够在新的起点上给读者更大的帮助.

第十版有如下三大特色:

第一个特色,是每一讲开篇列出的知识结构.这不同于一般的章节目录,而是科学、系统、全面地给出本讲知识的内在逻辑体系和考研数学试题命制思路,是我们多年教学和命题经验的结晶.鉴于有不少读者对线性代数、概率论与数理统计课程不甚熟悉,因此,列出的知识结构更是细化至具体概念、公式与定理等,以期对读者有更大帮助,希望读者认真思考、反复研究并熟稔于心.

第二个特色,是对知识结构系统性、针对性的讲述.这也是本书的主体——讲授内容、例题和习题.讲授内容的特色在于在讲解知识的同时,指出考什么、怎么考的问题(这在普通教材上几乎是没有的),并随后附上"见例 * *",让读者读完讲授内容后可以立即演练,加深理解.本书对知识结构的讲述把抽象内容和具体实例紧密结合,非常有利于读者快速并深刻掌握所学知识.

第三个特色,是本书所命制、编写和收录题目的较高价值性.这些题皆为多年参加考研命题

和教学的专家们潜心研究、反复酝酿、精心设计的好题、妙题. 它们能够在与考研数学试题无缝衔接的同时，精准提高读者的解题水平和应试能力. 同时，本书集中回答并切实解决读者在复习过程中的疑点和弱点.

感谢十年间一些命题专家们给予的支持、帮助与指导，他们中有的老先生已年近九旬；感谢十年间各版编辑老师们的辛勤工作与无私奉献，他们中有的已成长为可独当一面的专家；感谢十年间各位考生的努力与信任，他们中有的已硕士毕业、博士毕业并成为各自专业领域的佼佼者.

希望读者潜心研读本书，在考研数学中取得好成绩.

张宇

2019 年 12 月于北京

目录

第1讲 函数极限与连续

知识结构

- 函数极限的定义及使用
  - 定义
  - 使用
    - 是常数
    - 唯一性
    - 局部有界性
    - 局部保号性
    - 等式脱帽法
- 函数极限的计算
  - 化简先行
    - 等价无穷小替换
    - 恒等变形
    - 及时提出极限存在且不为 0 的因式
  - 洛必达法则
  - 泰勒公式
    - 熟记常用公式
    - 展开原则
  - 无穷小比阶
- 函数极限的存在性
  - 具体型（若洛必达法则失效，用夹逼准则）
  - 抽象型（单调有界准则）
- 函数极限的应用——连续与间断
  - 研究位置
    - 无定义点
    - 分段函数的分段点
  - 连续
    - 内点处
    - 端点处
  - 间断
    - 第一类间断点
      - 跳跃间断点
      - 可去间断点
    - 第二类间断点
      - 无穷间断点
      - 振荡间断点

一 函数极限的定义及使用

1. 定义

$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, x\to\cdot$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

【注】$x\to\cdot$ 是指 $x\to x_0, x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$ 这六种情形.

2. 使用

在极限存在的条件下，有5个考点.

①**(是常数)**A 是一个常数，常记$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$. 见例1.1.

②**(唯一性)**A 唯一：左极限 $=$ 右极限. 见例1.2.

③**(局部有界性)**$x\to\cdot$ 时，$\exists M>0, |f(x)|\leqslant M$. 见例1.3.

④**(局部保号性)**$x\to\cdot$ 时，若 $A>0\Rightarrow f(x)>0$；若 $x\to\cdot$ 时，$f(x)\geqslant 0$，则 $A\geqslant 0$. 见例1.4.

⑤**(等式脱帽法)**$f(x)=A+\alpha$，其中$\lim\limits_{x\to\cdot}\alpha=0$. 见例1.5.

例1.1 已知$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{x-\arcsin(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2e^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，求 $f(x)$.

【解】设$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=A$，则

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-\arcsin(x-1)-1}{(x-1)^3}+\lim_{x\to 1}\left[2x^2e^{x-1}\cdot\lim_{x\to 1} f(x)\right],$$

令 $x-1=t$，

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{t-\arcsin t}{t^3}+2A,$$

$$A=-\lim_{t\to 0}\frac{t-\arcsin t}{t^3}=-\lim_{t\to 0}\frac{t-\left[t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right]}{t^3}=\frac{1}{6},$$

故

$$f(x)=\frac{x-\arcsin(x-1)-1}{(x-1)^3}+\frac{1}{3}x^2e^{x-1}.$$

例1.2 当 $x\to 0$ 时，函数 $x\left[\dfrac{1}{x}\right]+e^{\frac{1}{x}}$ 的极限(　　).

(A) 等于1　　(B) 等于0　　(C) 为 ∞　　(D) 不存在，但不为 ∞

【解】应选(D).

当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}$，于是当 $x\to 0^+$ 时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1$，由夹逼准则，知 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$，又 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，故

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\left[\frac{1}{x}\right]+e^{\frac{1}{x}}\right)=+\infty;$$

当 $x\to0^-$ 时，$1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$，由夹逼准则，知 $\lim\limits_{x\to0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$，又 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，故

$$\lim_{x\to0^-}\left(x\left[\frac{1}{x}\right]+e^{\frac{1}{x}}\right)=1,$$

因此，$\lim\limits_{x\to0}\left(x\left[\frac{1}{x}\right]+e^{\frac{1}{x}}\right)$不存在，但不为 ∞.

例 1.3 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界(　　).

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

【分析】有如下两个重要结论：

① 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界；

② 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有界.

【解】应选(A).

因为当 $x\neq0,1,2$ 时，$f(x)$ 连续，而

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=-\frac{\sin3}{18},\lim_{x\to0^-}f(x)=-\frac{\sin2}{4},$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{\sin2}{4},\lim_{x\to1}f(x)=\infty,\lim_{x\to2}f(x)=\infty,$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界，故选(A).

例 1.4 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不可导　　　　(B) 可导且 $f'(0)\neq0$

(C) 取得极大值　　(D) 取得极小值

【解】应选(C).

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$，且 $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)=0$，故

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot(1-\cos x)\right]=-1\cdot0=0=f(0).$$

又
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)}{x^2}=-1,$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-\dfrac{1}{2}<0$. 由极限的保号性可知在 $x=0$ 的某去心邻域内有 $\dfrac{f(x)}{x^2}<0$，即 $f(x)<0$，于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值，从而选(C).

【注】易知 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\dfrac{x}{1-\cos x}\right]=-1$.

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-\cos x}=\infty$，则必有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$，即 $f'(0)=0$. 排除(A)，(B).

例 1.5 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为(　　).

(A)0　　(B)6　　(C)36　　(D)∞

【解】应选(C).

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,得$\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha$,其中$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$,于是得

$$xf(x)=-\sin 6x+o(x^3),$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin 6x+o(x^3)}{x^3}=36$.故选(C).

二、函数极限的计算

即为七种未定式$\left(“\dfrac{0}{0}”型,“\dfrac{\infty}{\infty}”型,“\infty\cdot 0”型,“\infty-\infty”型,“\infty^0”型,“0^0”型,“1^\infty”型\right)$的计算.

1. 化简先行

(1) 等价无穷小替换.

①$x\to 0$时,

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,$$

$$e^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x,a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a(a>0\text{ 且 }a\neq 1),$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0).$$

② 若α,β都是同一自变量变化过程下的无穷小量,且$\alpha=o(\beta)$,则$\alpha+\beta\sim\beta$.见例 1.6.

(2) 恒等变形.

恒等变形:
- 提取公因式.见例 1.6.
- 换元$\left(x=\dfrac{1}{t}\text{ 等}\right)$.见例 1.7,例 1.8,例 1.18.
- 通分.见例 1.9.
- $u^v=e^{v\ln u}$.见例 1.6.
- 用公式:
  - 因式分解 $a^n-b^n=(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.见例 1.7.
  - 分子有理化$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\text{ 等}\right)$.
- 中值定理.见例 1.10 解法一,例 1.11.

(3) 及时提出极限存在且不为 0 的因式. 见例 1.12.

2. 洛必达法则

$$
\text{洛必达法则}\begin{cases}\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}.\text{见例 1.10 解法二.}\\[2ex]\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}.\text{见例 1.13.}\\[2ex]\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^{\psi(x)} g(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)}{g[\psi(x)]\cdot\psi'(x)}.\end{cases}
$$

【注】使用洛必达法则要满足三个条件：(1)“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型；(2) 分子、分母均可导；(3) 结果为 $0,c(c\neq 0),\infty$.

3. 泰勒公式

(1) 熟记常用公式.

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$,

$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$,

$\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n},-1<x\leqslant 1$,

$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,|x|<1$,

$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,|x|<1$,

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)(x\to 0,\alpha\neq 0)$,

$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)(x\to 0)$,

$\arcsin x=x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)(x\to 0)$,

$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)(x\to 0)$.

(2) 展开原则.

① $\dfrac{A}{B}$ 型，适用于“上下同阶”原则.

具体说来，如果分母(或分子)是x的k次幂，则应把分子(或分母)展开到x的k次幂，可称为**"上下同阶"原则**.

例如，为了计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$，把$\sin x$泰勒展开，一般可写成如下三种形式，

$$\sin x = x + o(x); \tag{$*$}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3); \tag{$**$}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5). \tag{$***$}$$

根据"上下同阶"原则，($*$)式展开得"不够"，($***$)式展开得"过多"，($**$)式正符合要求. 于是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

②$A-B$型，适用于**"幂次最低"原则**.

具体说来，即将A,B分别展开到它们的系数不相等的x的最低次幂为止.

例如，已知当$x\to 0$时，$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$与$ax^b$为等价无穷小，求$a,b$.

用泰勒公式，$\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$，$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2!}\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)$.

显然，将$\cos x$，$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$展开到$x^4$时，其系数就不一样了，使用"幂次最低"原则，展开到此项后，进行运算，得

$$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4),$$

于是可知$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\sim -\dfrac{1}{12}x^4\ (x\to 0)$，故$a=-\dfrac{1}{12}$，$b=4$.

见例1.14，例1.15.

4. 无穷小比阶

$$\lim_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}\xlongequal{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}\begin{cases}0, & ①\\ c\neq 0, & ②\\ \infty. & ③\end{cases}$$

① 称$f(x)$是$g(x)$的**高阶无穷小**.

② 称$f(x)$是$g(x)$的**同阶无穷小**.

③ 称$f(x)$是$g(x)$的**低阶无穷小**.

见例1.16至例1.18.

例1.6 当$x\to 0$时，$(3+2\tan x)^x-3^x$是$3\sin^2 x+x^3\cos\dfrac{1}{x}$的(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶非等价无穷小

【解】应选(D).

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cos\dfrac{1}{x}}{3\sin^2 x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$,知$3\sin^2 x+x^3\cos\dfrac{1}{x}\sim 3\sin^2 x\sim 3x^2(x\to 0)$,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\tan x)^x-3^x}{3\sin^2 x+x^3\cos\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left[\left(1+\dfrac{2}{3}\tan x\right)^x-1\right]}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)}-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\dfrac{2}{3}\tan x\right)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{2}{3}\tan x}{3x^2}=\frac{2}{9},$$

所以当$x\to 0$时,它们为同阶非等价无穷小,故选(D).

例 1.7 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

【解】令$\sqrt[6]{\cos x}=t$,则$\sin^2 x=1-t^{12}$,故

$$\text{原式}=\lim_{t\to 1^-}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}=-\lim_{t\to 1^-}\frac{t-1}{t^{12}-1}=-\lim_{t\to 1^-}\frac{t-1}{(t-1)(t^{11}+t^{10}+\cdots+t+1)}$$

$$=-\lim_{t\to 1^-}\frac{1}{t^{11}+t^{10}+\cdots+t+1}=-\frac{1}{12}.$$

【注】(1) 换元后,写到$\lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{t^3-t^2}{1-t^{12}}$,亦可直接用洛必达法则,则有

$$\text{原式}=\lim_{t\to 1^-}\frac{3t^2-2t}{-12t^{11}}=-\frac{1}{12}.$$

(2) 若考生想到当$x\to 0$时,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0)$,还有一种解法:

由 $\sqrt{\cos x}-1=(1+\cos x-1)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}(\cos x-1)\sim-\dfrac{1}{4}x^2(x\to 0)$,

$\sqrt[3]{\cos x}-1=(1+\cos x-1)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}(\cos x-1)\sim-\dfrac{1}{6}x^2(x\to 0)$,

故原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{\cos x}-1)-(\sqrt[3]{\cos x}-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}$

$=-\dfrac{1}{4}-\left(-\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{1}{12}.$

例 1.8 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\,dt}{\sqrt{x^3}}$.

【解】令$x-t=u$,则$t=x-u$,$dt=-du$,故

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\,dt}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}\,du}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}\,du}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}.$$

例 1.9 设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$, $x>0$, $y>0$. 求:

(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$;

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

【解】(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left[\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right]=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}$.

(2)
$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\pi-x+2\pi x^2}{2(1+x^2)}=\pi.$$

【注】第(1)问中求 $\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$ 时, x 视为常数对待.

例 1.10 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$ ______.

【解】应填1.

解法一 令 $f(t)=\arctan t$, 则 $f(t)$ 在 $[x,x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理, 得
$$\arctan(x+1)-\arctan x=f(x+1)-f(x)=f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2},$$
其中 $0<x<\xi<x+1$, 于是
$$\frac{x^2}{1+(x+1)^2}\leqslant x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]\leqslant\frac{x^2}{1+x^2}.$$
又
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1,$$
因此由夹逼准则得
$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=1.$$

解法二 这是“$\infty\cdot0$”型未定式极限, 转化为“$\dfrac{0}{0}$”型极限后用洛必达法则, 得
$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x+1)-\arctan x}{\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{-2/x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3[x^2-(x+1)^2]}{-2[1+(x+1)^2](1+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3(2x+1)}{-2[1+(x+1)^2](1+x^2)}=1.$$

例 1.11 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e},\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

求 c 的值.

【解】由条件易见 $c\neq 0$. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c}$.

由拉格朗日中值定理，有 $f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\cdot 1$，其中 ξ 介于 $x-1$ 与 x 之间，那么

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}.$$

于是得 $\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e}$，故 $c=\frac{1}{2}$.

例 1.12 设 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$，记 $I_1=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$I_2=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$I_3=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，则(　　).

(A) $I_1>I_2>I_3$　　(B) $I_2>I_1>I_3$

(C) $I_2>I_3>I_1$　　(D) $I_1>I_3>I_2$

【解】应选(D).

$$I_1=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2^{-\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}})^{\frac{1}{x}},$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-\frac{1}{x}}=1$，由于 $\mathrm{e}>\sqrt{\mathrm{e}}$，则 $0<\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}<1$，

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}\left[1+\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

同理，$\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}}}>1$，

$$\begin{aligned}I_2&=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2^{-\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}})^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\mathrm{e}}\left[\left(\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^x+1\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\mathrm{e}}\left[\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}\right)^{-x}+1\right]^{\frac{1}{x}}=\sqrt{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_3&=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2}{2}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1}{2x}}\\&=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

故 $I_1>I_3>I_2$，选(D).

例 1.13 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

【解】解法一　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$

$$\xlongequal{\text{令 } x-t=u} \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+xf(x)}$$

$$\xlongequal[(\xi\text{在 }0\text{ 和 }x\text{ 之间})]{\text{积分中值定理}} \lim_{\substack{x\to 0\\(\xi\to 0)}}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

解法二 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}\right]$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+xf(x)}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\dfrac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x}+f(x)}$$

$$=1-\frac{\lim\limits_{x\to 0}f(x)}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x}+\lim\limits_{x\to 0}f(x)}$$

$$=1-\frac{f(0)}{\lim\limits_{x\to 0}f(x)+f(0)}=1-\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

【注】本题是一道很好的考查变限积分函数的极限问题，解法一使用了积分中值定理，解法二使用了极限四则运算法则.

例 1.14 若$\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则（　　）.

(A)$a=\frac{1}{2},b=-1$　　(B)$a=-\frac{1}{2},b=-1$

(C)$a=\frac{1}{2},b=1$　　(D)$a=-\frac{1}{2},b=1$

【解】应选(B).

这是“1^∞”型未定式，则有$\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^A=1$，这里

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1)=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+ax^2+bx-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)x+\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=0,$$