

# 前言 2022版

在这个前言里,我想谈三点.

第一,《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》在2020年9月做了重要修订,本书全面贯彻落实了此次大纲修订的内容.值得指出的是,在新大纲的要求下,客观题在试卷中的占比增加,与本书配套的《张宇考研数学题源探析经典1000题》加大了客观题的占比,有利于考生做好训练.但话说回来,真正学懂知识才是根本,题型形式的训练,多在习题集,更多在模考试卷中体现.

第二,教育部考试中心作为命题单位,其关于考研数学试卷难度的最新阐述:“作为选拔性考试,选拔什么样的人是最重要的,标准一旦确定,就应坚持,试卷更加注重的是区分度.得分率低不见得就是坏事,要弄清原因,如果是题目问题,自然要调整命题思路;但如果是考生没有达到相关课程的要求,就应该在教学、学习和复习上多下功夫.”考生必须在数学上真学东西,学真东西,只有在充沛的时间里,付出足够的努力,深刻理解知识,熟练掌握方法,才能在未来的考试中脱颖而出,取得好的成绩.

第三,考生要高度重视本书每一讲开篇的知识结构,全面掌握这个知识结构,这对于解好数学题是至关重要的.

张宇

2020年12月于北京

# 前言

2021版

以《张宇高等数学 18 讲》为代表的考研数学 36 讲(包括《张宇高等数学 18 讲》《张宇线性代数 9 讲》《张宇概率论与数理统计 9 讲》(以下简称《36 讲》))正式出版已有十年了. 人们说, 十年磨一剑, 这第十版, 理应在这套书的发展历程中具有里程碑式的意义.

十年间,《36 讲》从汇总课堂讲义出版时的名不见经传, 到现在成为广大考研考生错爱的畅销书. 在感谢读者厚爱和支持的同时, 我深感责任重大、战战兢兢、如履薄冰, 总是在思考如何把书写得更对得起读者. 十年间, 考研人数从一百多万增长到现在的三百多万, 几乎增长了两倍. 我深切感受到考研群体的快速壮大给考研命题和教学带来的巨大影响, 总是在思考, 如何在新的形势下把书写得更符合新的命题和教学趋势. 十年间, 我从一个意气风发、不知天高地厚却充满闯劲和干劲的年轻教师, 到现在步入不惑之年、岁月的沧桑爬满了面颊的教书匠. 在慨叹时光飞逝的同时, 更多的是, 深知自己能力的不足和感谢学生给予的信任和帮助.

这第十版, 我做了全新的编写, 这不是一时之举, 而是十年间不断积累、总结和创新的成果, 是十年间与学生沟通、交流以及教学相长的成果, 是十年间顺应考试发展变化的成果. 这些成果汇聚成了这第十版, 但愿能够在新的起点上给读者更大的帮助.

第十版有如下三大特色:

第一个特色, 是每一讲开篇列出的知识结构. 这不同于一般的章节目录, 而是科学、系统、全面地给出本讲知识的内在逻辑体系和考研数学试题命制思路, 是我们多年教学和命题经验的结晶. 鉴于有不少读者对线性代数、概率论与数理统计课程不甚熟悉, 因此, 列出的知识结构更是细化至具体概念、公式与定理等, 以期对读者有更大帮助, 希望读者认真思考、反复研究并熟稔于心.

第二个特色, 是对知识结构系统性、针对性的讲述. 这也是本书的主体——讲授内容、例题和习题. 讲授内容的特色在于在讲解知识的同时, 指出考什么、怎么考的问题(这在普通教材上几乎是没有的), 并随后附上“见例 \* \*”, 让读者读完讲授内容后可以立即演练, 加深理解. 本书对知识结构的讲述把抽象内容和具体实例紧密结合, 非常有利于读者快速并深刻掌握所学知识.

第三个特色, 是本书所命制、编写和收录题目的较高价值性. 这些题皆为多年参加考研命题

和教学的专家们潜心研究、反复酝酿、精心设计的好题、妙题. 它们能够在与考研数学试题无缝衔接的同时, 精准提高读者的解题水平和应试能力. 同时, 本书集中回答并切实解决读者在复习过程中的疑点和弱点.

感谢十年间一些命题专家们给予的支持、帮助与指导, 他们中有的老先生已年近九旬; 感谢十年间各版编辑老师们的辛勤工作与无私奉献, 他们中有的已成长为可独当一面的专家; 感谢十年间各位考生的努力与信任, 他们中有的已硕士毕业、博士毕业并成为各自专业领域的佼佼者.

希望读者潜心研读本书, 在考研数学中取得好成绩.

张宁

2019年12月于北京

# 目 录

<b>第 1 讲 函数极限与连续</b> .....	1
一、函数极限的定义及使用 .....	2
二、函数极限的计算 .....	4
三、函数极限的存在性 .....	12
四、函数极限的应用——连续与间断 .....	14
<b>第 2 讲 数列极限</b> .....	23
一、数列极限的定义及使用 .....	23
二、数列极限的存在性与计算 .....	25
<b>第 3 讲 一元函数微分学的概念</b> .....	40
一、导数定义(导数在一点的问题) .....	40
二、微分定义 .....	46
<b>第 4 讲 一元函数微分学的计算</b> .....	50
一、基本求导公式 .....	50
二、符号写法 .....	51
三、复合函数求导 .....	52
四、隐函数求导 .....	52
五、反函数求导 .....	53
六、分段函数求导(含绝对值) .....	54
七、多项乘除、开方、乘方(对数求导法) .....	56
八、幂指函数求导法 .....	56
九、参数方程确定的函数求导 .....	57
十、高阶导数 .....	58

<b>第 5 讲 一元函数微分学的应用 (一)——几何应用</b> .....	65
一、研究对象 .....	66
二、研究内容 .....	67
<b>第 6 讲 一元函数微分学的应用 (二)——中值定理、微分等式 与微分不等式</b> .....	87
一、中值定理 .....	87
二、微分等式问题(方程的根、函数的零点) .....	101
三、微分不等式问题 .....	104
<b>第 7 讲 一元函数微分学的应用 (三)——物理应用与经济应用</b> ...	115
一、物理应用(仅数学一、数学二) .....	115
二、经济应用(仅数学三) .....	116
<b>第 8 讲 一元函数积分学的概念与性质</b> .....	123
一、“祖孙三代” $\left(\int_a^x f(t) dt, f(x), f'(x)\right)$ 的奇偶性、周期性 .....	123
二、积分比大小 .....	125
三、定积分定义 .....	127
四、反常积分的判敛 .....	130
<b>第 9 讲 一元函数积分学的计算</b> .....	136
一、基本积分公式 .....	137
二、不定积分的计算 .....	138
三、定积分的计算 .....	145
四、变限积分的计算 .....	156
五、反常积分的计算 .....	161
<b>第 10 讲 一元函数积分学的应用 (一)——几何应用</b> .....	169
一、研究对象 .....	169
二、研究内容 .....	170
<b>第 11 讲 一元函数积分学的应用 (二)——积分等式与积分 不等式</b> .....	191
一、积分等式 .....	191

二、积分不等式 .....	194
<b>第 12 讲 一元函数积分学的应用 (三) —— 物理应用 与经济应用</b> .....	203
一、物理应用(微元法)(仅数学一、数学二) .....	203
二、经济应用(仅数学三) .....	210
<b>第 13 讲 多元函数微分学</b> .....	216
一、概念 .....	216
二、复合函数求导法 .....	223
三、隐函数求导法 .....	224
四、多元函数的极、最值 .....	228
五、偏微分方程(含偏导数的等式) .....	234
<b>第 14 讲 二重积分</b> .....	245
一、概念 .....	245
二、计算 .....	250
三、应用 .....	265
<b>第 15 讲 微分方程</b> .....	273
一、一阶微分方程的求解 .....	274
二、二阶可降阶微分方程的求解(仅数学一、数学二) .....	278
三、高阶常系数线性微分方程的求解 .....	279
四、用换元法求解微分方程 .....	282
五、应用题 .....	284
六、差分方程(仅数学三) .....	293
<b>第 16 讲 无穷级数(仅数学一、数学三)</b> .....	300
一、数项级数的判敛 .....	301
二、幂级数的收敛域 .....	310
三、展开问题 .....	314
四、求和问题 .....	316
五、傅里叶级数(仅数学一) .....	326
<b>第 17 讲 多元函数积分学的预备知识(仅数学一)</b> .....	334
一、空间曲线的切线与法平面 .....	335

二、空间曲面的切平面与法线 .....	336
三、空间曲线在坐标面上的投影 .....	336
四、旋转曲面:曲线 $\Gamma$ 绕一条定直线旋转一周所形成的曲面 .....	337
五、向量的运算及其应用 .....	337
六、平面、直线及位置关系 .....	338
七、场论初步 .....	340

**第 18 讲 多元函数积分学 (仅数学一)** ..... 352

一、三重积分 .....	353
二、第一型曲线积分 .....	366
三、第一型曲面积分 .....	370
四、第二型曲线积分 .....	375
五、第二型曲面积分 .....	390

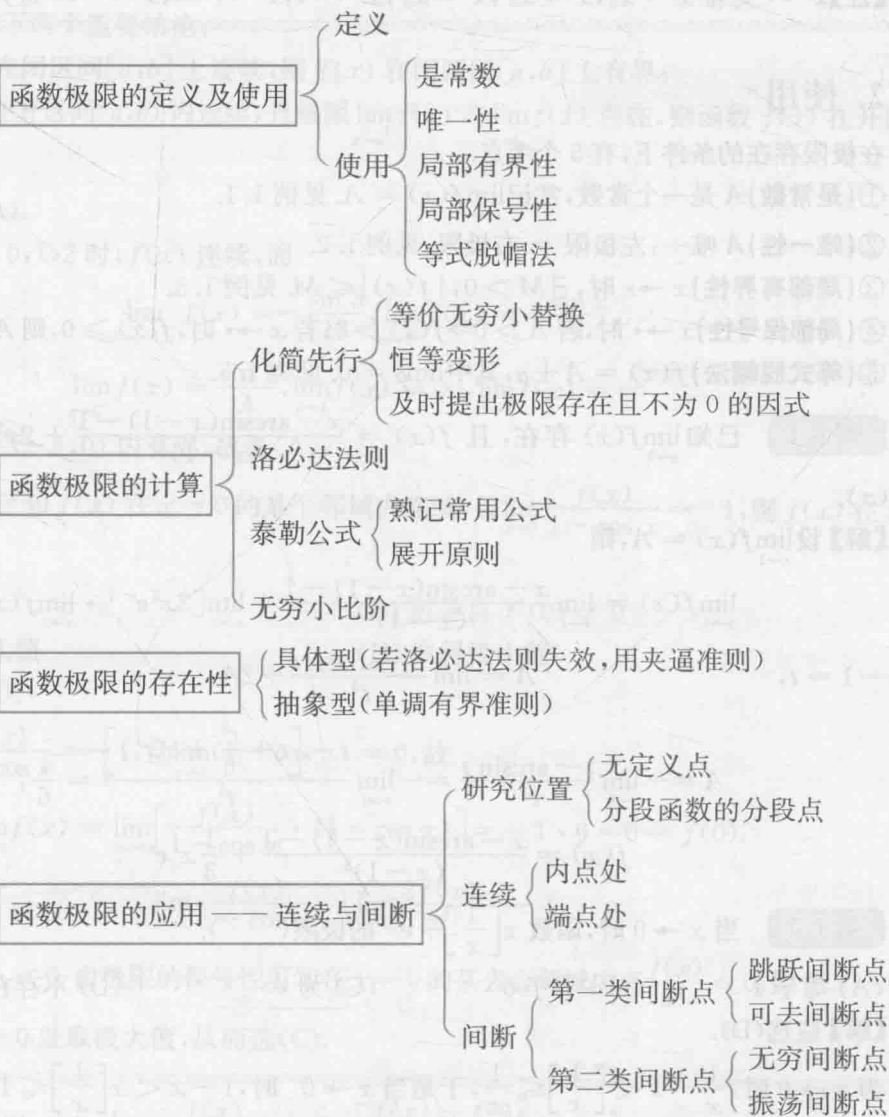
**附录 几种常见的空间图形** ..... 412

附录 1 平面与直线的方程 .....	412
附录 2 平面与平面的位置关系 .....	412
附录 3 直线与直线的相对位置 .....	412
附录 4 直线与平面的位置关系 .....	412
附录 5 平面束 .....	412
附录 6 柱面 .....	412
附录 7 锥面 .....	412
附录 8 二次曲面 .....	412
附录 9 空间曲线的投影 .....	412
附录 10 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 11 空间曲线的投影 .....	412
附录 12 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 13 空间曲线的投影 .....	412
附录 14 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 15 空间曲线的投影 .....	412
附录 16 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 17 空间曲线的投影 .....	412
附录 18 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 19 空间曲线的投影 .....	412
附录 20 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 21 空间曲线的投影 .....	412
附录 22 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 23 空间曲线的投影 .....	412
附录 24 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 25 空间曲线的投影 .....	412
附录 26 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 27 空间曲线的投影 .....	412
附录 28 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 29 空间曲线的投影 .....	412
附录 30 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 31 空间曲线的投影 .....	412
附录 32 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 33 空间曲线的投影 .....	412
附录 34 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 35 空间曲线的投影 .....	412
附录 36 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 37 空间曲线的投影 .....	412
附录 38 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 39 空间曲线的投影 .....	412
附录 40 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 41 空间曲线的投影 .....	412
附录 42 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 43 空间曲线的投影 .....	412
附录 44 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 45 空间曲线的投影 .....	412
附录 46 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 47 空间曲线的投影 .....	412
附录 48 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 49 空间曲线的投影 .....	412
附录 50 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 51 空间曲线的投影 .....	412
附录 52 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 53 空间曲线的投影 .....	412
附录 54 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 55 空间曲线的投影 .....	412
附录 56 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 57 空间曲线的投影 .....	412
附录 58 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 59 空间曲线的投影 .....	412
附录 60 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 61 空间曲线的投影 .....	412
附录 62 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 63 空间曲线的投影 .....	412
附录 64 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 65 空间曲线的投影 .....	412
附录 66 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 67 空间曲线的投影 .....	412
附录 68 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 69 空间曲线的投影 .....	412
附录 70 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 71 空间曲线的投影 .....	412
附录 72 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 73 空间曲线的投影 .....	412
附录 74 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 75 空间曲线的投影 .....	412
附录 76 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 77 空间曲线的投影 .....	412
附录 78 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 79 空间曲线的投影 .....	412
附录 80 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 81 空间曲线的投影 .....	412
附录 82 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 83 空间曲线的投影 .....	412
附录 84 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 85 空间曲线的投影 .....	412
附录 86 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 87 空间曲线的投影 .....	412
附录 88 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 89 空间曲线的投影 .....	412
附录 90 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 91 空间曲线的投影 .....	412
附录 92 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 93 空间曲线的投影 .....	412
附录 94 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 95 空间曲线的投影 .....	412
附录 96 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 97 空间曲线的投影 .....	412
附录 98 空间曲线的切平面与法线 .....	412
附录 99 空间曲线的投影 .....	412
附录 100 空间曲线的切平面与法线 .....	412

# 第1讲

## 函数极限与连续

### 知识结构



一 函数极限的定义及使用

1. 定义

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, x \rightarrow \cdot \text{ 时, } |f(x) - A| < \epsilon.$$

**【注】** $x \rightarrow \cdot$  是指  $x \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  这六种情形.

2. 使用

在极限存在的条件下,有 5 个考点.

- ①(是常数) $A$  是一个常数,常记  $\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) = A$ . 见例 1.1.
- ②(唯一性) $A$  唯一:左极限 = 右极限. 见例 1.2.
- ③(局部有界性) $x \rightarrow \cdot$  时,  $\exists M > 0, |f(x)| \leq M$ . 见例 1.3.
- ④(局部保号性) $x \rightarrow \cdot$  时,若  $A > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ ;若  $x \rightarrow \cdot$  时,  $f(x) \geq 0$ ,则  $A \geq 0$ . 见例 1.4.
- ⑤(等式脱帽法) $f(x) = A + \alpha$ ,其中  $\lim_{x \rightarrow \cdot} \alpha = 0$ . 见例 1.5.

**例 1.1** 已知  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  存在,且  $f(x) = \frac{x - \arcsin(x-1) - 1}{(x-1)^3} + 2x^2 e^{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,

求  $f(x)$ .

**【解】** 设  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \arcsin(x-1) - 1}{(x-1)^3} + \lim_{x \rightarrow 1} [2x^2 e^{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x)],$$

令  $x-1 = t$ ,

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \arcsin t}{t^3} + 2A,$$

$$A = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \arcsin t}{t^3} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - [t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)]}{t^3} = \frac{1}{6},$$

故  $f(x) = \frac{x - \arcsin(x-1) - 1}{(x-1)^3} + \frac{1}{3} x^2 e^{x-1}$ .

**例 1.2** 当  $x \rightarrow 0$  时,函数  $x \left[ \frac{1}{x} \right] + e^{\frac{1}{x}}$  的极限( ).

- (A) 等于 1      (B) 等于 0      (C) 为  $\infty$       (D) 不存在,但不为  $\infty$

**【解】** 应选(D).

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{1}{x} - 1 < \left[ \frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$ , 于是当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $1 - x < x \left[ \frac{1}{x} \right] \leq 1$ , 由夹逼准则, 知

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1$ , 又  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x \left[ \frac{1}{x} \right] + e^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty;$$

当  $x \rightarrow 0^-$  时,  $1 \leq x \left[ \frac{1}{x} \right] < 1 - x$ , 由夹逼准则, 知  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1$ , 又  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x \left[ \frac{1}{x} \right] + e^{\frac{1}{x}} \right) = 1,$$

因此,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \left[ \frac{1}{x} \right] + e^{\frac{1}{x}} \right)$  不存在, 但不为  $\infty$ .

**例 1.3** 函数  $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$  在下列哪个区间内有界( ).

- (A)  $(-1, 0)$       (B)  $(0, 1)$       (C)  $(1, 2)$       (D)  $(2, 3)$

**【分析】** 有如下两个重要结论:

- ① 若  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上有界;  
 ② 若  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内连续, 且极限  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在, 则函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内有界.

**【解】** 应选(A).

因为当  $x \neq 0, 1, 2$  时,  $f(x)$  连续, 而

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty,$$

所以函数  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  内有界, 故选(A).

**例 1.4** 已知  $f(x)$  在  $x=0$  的某个邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -1$ , 则  $f(x)$  在  $x=0$  处( ).

- (A) 不可导      (B) 可导且  $f'(0) \neq 0$   
 (C) 取得极大值      (D) 取得极小值

**【解】** 应选(C).

由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -1$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x)}{1 - \cos x} \cdot (1 - \cos x) \right] = -1 \cdot 0 = 0 = f(0).$$

又  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{x^2} = -1$ ,

故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} < 0$ . 由极限的保号性可知在  $x=0$  的某去心邻域内有  $\frac{f(x)}{x^2} < 0$ , 即  $f(x) < 0$ ,

于是  $f(x)$  在  $x=0$  处取极大值, 从而选(C).

**【注】** 易知  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x) - f(0)}{x} \cdot \frac{x}{1 - \cos x} \right] = -1$ .

由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos x} = \infty$ , 则必有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ , 即  $f'(0) = 0$ . 排除(A), (B).

**例 1.5** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$  为( ).

- (A)0 (B)6 (C)36 (D) $\infty$

**【解】** 应选(C).

由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$ , 得  $\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0 + \alpha$ , 其中  $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 0$ , 于是得  $xf(x) = -\sin 6x + o(x^3)$ ,

故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x + o(x^3)}{x^3} = 36$ . 故选(C).

## 二 函数极限的计算

即为七种未定式(“ $\frac{0}{0}$ ”型, “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型, “ $\infty \cdot 0$ ”型, “ $\infty - \infty$ ”型, “ $\infty^0$ ”型, “ $0^0$ ”型, “ $1^\infty$ ”型)的计算.

### 1. 化简先行

#### (1) 等价无穷小替换.

①  $x \rightarrow 0$  时,

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, a^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1),$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^a - 1 \sim ax (a \neq 0).$$

② 若  $\alpha, \beta$  都是同一自变量变化过程下的无穷小量, 且  $\alpha = o(\beta)$ , 则  $\alpha + \beta \sim \beta$ . 见例 1.6.

#### (2) 恒等变形.

恒等变形 {

- 提取公因式. 见例 1.6.
- 换元 ( $x = \frac{1}{t}$  等). 见例 1.7, 例 1.8, 例 1.18.
- 通分. 见例 1.9.
- $u^v = e^{v \ln u}$ . 见例 1.6.
- 用公式 {
  - 因式分解  $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ .
  - 见例 1.7.
  - 分子有理化 ( $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  等).
- 中值定理. 见例 1.10 解法一, 例 1.11.

(3) 及时提出极限存在且不为 0 的因式. 见例 1.12.

## 2. 洛必达法则

$$\text{洛必达法则} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \text{ 见例 1.10 解法二.} \\ \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\int_a^x g(t) dt} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f(x)}{g(x)}. \text{ 见例 1.13.} \\ \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt}{\int_a^{\psi(x)} g(t) dt} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)}{g[\psi(x)] \cdot \psi'(x)}. \end{array} \right.$$

**【注】**使用洛必达法则要满足三个条件:(1)“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型;(2)分子、分母均可导;(3)结果为 $0, c(c \neq 0), \infty$ .

## 3. 泰勒公式

(1) 熟记常用公式.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1,$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0, \alpha \neq 0),$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0),$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0),$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0).$$

(2) 展开原则.

①  $\frac{A}{B}$  型, 适用于“上下同阶”原则.

具体说来,如果分母(或分子)是 $x$ 的 $k$ 次幂,则应把分子(或分母)展开到 $x$ 的 $k$ 次幂,可称为“上下同阶”原则.

例如,为了计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ,把 $\sin x$ 泰勒展开,一般可写成如下三种形式,

$$\sin x = x + o(x); \quad (*)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3); \quad (**)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5). \quad (***)$$

根据“上下同阶”原则,  $(*)$  式展开得“不够”,  $(***)$  式展开得“过多”,  $(**)$  式正符合

要求. 于是, 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left[ x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

②A-B型,适用于“幂次最低”原则.

具体说来,即将 $A, B$ 分别展开到它们的系数不相等的 $x$ 的最低次幂为止.

例如,已知当 $x \rightarrow 0$ 时,  $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 $ax^b$ 为等价无穷小,求 $a, b$ .

用泰勒公式,  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ ,  $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ .

显然,将 $\cos x, e^{-\frac{x^2}{2}}$ 展开到 $x^4$ 时,其系数就不一样了,使用“幂次最低”原则,展开到此项后,进行运算,得

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = \left[ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right] - \left[ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right] = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$

于是可知  $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} \sim -\frac{1}{12}x^4 (x \rightarrow 0)$ , 故  $a = -\frac{1}{12}, b = 4$ .

见例 1.14, 例 1.15.

#### 4. 无穷小比阶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{“} \frac{0}{0} \text{”}}{=} \begin{cases} 0, & \text{①} \\ c \neq 0, & \text{②} \\ \infty. & \text{③} \end{cases}$$

①称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小.

②称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小.

③称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小.

见例 1.16 至例 1.18.

**例 1.6** 当 $x \rightarrow 0$ 时,  $(3 + 2 \tan x)^x - 3^x$ 是 $3 \sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x}$ 的( ).

(A) 高阶无穷小

(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小

(D) 同阶非等价无穷小

【解】应选(D).

由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos \frac{1}{x}}{3 \sin^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$ , 知  $3 \sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x} \sim 3 \sin^2 x \sim 3x^2 (x \rightarrow 0)$ , 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 + 2 \tan x)^x - 3^x}{3 \sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \left[ \left( 1 + \frac{2}{3} \tan x \right)^x - 1 \right]}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \left( 1 + \frac{2}{3} \tan x \right)} - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left( 1 + \frac{2}{3} \tan x \right)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{2}{3} \tan x}{3x^2} = \frac{2}{9}, \end{aligned}$$

所以当  $x \rightarrow 0$  时, 它们为同阶非等价无穷小, 故选(D).

**例 1.7** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ .

【解】令  $\sqrt[6]{\cos x} = t$ , 则  $\sin^2 x = 1 - t^{12}$ , 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t^3 - t^2}{1 - t^{12}} = - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t - 1}{t^{12} - 1} = - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t - 1}{(t - 1)(t^{11} + t^{10} + \dots + t + 1)} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{t^{11} + t^{10} + \dots + t + 1} = - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

【注】(1) 换元后, 写到  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t^3 - t^2}{1 - t^{12}}$ , 亦可直接用洛必达法则, 则有

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{3t^2 - 2t}{-12t^{11}} = - \frac{1}{12}.$$

(2) 若考生想到当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1+x)^a - 1 \sim ax (a \neq 0)$ , 还有一种解法:

$$\text{由 } \sqrt{\cos x} - 1 = (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}(\cos x - 1) \sim -\frac{1}{4}x^2 (x \rightarrow 0),$$

$$\sqrt[3]{\cos x} - 1 = (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}(\cos x - 1) \sim -\frac{1}{6}x^2 (x \rightarrow 0),$$

$$\begin{aligned} \text{故原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos x} - 1) - (\sqrt[3]{\cos x} - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

**例 1.8** 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$ .

【解】令  $x-t=u$ , 则  $t=x-u$ ,  $dt=-du$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{\frac{3}{2} \sqrt{x}} = \frac{2}{3}.$$

**例 1.9** 设  $f(x, y) = \frac{y}{1+xy} - \frac{1 - y \sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x}, x > 0, y > 0$ . 求:

(1)  $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ .

**【解】**(1)  $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y}{1+xy} - \frac{1 - y \sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x}$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x} \right)$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x + \pi x^2}{x \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x + \pi x^2}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1 + 2\pi x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\pi - x + 2\pi x^2}{2(1+x^2)} = \pi$ .

**【注】**第(1)问中求  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$  时,  $x$  视为常数对待.

**例 1.10**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【解】**应填 1.

**解法一** 令  $f(t) = \arctan t$ , 则  $f(t)$  在  $[x, x+1]$  上应用拉格朗日中值定理, 得

$$\arctan(x+1) - \arctan x = f(x+1) - f(x) = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2},$$

其中  $0 < x < \xi < x+1$ , 于是

$$\frac{x^2}{1+(x+1)^2} \leq x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] \leq \frac{x^2}{1+x^2}.$$

又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1,$$

因此由夹逼准则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] = 1.$$

**解法二** 这是“ $\infty \cdot 0$ ”型未定式极限, 转化为“ $\frac{0}{0}$ ”型极限后用洛必达法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x+1) - \arctan x}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2}}{-2/x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 [x^2 - (x+1)^2]}{-2[1+(x+1)^2](1+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3(2x+1)}{-2[1+(x+1)^2](1+x^2)} = 1. \end{aligned}$$

**例 1.11** 已知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e, \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)],$$

求  $c$  的值.

**【解】** 由条件易见  $c \neq 0$ . 又  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]^{\frac{2cx}{x-c}} = e^{2c}$ .

由拉格朗日中值定理, 有  $f(x) - f(x-1) = f'(\xi) \cdot 1$ , 其中  $\xi$  介于  $x-1$  与  $x$  之间, 那么

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(\xi) = e.$$

于是得  $e^{2c} = e$ , 故  $c = \frac{1}{2}$ .

**例 1.12** 设  $x \neq 0$  时,  $f(x) = \left( \frac{e^x + e^{\frac{x}{2}}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ , 记  $I_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $I_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $I_3 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , 则( ).

(A)  $I_1 > I_2 > I_3$

(B)  $I_2 > I_1 > I_3$

(C)  $I_2 > I_3 > I_1$

(D)  $I_1 > I_3 > I_2$

**【解】** 应选(D).

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{\frac{x}{2}})^{\frac{1}{x}},$$

其中  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-\frac{1}{x}} = 1$ , 由于  $e > \sqrt{e}$ , 则  $0 < \frac{\sqrt{e}}{e} < 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{\frac{x}{2}})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt{e}}{e} \right)^x \right]^{\frac{1}{x}} = e.$$

同理,  $\frac{e}{\sqrt{e}} > 1$ ,

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + e^{\frac{x}{2}})^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{e} \left[ \left( \frac{e}{\sqrt{e}} \right)^x + 1 \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{e} \left[ \left( \frac{\sqrt{e}}{e} \right)^{-x} + 1 \right]^{\frac{1}{x}} = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{\frac{x}{2}}}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e^x + e^{\frac{x}{2}} - 2)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{2x}} \\ &= e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = e^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

故  $I_1 > I_3 > I_2$ , 选(D).

**例 1.13** 设函数  $f(x)$  连续, 且  $f(0) \neq 0$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$ .

**【解】** 解法一 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$

$$\xrightarrow{\text{令 } x-t=u} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(u) du}$$

$$\xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x)}{\int_0^x f(u) du + x f(x)}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{积分中值定理} \\ (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 和 } x \text{ 之间})}]{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{x f(\xi)}{x f(\xi) + x f(x)} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}.$$

解法二

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(u) du} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(u) du} \right] \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{\int_0^x f(u) du + x f(x)} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{\int_0^x f(u) du}{x} + f(x)} \\ &= 1 - \frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} f(x)} \\ &= 1 - \frac{f(0)}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + f(0)} = 1 - \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**【注】**本题是一道很好的考查变限积分函数的极限问题，解法一使用了积分中值定理，解法二使用了极限四则运算法则。

**例 1.14** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$ , 则( ).

(A)  $a = \frac{1}{2}, b = -1$

(B)  $a = -\frac{1}{2}, b = -1$

(C)  $a = \frac{1}{2}, b = 1$

(D)  $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

**【解】**应选(B).

这是“ $1^\infty$ ”型未定式, 则有  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = e^A = 1$ , 这里

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (e^x + ax^2 + bx - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + ax^2 + bx - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+b)x + \left(\frac{1}{2} + a\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 0, \end{aligned}$$