



新工科暨卓越工程师教育培养计划
电子信息类专业系列教材



新工科暨卓越工程师教育培养计划电子信息类专业系列教材

丛书顾问/ 郝 跃

DIANCIBO GONGCHENG JICHU

电磁波工程基础

主 编/ 郑宏兴 王 莉



电磁波工程基础

主 编/ 郑宏兴 王 莉

华中科技大学出版社



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

新工科暨卓越工程师教育培养计划电子信息类专业系列教材

电磁波工程基础

主 编 郑宏兴 王 莉

华中科技大学出版社

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书为普通高等教育“新工科暨卓越工程师教育培养计划电子信息类专业系列教材”，共分为9章，阐述了矢量分析与场论、静态电磁场、电介质和磁介质、时变场与时谐场、平面波极化与衰减、导行与谐振、辐射传播与散射、边值问题及数值解相关知识，介绍了近几年快速发展的电磁波生物效应及应用。

本书尽量避免与《大学物理》中电磁学的内容重复，电磁波概念明确，避免繁杂的数学推导，注重电磁场与电磁波的理论与实际应用相结合。为便于自主学习，书中附有相应的习题作为学习内容的补充，以供复习、巩固和练习之用。

本书可作为高等学校通信和电信工程等电子信息类专业本科生的教材，也可作为相关专业学生或相关专业技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁波工程基础/郑宏兴,王莉主编. —武汉:华中科技大学出版社,2020.9
ISBN 978-7-5680-6556-6

I. ①电… II. ①郑… ②王… III. ①电磁波-高等学校-教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 167887 号

电磁波工程基础

Diancibo Gongcheng Jichu

郑宏兴 王 莉 主编

策划编辑: 祖 鹏 王红梅

责任编辑: 余 涛 刘艳花

封面设计: 秦 茹

责任校对: 刘 竣

责任监印: 徐 露

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

电话: (027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园

邮编: 430223

录 排: 武汉市洪山区佳年华文印部

印 刷: 武汉科源印刷设计有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 19

字 数: 454 千字

版 次: 2020 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 49.80 元



本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

编 委 会

顾问 郝 跃(西安电子科技大学)

编委 (按姓氏笔画排名)

万永菁(华东理工大学)

王志军(北京大学)

方 娟(北京工业大学)

尹宏鹏(重庆大学)

尹学锋(同济大学)

刘 爽(电子科技大学)

刘 强(天津大学)

刘有耀(西安邮电大学)

孙闽红(杭州电子科技大学)

杨晓非(华中科技大学)

吴怀宇(武汉大学)

张永辉(海南大学)

张朝柱(哈尔滨工程大学)

金湘亮(湖南师范大学)

赵军辉(华东交通大学)

胡立坤(广西大学)

柳 宁(暨南大学)

姜胜林(华中科技大学)

凌 翔(电子科技大学)

唐朝京(国防科技大学)

童美松(同济大学)

曾以成(湘潭大学)

曾庆山(郑州大学)

雷鑑铭(华中科技大学)

前言

麦克斯韦电磁理论体系的建立,对现代文明产生了重大影响,成为指导现代电工和电子技术的理论基础。现代电工和电子技术,如广播、电视、卫星、遥感、测控、电子监测等方面,均已离不开电磁场与电磁波的“影子”。学习这门课程,对培养学生严谨的学习态度、逆向思维以及创新能力等,都能起到非常重要的作用。因此,高等学校都把“电磁场与电磁波”作为电类专业的必修课程。

本书共分9章。第1章讨论了矢量分析与场论的基本知识,为深入学习本书的后续内容打下了必要的数学基础。第2章和第3章阐述了静态场的基本性质及其与介质的相互作用,分别从静电场、恒定电流场和恒定磁场等方面进行深入浅出的讲解。为了便于读者了解电磁学的最新应用进展,第3章的最后介绍了人工电磁介质。第4章、第5章描述了时变电磁场和平面电磁波的基础理论及其有关应用,揭示了电磁波在自由空间的传播特性。第5章还分析了极化作为电磁波不同于其他波动过程的典型物理特性。第6章讲述了电磁波在波导中的传播,在研究导行电磁波过程中介绍了关于波导和传输线的基本理论。对于开设后续课程“微波技术与天线”的专业,这一章内容可以选学。第7章着重讲述了电磁波辐射与散射,对无线通信专业来说,这一章无疑是非常重要的。这部分内容解释了作为无线信号载体的电磁波传播的特性,而在研究电磁波辐射时,还简要地讨论了天线的辐射原理。第8章介绍了静态场的边值问题和麦克斯韦方程组的数值求解方法,介绍了有限元法、时域有限差分法和矩量法等。第9章介绍了近几年快速发展的电磁波生物效应及应用。本书附录给出了常用的数学公式,以便读者查阅。

本书是由编者在河北工业大学工作期间的讲义改编而成,在本书的编写初期与天津职业技术师范大学电子工程学院孙程光、张凤山和马宁三位博士进行过交流,他们慷慨提供了部分素材,在此表示衷心感谢。

本书在编写过程中,还得到了河北工业大学电子信息工程学院电磁场与微波课程组田学民、姜霞、张志伟和鲍健慧老师的大力支持与帮助,他们对书稿中的公式、图表和文字做了大量的订正工作,在此表示衷心感谢。

工程教育认证这一重要环节对书稿内容的充实和质量的提高起了重要作用,在此对参与工程教育认证的河北工业大学电子信息工程学院全体同事表示衷心感谢。

最后还要感谢深圳大学的张玉贤博士对书稿的细节进行了卓有成效的修订。

本书配有电子课件,欢迎选用本书作为教材的老师使用,具体请联系出版社。

由于编写时间仓促,加上作者学识水平有限,书中难免有不足、错误和疏漏之处,敬请广大读者给予批评和指正。

编者

2020年8月于天津

满足高新技术产业发展的需要、适应科技高速发展、培养具有创新精神和实践能力的高素质人才,是我国高等教育的重要内容。本书以工程技术领域的需求为出发点,在满足相关专业基本要求的基础上,以目前工程上应用较为广泛的或将要推广应用的技术为主要内容;在章节编排上,与多数教材中采用的传统模式有所不同,更趋向于应用性、针对性和实用性。

本书可作为高等学校通信和电信工程等电子信息类专业本科生的教材,也可作为相关专业学生或相关专业技术人员的参考书。使用本书作教材时,可根据不同的教学要求进行取舍。

本书计划学时数为 72 学时,全书共分为 9 章。

第 1 章主要回顾、归纳了研究电磁场与电磁波所需的数学、物理基础知识,包括矢量及其代数运算,标量场与矢量场的分析方法、定理、定律,旨在建立场论与电磁场理论之间的联系,为后续章节的学习打下了一定的数学基础,能够运用数学知识分析和解决电磁场与电磁波的工程问题。本章建议学时为 4 学时,教师可根据学生对前期课程“矢量分析与场论”的掌握情况进行讲授。

第 2 章主要讨论了静电场、恒定电流场和恒定磁场的基本原理和分析方法,介绍工程中常用的电磁场能量以及作用力的计算,并结合实例说明静态场在工程实践中的应用。通过本章的学习,学生可在掌握静态场基本原理的基础上,熟练运用数学知识进行分析、计算,解决工程应用问题。本章建议学时为 12 学时,不同专业的学生可根据专业需要选择学习内容。

第 3 章主要讨论了介质的极化和磁化,分析了介质中的基本方程、静态场的能量和边界条件,并对复杂介质中的电磁特性进行了分析,包括介质的状态方程、电介质的色散特性、铁氧体介质的线性分析、等离子体以及各向异性电介质,同时对近些年研究进度较快的人工电磁介质——超颖材料的性质及应用价值进行了概述。学生可在掌握介质中静态场基本理论的基础上,通过自主学习的方法,学习复杂介质中的电磁特性和超颖材料特性,以拓展知识和提高能力。本章建议学时为 8 学时。

第 4 章主要讨论时变电磁场的普遍规律,包括麦克斯韦方程组和电磁场的波动方程、动态标量位和矢量位、坡印廷定理与坡印廷矢量、时谐电磁场及其复函数表达形式。重点在于培养学生在掌握时变电磁场基本方程和基本规律的基础上,具备将傅里叶变换等数学知识用于解决时变电磁场工程问题的能力。本章建议学时为 8 学时。

第 5 章主要分析了平面电磁波的传播特性、电磁波的极化特性,以及在边界上的反射与透射特性、在有耗介质中的均匀平面波的传播特性,内容安排由浅入深。通过本章的学习,学生可掌握相关工程问题的分析方法和过程,理解所得结果的物理意义及其工程应用。本章建议学时为 8 学时。

第6章主要介绍导行电磁波的一般特性与分析方法,重点分析了矩形波导与同轴波导的传输特性,以及谐振腔的性能参数和物理意义,最后讨论了平行双线导波系统。本章的重点在于通过分析微波系统中传输线的基本理论、分析方法与传输特性,学生能够运用场和路的观点对微波传输系统进行分析和初步判断。本章建议学时为10学时,对于后续将要开设“微波技术和天线”课程的专业,这一部分内容可以不讲。

第7章重点介绍了电磁波辐射和接收的基本原理,并对电磁波传播的基本方式、传输介质对电磁波传播的影响进行了分析和讨论。通过本章的学习,学生能够运用电磁波辐射和接收的基本原理与方法分析天线理论中的发射、传输与接收问题。本章建议学时为6学时,各专业可根据需要选择在后续课程“天线”与“电波传播”中讲授。

第8章重点介绍了静态场的边值问题,包括镜像法(解析法)和有限差分法(数值法)的基本原理和计算方法。此外,还针对工程中遇到一些实际的、比较复杂的电磁问题,介绍了电磁波常用的数值计算方法,并对数值计算方法的基本原理、处理技术、数值色散性能以及数值稳定性条件进行了讨论,较为全面地分析了解决复杂电磁问题的主流数值计算方法。重点在于引导学生不仅要熟悉静电场的边值问题、掌握镜像法和有限差分法的基本原理,还需重点掌握时域有限差分法、有限元法、矩量法三种主流数值计算方法的原理和特点。本章建议学时为10学时,各专业可根据需要选讲。

第9章主要讨论了生物电磁场、电磁辐射效应、心脏偶极子场及其除颤器和心脏起搏器、轴突的传输线模型、视网膜视神经纤维等组织器官的相关生物物理学特性,以及电磁波的生物效应和电磁防护等相关知识。最后介绍了电磁辐射的生物学效应及其产生原因、特征,目的在于引导学生从教材中走出来,积极探索电磁场与电磁波在实际生活和工程中的应用,拓宽学生的知识面,提升学生的创新和动手能力,培养学生分析和解决电磁问题的能力。本章建议学时为6学时,各专业可根据需要选讲或自学。

本书在编写的过程中,尽可能将学科发展的新思想、新概念、新成果以及编者的科研成果融入理论教学与实践教学中,并尽量结合工程应用实例进行分析和讨论,将学生工程能力、创新思维与创新能力的培养贯穿到这本书的各个环节,真正达到理论与实践相结合的目的,旨在提高学生的实践能力、创新能力。

对“电磁波工程基础”的学习有助于对其他专业课的理解和掌握,同时,也为后续课程(如微波技术与天线、移动通信、卫星通信、光纤通信、电磁兼容等)的学习奠定基础。教师在讲授的过程中可以考虑以下方面。

(1) 在理论教学内容的顺序安排上,可以根据实际教学需要,采取先电磁场的基本规律后电磁场的边值问题的建立、分析与求解,或者按照教材章节顺序进行授课。

(2) 在教学方法手段方面,可以采用传统板书结合多媒体课件进行讲授;根据学生的实际接受能力,安排习题课、讨论课,鼓励开展翻转课堂教学活动。

(3) 在实验训练方面,除了必要的实验内容外,可以适当扩展与教学内容相关的实验项目,开展课外实践活动,了解数值分析手段在电磁场分析中的应用,进行虚拟仿真实验,培养学生善于运用现代工具并结合专业知识解决问题的能力。

编者

2020年8月

1 矢量分析与场论	(1)
1.1 矢量及其空间投影	(1)
1.2 矢量代数	(2)
1.3 标量场和矢量场	(4)
1.4 矢量微分算子	(5)
1.5 标量场的梯度	(6)
1.6 矢量场的散度定理	(7)
1.7 矢量场的旋度与斯托克斯定理	(10)
1.8 亥姆霍兹定理	(14)
1.9 本章小结	(15)
习题 1	(16)
2 静态电磁场	(18)
2.1 电场强度和电位移	(18)
2.2 真空中的静电场方程	(20)
2.3 标量位和矢量位	(21)
2.4 导体系统的电容	(22)
2.5 电场力做功	(25)
2.6 恒定电流场	(27)
2.7 真空中的恒定磁场	(32)
2.8 磁位	(35)
2.9 恒定磁场的计算	(37)
2.10 磁场力	(42)
2.11 静态场工程应用实例	(44)
2.12 本章小结	(45)
习题 2	(46)
3 电介质和磁介质	(49)
3.1 电介质的极化	(49)
3.2 介质中的静电场方程	(51)
3.3 静电场的边界条件	(52)
3.4 静态电场的能量	(55)
3.5 介质的磁化	(58)
3.6 恒定磁场的边界条件	(61)

3.7	磁场的能量	(62)
3.8	复杂介质的电磁特性	(66)
3.9	人工电磁介质——超颖材料	(83)
3.10	本章小结	(88)
	习题 3	(88)
4	时变场与时谐场	(92)
4.1	电磁感应	(92)
4.2	位移电流	(94)
4.3	麦克斯韦方程组	(96)
4.4	时变电磁场的边界条件	(97)
4.5	能流密度矢量和能量定理	(99)
4.6	矢量位和标量位	(100)
4.7	时变电磁场唯一性定理	(103)
4.8	时谐电磁场	(104)
4.9	本章小结	(109)
	习题 4	(109)
5	平面波极化与衰减	(112)
5.1	理想介质中的平面电磁波	(112)
5.2	电磁波的极化特性	(115)
5.3	平面电磁波的反射与透射	(118)
5.4	有耗介质中的均匀平面波	(126)
5.5	本章小结	(138)
	习题 5	(138)
6	导行与谐振	(142)
6.1	导行电磁波的一般特性	(142)
6.2	矩形波导	(144)
6.3	矩形波导中的 TE_{10} 模	(150)
6.4	同轴线	(152)
6.5	谐振腔	(154)
6.6	传输线基础	(156)
6.7	本章小结	(165)
	习题 6	(166)
7	辐射传播与散射	(168)
7.1	推迟势	(168)
7.2	电流元的辐射	(169)
7.3	磁流元的辐射	(172)
7.4	对偶原理	(174)
7.5	镜像原理	(176)
7.6	洛伦兹互易定理	(179)
7.7	惠更斯原理	(181)

7.8	电波传播概论	(184)
7.9	理想导体圆柱对平面电磁波的散射	(193)
7.10	理想导体圆柱对柱面波的散射	(199)
7.11	理想导体球对平面电磁波的散射	(202)
7.12	本章小结	(208)
	习题 7	(208)
8	边值问题及数值解	(210)
8.1	静态场的边值问题	(210)
8.2	镜像法	(211)
8.3	有限差分法	(219)
8.4	时域有限差分法	(223)
8.5	有限元法	(236)
8.6	矩量法	(251)
8.7	本章小结	(266)
	习题 8	(266)
9	电磁波生物效应及应用	(269)
9.1	生物电磁场	(270)
9.2	电磁辐射的生物学效应及特征	(272)
9.3	心脏偶极子场	(274)
9.4	轴突和视网膜视神经纤维	(276)
9.5	电磁危害与电磁辐射的安全标准	(280)
9.6	应用实例	(283)
9.7	本章小结	(284)
	习题 9	(284)
	附录 A 常用的矢量变换公式	(286)
	附录 B 三种坐标系的梯度、散度、旋度和拉普拉斯运算	(287)
	参考文献	(289)

矢量分析与场论

矢量分析这一应用数学方法用于电磁学的定量计算,使得电磁波的应用研究具有了无限的生命力。本章在实数域内讨论了矢量代数和矢量分析,在此基础上介绍了场论的内容,以亥姆霍兹定理作为分析电磁场方程的基础,突出了工程数学在电磁波分析中的重要应用。

1.1 矢量及其空间投影

矢量是一种数学表达方式。特定含义的物理量,如力、速度、电场强度和磁场强度等,它们既有大小又有方向,用矢量表示这些物理量,能够全面地反映它们的运算关系。

在空间直角坐标系中,研究对象的位置是 $P(x, y, z)$,位置矢量及其坐标表达如图 1-1 所示。我们通常可用一个由原点指向 P 点的矢量 \boldsymbol{r} 表示,其大小为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.1.1)$$

\boldsymbol{r} 的方向可用其与坐标轴的夹角 α , β 和 γ 表示,这三个夹角的方向余弦分别为

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r} \quad (1.1.2)$$

在实际应用中,为了方便,我们把矢量 \boldsymbol{r} 表示为

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \quad (1.1.3)$$

式中, \boldsymbol{e}_r 是 \boldsymbol{r} 的单位矢量,即 \boldsymbol{e}_r 是大小为 1,以坐标原点为球心、 r 为半径的球面的径向矢量。 \boldsymbol{r} 向 3 个坐标轴的投影分量分别为 x , y , z ,则表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z \quad (1.1.4)$$

其中, \boldsymbol{e}_x , \boldsymbol{e}_y , \boldsymbol{e}_z 为直角坐标系中的单位矢量。同样,空间的另一点 $P'(x', y', z')$ 可以表示为

$$\boldsymbol{r}' = r'\boldsymbol{e}_r \quad (1.1.5)$$

或者

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{e}_x x' + \boldsymbol{e}_y y' + \boldsymbol{e}_z z' \quad (1.1.6)$$

我们把 \boldsymbol{r} 和 \boldsymbol{r}' 统称为位置矢量。

例 1.1 在球坐标系中,单位矢量是 \boldsymbol{e}_r , \boldsymbol{e}_θ , \boldsymbol{e}_φ , 如果把 \boldsymbol{r} 和 \boldsymbol{r}' 向球坐标系投影,就

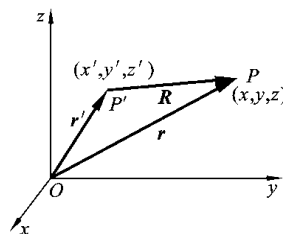


图 1-1 位置矢量及其坐标表达

会分别得到式(1.1.3)和式(1.1.5),即 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, $\mathbf{r}' = r'\mathbf{e}_r$ 。 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 在球坐标系中的表示不含 \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_φ , 只有一个投影分量, 显然更便于计算。在柱坐标系中的单位矢量是 \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z , 如果把 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 向柱坐标系投影, 分别得到 $\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho\rho + \mathbf{e}_z z$, $\mathbf{r}' = \mathbf{e}_\rho\rho' + \mathbf{e}_z z'$, 在柱坐标系中位置矢量的表示不含 \mathbf{e}_φ 分量, 计算也有所简化。

1.2 矢量代数

与过去所学的实数代数运算法则不同, 矢量之间的运算有自己的规律, 下面讨论矢量在坐标表达中的一些特点。

平行移动原理。如图1-2所示, 矢量 \mathbf{r} 沿垂直于 \mathbf{r} 的方向移动(见图1-2(a))和沿 \mathbf{r} 的延长线移动(见图1-2(b)), 对 \mathbf{r} 的大小和方向都不产生影响。这个原理使我们可以把所有参与运算的矢量的起点放到坐标原点, 也可以根据运算需要放到坐标系的任何位置(任意平移, 见图1-2(c)), 前提是遵从平行移动原理。

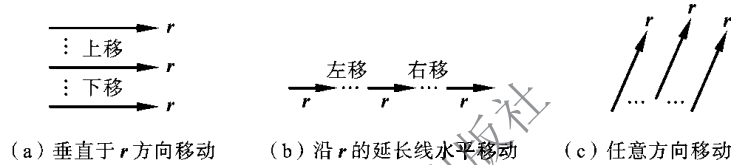


图 1-2 平行移动原理

1.2.1 矢量加、减法

矢量加法可以用平行四边形法则, 如图1-3所示; 也可以用三角形法则, 如图1-4所示。两图中均满足

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (1.2.1)$$

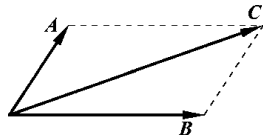


图 1-3 平行四边形法则

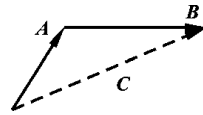


图 1-4 三角形法则

图1-3中, \mathbf{C} 是以 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为邻边的平行四边形对角线; 图1-4中, \mathbf{B} 按照平行移动原理, 起点移到了 \mathbf{A} 的终端, \mathbf{C} 是构成封闭三角形的第三边, 方向由 \mathbf{A} 的起点指向 \mathbf{B} 的终点。显然采用上述两种方法得到 \mathbf{C} , 结果是唯一的。

矢量减法同样可以采用上述方法得到结果, 注意运用平行移动原理。 $\mathbf{B} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$ 都可以从图1-3和图1-4中得到唯一结果。

我们还可以在直角坐标系中按照式(1.1.4)和式(1.1.6)中的投影形式, 把各分量分别相加、减。例如, 两个矢量 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 的和为

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}' = \mathbf{e}_x(x + x') + \mathbf{e}_y(y + y') + \mathbf{e}_z(z + z') \quad (1.2.2)$$

\mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 的差为

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{e}_x(x - x') + \mathbf{e}_y(y - y') + \mathbf{e}_z(z - z') \quad (1.2.3)$$

在球坐标系中, \mathbf{r} 与 \mathbf{r}' 的和为

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}' = \mathbf{e}_r(r + r') \quad (1.2.4)$$

注意式(1.2.2)和式(1.2.4)只是在不同坐标系下表达形式不同,但是,它们的结果(大小和方向)是相同的。如果用矢量加、减的三角形法则,在图 1-1 中,得到

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (1.2.5)$$

\mathbf{R} 的大小(模)为

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (1.2.6)$$

方向由 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 来确定, R 是 P' 到 P 之间的距离, \mathbf{R} 称为距离矢量,表示 P 和 P' 之间的矢量距离。式(1.2.5)和式(1.2.6)在后面的电磁场分析和计算中随时都会用到。

对于矢量函数 $\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$, 其中 (A_x, A_y, A_z) 是函数 \mathbf{A} 在直角坐标系中沿三个坐标轴的投影函数; 同样, 矢量函数 $\mathbf{B} = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z$, 则

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = e_x(A_x + B_x) + e_y(A_y + B_y) + e_z(A_z + B_z) \quad (1.2.7)$$

\mathbf{A} 和 \mathbf{B} 之差遵从与式(1.2.3)相同的规律。

1.2.2 矢量的乘法

与实数的乘法运算有很大区别,两个矢量的乘法分别定义为标量积、矢量积和张量积。

1. 标量积(点乘)

两矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的标量积为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1.2.8)$$

式中, θ 是 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的夹角, 如图 1-5 所示。在直角坐标系中, 也可以利用投影来计算标量积, 例如

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.2.9)$$

其结果是一个标量函数。

一般情况下, 如果两个矢量不共面, 按照图 1-2 的原理, 对其中一个矢量进行平移, 使它们的起点相交, 如图 1-4 所示, 可以按照式(1.2.9)进行运算。

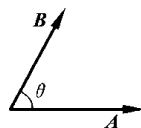


图 1-5 两矢量的标量积

2. 矢量积(叉乘)

两矢量的矢量积仍是一个矢量, 表示为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.2.10)$$

\mathbf{C} 的大小为 $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta$, 这个值刚好是以 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为邻边的平行四边形的面积, 如图 1-6 所示, \mathbf{C} 的方向垂直于 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 所在的平面, 并由右手定则确定, 右手的四个指头由 \mathbf{A} 的终端转向 \mathbf{B} 的终端, 拇指的指向就是 \mathbf{C} 的方向。在直角坐标系中, 两矢量的矢量积也可以用它们在各坐标轴上的投影来计算, 为了便于记忆, 表示为行列式:

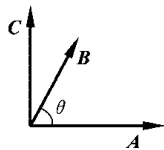


图 1-6 两矢量的矢量积

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.2.11)$$

可以验证: 把式(1.2.10)中各矢量写成直角坐标系投影形式, 用普通乘法(分配率)展开, 注意 $e_x \times e_y = e_z$, 以此类推; 再把式(1.2.11)按行展开, 就会看到式(1.2.10)和式

(1.2.11)的结果相同,请读者自己验算。

3. 混合积

三个矢量的混合积可以表示为 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, 结果是一个标量, 其大小是以 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} 为邻边的平行六面体的体积, 如图 1-7 所示。常用的变换式为

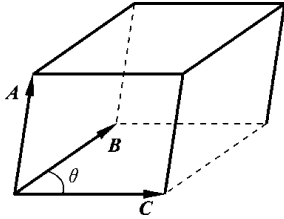


图 1-7 三个矢量的混合积

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.2.12)$$

从图 1-7 中可以验证这个结果。也可以用投影来计算, 结果是

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1.2.13)$$

三个矢量的矢量积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, 其结果是一个矢量, 满足代数运算的结合律, 用式(1.2.11)定义的行列式计算两次就可以得到如下结果:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.2.14)$$

常用的矢量变换公式见附录 A, 请读者自行验证。

4. 张量积

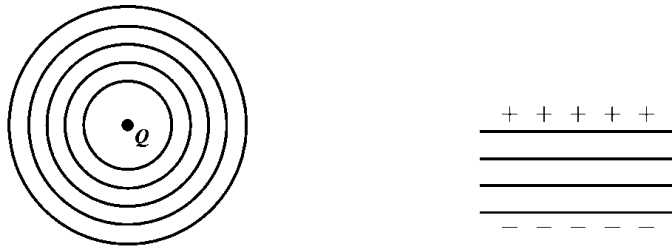
两个矢量的张量积又称为并矢, 在直角坐标系中, 并矢写成

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z)(\mathbf{e}_x B_x + \mathbf{e}_y B_y + \mathbf{e}_z B_z) \\ &= \begin{vmatrix} A_x B_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x & A_x B_y \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y & A_x B_z \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z \\ A_y B_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x & A_y B_y \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y & A_y B_z \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \\ A_z B_x \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x & A_z B_y \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y & A_z B_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

张量能够全面地表达介质的电磁性质, 其应用将在第 3 章讨论。

1.3 标量场和矢量场

带电体所在空间中每一点都可以定义一个电位 U_1, U_2, \dots ($U_i = q/4\pi\epsilon r_i$), 电位和空间的点 r_i 也是一一对应的, 这些标量的总和构成一个标量场 $U(x, y, z, t)$, 标量场可以用等值面表示, 如等电位面。温度场、密度场和电流强度场等也是标量场。例如, 孤立带电点电荷 Q 周围的等电位面是一个个同心的球面, 而两个无限大带电平板之间的等位面是一簇平行于平板的平面, 如图 1-8 所示。



(a) 点电荷 Q 周围的等电位面

(b) 两个无限大带电平板之间的等电位面

图 1-8 两种常见的等位面

电场中的每一点都可以定义为一个电场强度 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$, 这些矢量的总和构成一个矢量场 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, 矢量场可以用场线表示, 如电力线、磁力线等。电场、磁场和电流密度场等属于矢量场。本课程所涉及到的电场强度 (\mathbf{E}) 和磁场强度 (\mathbf{H}) 就是矢量场, 电偶极子周围的电场(静电场)和条形磁铁周围的磁场(静磁场)分别如图 1-9 和图 1-10 所示。

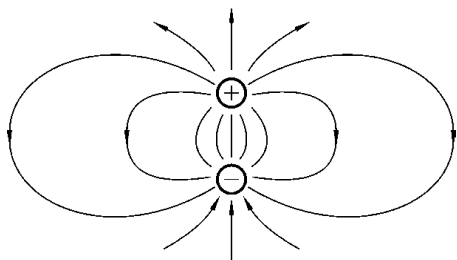


图 1-9 电偶极子周围的电场

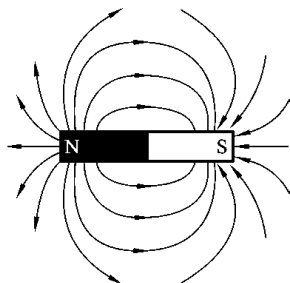


图 1-10 条形磁铁周围的磁场

1.4 矢量微分算子

1. 哈密顿算子

在矢量函数的分析运算中, 用到矢量微分算子“ ∇ ”(读作“del”或“纳布拉”), 在直角坐标系中, 它的展开式为

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.4.1)$$

又称为哈密顿算子。它既有代数运算的属性, 又有微分运算的属性, 这两种属性的变换公式在附录 A 的“矢量微分”中给出。在圆柱坐标系和球坐标系中, 哈密顿算子的展开式见附录 B。

2. 拉普拉斯算子

拉普拉斯算子是由两个哈密顿算子的点乘得到

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad (1.4.2)$$

在直角坐标系中, 它的展开式为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.4.3)$$

在圆柱坐标系和球坐标系中, 拉普拉斯算子的展开式见附录 B。

例 1.2 对于距离矢量 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, 证明:

$$(1) \quad \nabla R = -\nabla' R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{e}_R \quad (1.4.4)$$

$$(2) \quad \nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \quad (1.4.5)$$

证

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{e}_x x' + \mathbf{e}_y y' + \mathbf{e}_z z' \end{aligned}$$

距离矢量 \mathbf{R} 的模为

$$R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$$

∇ 表示对场点坐标进行微分

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

∇' 表示对源点坐标进行微分

$$\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \nabla R &= \mathbf{e}_x \frac{\partial R}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial R}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial R}{\partial z} = \mathbf{e}_x \frac{x-x'}{R} + \mathbf{e}_y \frac{y-y'}{R} + \mathbf{e}_z \frac{z-z'}{R} \\ &= \frac{1}{R}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{e}_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla' R &= \mathbf{e}_x \frac{\partial R}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial R}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial R}{\partial z'} = -\mathbf{e}_x \frac{x-x'}{R} - \mathbf{e}_y \frac{y-y'}{R} - \mathbf{e}_z \frac{z-z'}{R} \\ &= -\frac{1}{R}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{R}}{R} = -\mathbf{e}_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \nabla \frac{1}{R} &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = -\mathbf{e}_x \frac{x-x'}{R^3} - \mathbf{e}_y \frac{y-y'}{R^3} - \mathbf{e}_z \frac{z-z'}{R^3} \\ &= -\frac{1}{R^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla' \frac{1}{R} &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R} \right) + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{R} \right) + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{R} \right) = \mathbf{e}_x \frac{x-x'}{R^3} + \mathbf{e}_y \frac{y-y'}{R^3} + \mathbf{e}_z \frac{z-z'}{R^3} \\ &= \frac{1}{R^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \end{aligned}$$

式(1.4.4)和式(1.4.5)可以作为常用公式。

1.5 标量场的梯度

标量场的梯度表示某一点处标量场的变化率。它是一个矢量场,梯度方向指向标量增加率最大的方向(等值面的法线方向),梯度的数值等于该方向上标量的微分(增加率)。

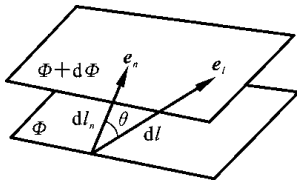


图 1-11 电位的变化率

例如,空间各点的电位 Φ 构成一个标量场,任选两个等位面 Φ 和 $\Phi + d\Phi$,电位的变化率如图 1-11 所示。可以看出沿不同的方向, Φ 的变化率不同, \mathbf{e}_n 为 Φ 增大方向等位面的法向矢量, \mathbf{e}_l 沿任意方向。可以看出 $dl \cos \theta = dl_n$, 所以

$$\frac{d\Phi}{dl_n} = \frac{d\Phi}{dl} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{或} \quad \frac{d\Phi}{dl} = \frac{d\Phi}{dl_n} \cdot \cos \theta \quad (1.5.1)$$

因此,沿 \mathbf{e}_n 方向 Φ 的变化率最大,根据定义,电位 Φ 的梯度为

$$\nabla \Phi = \mathbf{e}_n \frac{\partial \Phi}{\partial l_n} \quad (1.5.2)$$

在直角坐标系中,标量场 Φ 的梯度表达式为

$$\nabla \Phi = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.5.3)$$

圆柱坐标系和球坐标系中梯度的表达式见附录 B。

例 1.3 在距离点电荷 r 处的电位 $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$, 求它的梯度。

解
$$\nabla \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \nabla \frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \right) = -\frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon r^3}$$

对于电场, 该点的场强

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon r^3} = -\nabla \Phi$$

可见空间中任何一点 $P(x, y, z)$ 处的电场强度 \mathbf{E} 就是该点电位所对应梯度的负值。

1.6 矢量场的散度定理

1.6.1 矢量的通量

首先定义面元矢量为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_n dS \quad (1.6.1)$$

式中, \mathbf{e}_n 是面元的单位法线矢量。设有一矢量场 \mathbf{A} , 在场中任取一面元 $d\mathbf{S}$, 如图 1-12 所示, 则

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A \cos\theta dS \quad (1.6.2)$$

称为 \mathbf{A} 穿过 $d\mathbf{S}$ 的通量。

例如, 在电场中, 电通量定义为 $d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 。在磁场中, 磁通量定义为 $d\Phi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 。穿过整个曲面 S 的总通量

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.6.3)$$

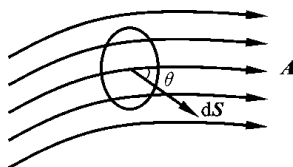


图 1-12 \mathbf{A} 穿过 $d\mathbf{S}$ 的通量

1.6.2 矢量场的散度

1. 穿过闭合曲面的通量及其物理定义

如图 1-13 所示, 在矢量场 \mathbf{A} 中, 围绕某一点 P 作一闭合曲面 S , 法线方向向外, 则 $\Phi = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 是矢量 \mathbf{A} 穿过闭合曲面 S 的通量或发散量。若 $\Phi > 0$, 则流出曲面 S 的通量比流入的多, 即通量由曲面 S 内向外扩散, 如图 1-14 所示, 说明曲面 S 内存在正源。若 $\Phi < 0$, 则流入曲面 S 的通量比流出的多, 即通量向曲面 S 内汇集, 如图 1-15 所示, 说明曲面 S 内有负源。若 $\Phi = 0$, 则流入曲面 S 的通量等于流出的通量, 说明曲面 S 内无源, 如图 1-13 所示。

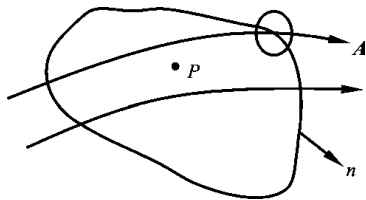


图 1-13 矢量 \mathbf{A} 穿过闭合曲面 S 的通量

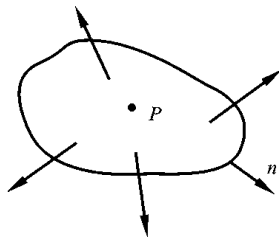


图 1-14 通量由曲面 S 内向外扩散