

Mechanical Analysis and Research of
Spatial Curved Beams

空间曲线梁的 力学分析与研究



◎ 朱莉莉 王广欣 著

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

空间曲线梁的力学分析与研究

朱莉莉 王广欣 著

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

《空间曲线梁的力学分析与研究》共分6章,对空间曲线梁的经典理论及最新研究成果做了较全面的阐述。本书主要介绍了空间曲线梁在复杂荷载作用下的力学行为、平面曲线梁面外精确解、超静定平面曲线梁面内位移的精确解、变曲率变挠率变截面空间曲线梁自由振动理论以及典型曲线梁自由振动动态刚度分析。《空间曲线梁的力学分析与研究》可作为力学专业的研究生教材,也可供从事结构工程力学理论研究与土木及机械专业的科技人员参考。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

空间曲线梁的力学分析与研究 / 朱莉莉, 王广欣著. —北京: 北京理工大学出版社, 2020. 10

ISBN 978 - 7 - 5682 - 8751 - 7

I. ①空… II. ①朱… ②王… III. ①曲梁 - 动力学分析 - 研究
IV. ①TU323. 3

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第132574号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)
(010) 82562903 (教材售后服务热线)
(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 /

开 本 / 710毫米×1000毫米 1/16

印 张 / 11

责任编辑 / 江 立

字 数 / 120千字

文案编辑 / 江 立

版 次 / 2020年10月第1版 2020年10月第1次印刷

责任校对 / 周瑞红

定 价 / 69.00元

责任印制 / 施胜娟

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前 言

曲线梁因其流线造型以及良好的受力特性，在航空、机械、建筑领域等都得到了广泛的应用。通过对曲线梁研究现状的分析，总结有关研究成果，可以看出，由于问题的复杂性，现有的曲线梁理论研究还存在局限性：在结构静力分析中，大部分研究成果未计入翘曲或横向剪切变形的影响，而考虑两种影响的又未提出显式表达；对于曲线梁动力学研究，则缺少一般空间曲线梁的动力学控制方程以及求解方法。本书即是针对上述两方面问题分别进行了研究。

本书在十年前就已经初建架构，这十年来在研究中不断丰富其内容，希望能将成熟的理论成果例如空间曲线梁在复杂荷载作用下的力学行为、平面曲线梁面外精确解、超静定平面曲线梁面内位移的精确解以及变曲率变挠率空间曲线梁和变曲率变挠率变截面空间曲线梁自由振动理论都著于书中，可以帮助读者更好地利用这些科研成果，使之转化为生产力，或者启迪自己的思维，在生产、教学和科研工作中得到进一步的发展和创新。

本书旨在为从事结构工程力学理论设计和研究人员提供进一步学习曲线梁和进行专题研究时的理论基础，亦可作为力学等相关专业的研究生教材。

在本书的编写过程中，赵颖华教授提供了大量研究成果，王广欣副教授在本书内容、体系、方法等许多方面都做了大量工作，一些研究生也在公式推导与录入方面做了很多有意义的贡献，在这里向他们表示感谢。在本书的出版过程中，编辑也给予了作者大力支持和帮助，作者深表感谢。

限于作者的水平和时间限制，本书必然存在不少的缺点和错误，恳请读者和各方面专家批评指正。

作者
2019年12月

目 录

第 1 章 绪 论	(1)
1.1 曲线梁静力学研究历史和现状	(5)
1.1.1 理论研究	(5)
1.1.2 方法研究	(10)
1.2 曲线梁振动问题研究历史和现状	(17)
1.3 目前曲线梁研究中存在的不足	(23)
1.4 本书研究的主要内容	(25)
第 2 章 空间曲线梁在复杂荷载作用下的力学行为	(27)
2.1 空间曲线的自然标架	(29)
2.2 平衡微分方程的建立	(32)
2.3 几何方程的建立	(35)
2.4 本构关系	(38)
2.5 空间曲线梁自然坐标精确解	(42)
2.6 考虑翘曲的空间曲线梁解答	(45)
2.7 边界条件	(47)
2.8 本章小结	(49)

第 3 章 平面曲线梁面外精确解	(51)
3.1 精确解答	(53)
3.2 计算实例并与经典 Heins 解答的比对	(57)
3.3 翘曲变形效应	(63)
3.4 本章小结	(67)
第 4 章 超静定平面曲线梁面内位移的精确解	(69)
4.1 一次超静定曲线梁面内集中荷载作用下位移分析	(72)
4.2 二次超静定曲线梁横向集中荷载作用下位移分析	(76)
4.3 三次超静定曲线梁横向集中荷载作用下位移分析	(82)
4.4 有限元数值模拟验证	(87)
4.5 超静定平面曲线梁径向位移影响因素	(91)
4.5.1 荷载作用位置与曲率对荷载作用处径向位移的 影响	(91)
4.5.2 曲率对任意位置径向位移的影响	(93)
4.5.3 边界条件对径向位移的影响	(95)
4.6 本章小结	(96)
第 5 章 变曲率变挠率变截面空间曲线梁自由振动理论	(97)
5.1 运动微分方程	(100)
5.2 控制方程的建立	(102)
5.3 弗宾纳斯法	(105)
5.4 动态刚度法	(112)

5.5	有限元程序	(115)
5.6	本章小结	(118)
第6章	典型曲线梁自由振动动态刚度分析	(119)
6.1	圆弧平面曲线梁的面内和面外自由振动	(122)
6.2	抛物线形平面曲线梁的面内和面外自由振动	(126)
6.3	圆柱螺旋梁的自由振动	(129)
6.4	双曲螺旋梁的自由振动	(137)
6.5	本章小结	(143)
参考文献	(144)

第 1 章

绪 论



曲线梁作为一种重要的结构形式被广泛应用于航天、机械、土木工程中。在现代结构工程中，除了建筑中常见的圆形阳台、剧院楼厅、悬楼、凸窗以及其他圆形建筑物上所用的曲线梁以外，随着国家经济持续快速发展，交通运输和城市基础设施建设日益受到重视，公路、铁路、城市道路和立交枢纽等各种工程建设蓬勃发展，曲线桥梁的应用也越来越广泛。在城市交通和高等级公路的设计中往往要求桥梁的平面布置服从于公路线型的需要，曲线型桥梁不仅有线路平顺、走行性好、美观及容易布置等优点，更是一种能满足特殊要求的重要桥型（如图 1.1、图 1.2 所示）。在铁路交通中，由于我国地域辽阔、江河纵横、海岸线漫长，研究和发​​展铁路大跨度桥梁已经势在必行，而空间曲线桥梁不仅结构优雅美观，更可以服从路线的布局和提高枢纽的使用性能，可以成为我国铁路大跨度桥梁结构的重要选择。近年来，空间曲线梁在石油钻井工程中也得到了应用。由于三维曲井的井眼轴线是一条复杂的任意曲率和挠率的三维空间曲线，三维曲井内的钻柱可看成是具有任意曲率和挠率的空间曲线梁。在其他工业设施中，如某些有工艺要求的厂房的圆弧吊车梁、高炉环形出铁场等也会大量用到曲线梁。另外，在壳体结构的简化中，曲线梁结构的应用也相当重要。

曲线梁由于曲率的影响，导致梁内弯矩和扭矩的耦合即弯扭耦合作用，使得对曲线梁的研究相对直线梁要复杂得多。曲线梁不同于直梁，它是弯扭构件，其弯曲、扭转、翘曲的几何方程相互耦合。特别是薄壁曲线梁，除纯扭转外，还相应伴随翘曲以及畸变影响，有时还存在“弯、剪、扭耦合”效应。曲线梁的变形多为弯扭组合变形，纯弯或纯扭的变形很

少。在受不同荷载作用下，根据不同的边界支承条件，用不同的研究方法对曲线梁的静力和动力进行分析就变得相当复杂。



图 1.1 深圳市黄木岗立交桥



图 1.2 汕头市海湾大桥

过去数十年中，国内外的许多专家学者对曲线梁的研究作了大量工作，最少出现了 5 篇曲线梁研究方面综述性的文章，有 Markus 和 Nasasi 的《曲线梁的振动》^[1]、Laura 和 Maurizi 的《拱形结构研究进展》^[2]、Childamparam 和 Leissa 的《平面曲线梁（环形结构与拱结构）的振动》^[3]、Auciello 和 De Rosa 的《圆弧拱的自由振动》^[4]，以及赵跃宇等的

《曲线梁研究进展》^[5]等。而在土木工程领域有关曲线梁的专著有：日本高岛春生在 1979 年出版的《曲线梁桥》^[6]、日本岛田静雄与仓西茂在 1981 年出版的专著《曲线梁的计算公式》^[7]、美国马里兰大学 Heins C. P. 教授在 1981 年出版的《结构杆件的弯曲与扭转》^[8]、我国学者姚玲森在 1989 年出版的比较全面讲述曲线梁的专著《曲线梁》^[9]、李惠生和张罗溪在 1992 年合著的《曲线梁桥结构分析》^[10]、邵容光和夏淦在 1994 年合著的《混凝土弯梁桥》^[11]、孙广华在 1995 年所著的《曲线梁桥计算》^[12]，以及 2004 年童根树和许强合著的《薄壁曲梁线性和非线性分析理论》^[13]等。

1.1 曲线梁静力学研究历史和现状

1.1.1 理论研究

关于曲线梁最早的研究可以追溯到19世纪^[14-16]，Vlasov对圆形截面弯曲杆件的扭转问题进行了研究^[17]。比较深入的曲线梁理论研究始于20世纪五六十年代。由于曲梁的复杂性，对曲线梁静力学的理论研究始于平衡方程的建立。按平衡方程方法，Timoshenko和Gere^[18]采用类似于直梁的方法，建立了适用于弯曲构件的内力-曲率的关系，导出了不考虑翘曲影响的空间曲线梁的平衡微分方程，可以用于狭长矩形截面（翘曲刚度为零）的曲梁研究，该方法也成为曲杆有限元的理论依据。Vlasov^[17]通过考虑曲率影响对直梁的内力表达式进行了修正，将曲线梁问题的研究拓展到任意截面形式，并考虑了翘曲的影响，得到了曲线梁的平衡方程即Vlasov微分方程。Yang和Kuo^[19]从虚功原理出发，推导出了空间曲线梁的平衡微分方程。

Vlasov是第一个比较系统地研究薄壁构件问题的学者。他对于翘曲变形的研究奠定了薄壁构件分析的理论基础。其后的许多曲梁方面的研究，都建立于Vlasov理论基础之上。随后Dabrowski^[20]进一步研究了不对称截面薄壁曲梁的弯扭问题，补充了Vlasov在推导过程中遗漏的项次。Yoo^[21,22]将直梁的内力-位移关系，考虑曲率影响修正后代入总势能方

程, 其就曲梁问题的线性理论也与 Vlasov 完全相同。要解决曲梁问题, 首先就要找到曲梁的翘曲位移, Usami 和 Koh^[23] 按照这一思路, 通过假定中面非线性剪应变为零, 得到了曲梁的翘曲位移表达式, 并应用于拱问题的理论研究。Rajasekaran 和 Padmanabhan^[24]、Kang 和 Yoo^[25] 的曲梁理论均采用了 Usami 的翘曲位移表达式。Papangelis 和 Trahair^[26,27]、Pi 和 Trahair^[28] 则绕过了翘曲位移, 直接通过对纵向微元的变形分析, 得到轴向应变表达式。

经典曲线梁的结构理论是以平面曲线梁为研究对象, 考虑荷载的主要来源是平面曲线梁的自重、车辆荷载等竖向荷载, 所以对曲线梁的受力计算主要是集中力、均布荷载等对平面曲线梁的面外作用, 研究其弯扭耦合问题, 给出变形和内力的解析表达式, 以此为基础进行曲线桥梁的结构设计。高岛春生^[6] 提出通过求解节点处的超静定内力, 然后求解各梁的内力与位移的结构力学方法求解曲线梁。Heins 等^[8,29-34] 学者一直致力于寻求平面曲线梁在复杂面外荷载作用下的闭合解及各种近似解, 也积累了许多有用的图表和公式。其主要方法是联立曲线梁的 Vlasov 微分方程、几何方程和物理方程, 考虑翘曲的影响, 可以得到平面曲线梁位移法形式的控制微分方程, 继而给出面外荷载作用下变形的解析表达式。姚玲森^[9] 在本书参考文献 [8] 的基础上, 研究了常曲率平面曲线梁在面外荷载作用下的力学响应, 按傅里叶级数求解了曲线梁的内力, 并通过较详细的分析和推演, 应用结构力学的方法较系统地给出了不同体系曲线梁在各种典型荷载作用下的内力和变形的计算公式, 得到了大量研究成果。Tufekci 和 Dogruer^[35] 计入横向剪切的影响, 给出了变曲率变截面平面拱的面外变

形精确解。随着研究的深入，经典曲线梁的结构理论已经成为曲线桥梁的设计计算依据^[6,11-12]。

然而，经典曲线梁的计算理论中很少涉及平面曲线梁在受到面内荷载作用时所产生的内力和变形，尤其是在受到变温作用下曲线梁的横向内力和位移计算。但据有关部门的数据统计，曲线梁桥横向位移过大导致跨段断裂破坏的事故发生在不少^[36]，所以针对近年来曲线桥梁面内变形引起破坏的现象，赵颖华和李晓飞等^[36,37]应用结构力学方法，计算了曲线梁在受到横向荷载作用时所产生的内力和变形，尤其是在受到变温作用下曲线梁的横向内力和位移计算上取得了成果。

可以看到，在曲线梁的解析方法中，结构力学方法是在工程中应用最广泛的方法之一。它是一种基于单纯扭转理论的方法，单纯扭转理论是把曲线梁当作集中在梁轴中心线处的弹性杆件处理，并认为受到荷载后梁横截面仍然保持平面（即不发生翘曲），且横截面形状保持不变（即不发生畸变）。这种方法的特点是能够利用公式直接计算曲线梁桥的内力与变形，不但简单明了，而且能够得到满足使用要求的唯一精确解，为广大工程技术设计所接受。这种方法一般能应用于跨长大于横截面尺寸四倍以上的所有实体截面及箱形截面的混凝土曲线梁，此时所引起的误差一般在工程设计容许范围内。但结构力学方法不能完整地考虑曲线梁的横向剪切变形、翘曲扭转和畸变等效应，对于某些截面形状，当翘曲扭转在总扭转中占有相当大的比例时，采用纯扭转理论就不能够得到准确的结果，特别是对于壁厚很薄的预应力混凝土曲线箱梁桥或钢曲线梁桥，其误差在实用中不能忽略，所以必须考虑翘曲扭转的影响。另外，曲杆结构力学将梁的扭

转中心（扭心或剪心）和形心合二为一，不能反映曲线梁桥扭转中心与形心的分离影响。

近年来曲线梁静力学的解析分析工作向空间曲线梁拓展，熊汉伟和张培源^[38]建立了自然坐标下空间曲杆的控制方程，并求出了其静定问题的通解；朱渝春等^[39]给出了各向异性材料薄壁截面空间曲杆双力矩的一般解法；虞爱民和易名^[40]考虑与扭转有关的翘曲和横向剪切对截面变形的影响，通过求解广义翘曲坐标提出了自然弯扭梁受复杂载荷作用时静力分析的方法；郑安节等^[41]在本书参考文献 [38] 的理论框架基础上提出了空间曲杆小变形问题自然标架的矩阵分析解答。

总的来说，我国学者对曲线梁静力学的理论研究主要集中在以下三方面：

①基于单纯扭转理论（不考虑翘曲）的圆弧曲杆，其解析法主要有两种，一种是基于曲杆的微分方程^[38,41]，另一种是结构力学的力法^[9]，可以得到不同边界条件和荷载形式下曲杆力学效应（弯矩、扭矩、剪力和挠度、扭转角）的计算公式，供设计者参考使用。这方面的研究由于未考虑作为薄壁杆件的翘曲扭转和畸变等力学特性，计算结果存在一定的误差，适用于曲线板桥或由翘曲刚度较小的 T 梁或工字梁组成的小跨径大曲率曲线梁桥。

②基于开口薄壁杆件翘曲扭转理论的曲线梁理论。开口薄壁曲线梁不仅广泛应用于桥梁工程中，同时也大量应用于其他工业设施、民用建筑中，这些场合经常使用 Π 形、工字形、槽钢、H 形的开口薄壁曲梁，当然也有箱形梁。我国学者对开口薄壁曲梁的研究较多，周文伟等^[42]导出

了空间曲梁单元在三维空间变形中的应变 - 位移关系,但未考虑截面翘曲的影响。童树根^[43]根据薄壁构件的两个基本假定导出单轴对称工字形圆弧曲梁两种不同放置条件下翘曲位移、正应力、剪应力以及各自合力的表达式。许钧陶和童树根^[44]研究了任意开口截面圆弧曲梁弯扭效应的精确分析方法。另外,针对公路桥梁中常出现的变曲率的情况,夏滢^[45]提出了分析变曲率曲梁的理论,该理论主要以 Vlasov 微分方程为基础,但该文未考虑曲梁的扭心和形心分离。

③闭口薄壁曲线箱梁的研究。李国豪院士^[46,47]从箱梁内任一点的位移表达式出发,近似取曲率沿梁宽变化为线性函数,推导了考虑初曲率影响、截面翘曲和畸变影响的大曲率箱梁挠曲扭转理论——法向应力分析和平衡微分方程。钱寅泉、倪元增^[48,49]忽略了约束扭转、畸变以及剪力滞效应间的耦联应变能,只计及弯曲与剪力滞效应以及弯曲与扭转因初曲率引起的耦联,建立了考虑初曲率影响及剪力滞效应影响的弯扭耦联方程和畸变方程。

另外,曲线梁的基本理论也从其他方面得到了发展。Kapania 和 Li^[50]基于刚截面假设从几何学的角度得到了更精确的曲线梁理论。Jiang 等^[51]建立了水平曲线梁的空间位移模型。Hodges^[52]给出了有初始弯曲和扭转各向异性梁的内禀理论。Piovan 和 Cortinez^[53]建立了考虑剪切影响的各向异性薄壁曲线梁的理论模型。虞爱民等^[54,55]分别导出了一般曲线梁剪应力和径向应力的计算公式并给出了剪应力及径向应力的显式解。Li 等^[56]研究了薄壁结构中减体重与应力分布之间的关系,得出了薄壁曲线梁应力会因为厚度而重分布的结论。Chiang^[57]分析了泊松比在曲线梁分析中的