泛函分析

李素红 商美娟 武利猛◎编著

燕山大学出版社
YANSHAN UNIVERSITY PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

图书在版编目（CIP）数据

泛函分析 / 李素红，商美娟，武利猛编著. —秦皇岛：燕山大学出版社，2020.10
ISBN 978-7-5761-0068-6

I. ①泛… II. ①李… ②商… ③武… III. ①泛函分析－高等学校－教材
IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 196513 号

泛函分析

李素红 商美娟 武利猛 编著

出 版 人：陈 玉
策划编辑：朱红波
责任编辑：朱红波
封面设计：刘韦希
出版发行：燕山大学出版社 YANSHAN UNIVERSITY PRESS
地 址：河北省秦皇岛市河北大街西段 438 号
邮政编码：066004
电 话：0335-8387555
印 刷：北京建宏印刷有限公司
经 销：全国新华书店

开 本：700mm×1000mm 1/16 印 张：10.25 字 数：156 千字
版 次：2020 年 10 月第 1 版 印 次：2020 年 10 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-5761-0068-6
定 价：38.00 元

版权所有 侵权必究
如发生印刷、装订质量问题，读者可与出版社联系调换
联系电话：0335-8387718

内容简介

这是一本泛函分析教材，是作者经多年教学实践，吸收国内高等学校使用同类教材教师的很多宝贵意见形成的，它系统地介绍了线性泛函分析的基础知识。全书共分为四章：距离空间、Banach空间、Banach 空间上的有界线性算子以及Hilbert空间。本书的主要特点是它侧重于分析若干基本概念和重要理论的来源和背景，强调培养读者运用泛函方法解决问题的能力，注意介绍泛函分析理论与数学其他分支的联系。书中包含丰富的例子与应用，对于掌握基础理论有很大帮助。

本书可作为高等院校数学专业和理工科专业“泛函分析”课程的教材，也可作为自学用书。

前 言

大家已经学过“数学分析”，而且也学过密切联系于数学分析的“实变函数”“复变函数”等课程，它们涉及的内容大体上成熟于19世纪，至迟到20世纪初，今天被归并于经典分析这一名称之下。经典分析的全部结果基于一个实质上很简单的思想：如果某个量难以被直接了解，那么就将它放在某个变化过程中考虑，然后通过对该过程的考察获得所求量的知识。因此，变量、函数、极限、连续性及由此派生的微分与积分等，构成经典分析的基本概念。

一个形式上类似但层次上更高的问题是：如果某个量（如函数$y = y(x)$）本身难以被直接了解，情况往往如此，那么，能否转而研究一族变动的变量，然后通过施于变量一定运算与极限过程，获得有关原变量的知识？从逻辑上看，这种考虑自然导致对“变量的变量”或“函数的函数”的研究，而这就进入了本书所要介绍的“泛函分析”的领域。

由此可见，在逻辑上，泛函分析原不过是经典分析的自然延伸，而从历史发展来看，泛函分析的胚胎早已孕育于经典分析的躯体中。远在经典分析的初创时期，对变分问题的研究已导致考虑泛函的极值。在数值分析中逐步成熟且广泛使用的逼近方法，愈来愈具有某种一般的特征，以致在一定算子理论框架下的统一处理成为不可避免。类似的趋势更明显地出现于范围广泛的数学物理问题中。到19世纪末，主要由微分方程与积分方程的研究所激发的“函数空间”与“连续变换”概念已经呼之欲出。来自各个领域的问题及解决方法所呈现的惊人类似性，有力地预示着新的综合不可避免。这一综合在20世纪终于由Frechet、Risez及Banach等人提出，泛函分析因此而诞生。

如果说，经典分析只是走过很长一段路程之后，作为其逻辑基础的实数理论才能得以奠定，那么，泛函分析一开始就建立在无限维空间的严格理论基础之上。无疑，这应当归功于19世纪获得重视并趋于成熟的公理化方法，Hilbert的《几何基础》乃是开启公理化时代的典范之作。简单地说，公理化方法将一庞大的理论大厦奠立于少数几个公理构成的基石上，公理的力量则源于人类经验的广泛背景。读者在学习初等几何时已初步体

会过公理化的效果，而泛函分析课程将提供更系统的训练。

读者在学习这门课程之初，大概首先会注意到它与经典分析的类似性，试图循着极限、连续性这样熟悉的线索理解泛函分析的内容。这一想法应当得到适当的鼓励。通过与熟知事物的类比来了解新事物，常常是认知的有效方法。而且，正是函数空间与空间的高度类似，大大激发了泛函分析的早期作者开拓新理论的热情。即使在今天，适当的类比仍然是新思想的源泉。不过，读者在作这种类比时不可走得太远。你很快发现，无限维空间中的分析学具有许多本质上全新的特征，它们远非有限维问题所能比拟。你完全不应为此而烦恼，因唯是如此，你所学到的才真正是一门新的知识，而不是一门老课程的平行重复。

本书是为数学专业本科生或理工科学生初学泛函而写，根据我们的经验，按每周4学时，本书的基本内容可于一学期内讲授完毕。书中的应用与例子较多，教师可选讲其中一部分，其余部分则供有兴趣的读者参考。书中每一章配有一定数量的习题，其中有些是某些定理的证明细节，有些是学过定理证法的模仿，还有一些就是有趣的结论或有用的反例。读者可根据自己的情况选做练习。

编者因学识所限，加之初次尝试，谬误、片面之处一定不少。热诚欢迎读者批评指正。

2020年9月

于秦皇岛

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目 录

第 1 章 距离空间 1

1.1 距离空间的基本概念 1

1.2 距离空间中的点集 11

1.3 距离空间上的连续映射 16

1.4 完备性 距离空间的完备化 19

1.5 不动点定理 25

第 2 章 Banach空间 35

2.1 赋范空间及其完备性 35

2.2 具有基的Banach空间 47

2.3 紧性 50

2.4 有限维赋范线性空间 54

2.5 商空间与积空间 57

2.6 纲定理 60

第 3 章 Banach空间上的有界线性算子 67

3.1 有界线性算子 67

3.2 线性算子空间 74

3.3 共鸣定理及其应用 81

3.4 开映象定理与闭图像定理 87

3.5 Hahn-Banach定理及其推论 94

3.6 对偶空间 共轭算子 103

3.7 自反性 弱收敛 114
3.8 紧算子 124

第 4 章 Hilbert空间 135
4.1 内积空间的基本概念与性质 136
4.2 内积空间的特征 140
4.3 内积空间中的正交和正交系 144

参考文献 153

第 1 章

距离空间

1.1 距离空间的基本概念

极限运算是数学分析中最重要的运算之一，我们来回忆分析中的极限概念：$\{x_n\}$是一个实数列，x是一个实数，如果对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在自然数N，当$n > N$时，$|x_n - x| < \varepsilon$，我们就说当$n \to \infty$时，$\{x_n\}$以x为极限。在上面的定义中，$|x_n - x|$表示直线$\mathbf{R}$上的点x_n与点x之间的“距离”，因此它可以重新叙述为：对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在自然数N，当$n > N$时，x_n与x之间的“距离”小于ε。类似地，平面R^2上的点列$x_n = (\xi_n, \eta_n)$，当$n \to \infty$时以点$x = (\xi, \eta)$为极限可以定义为：对于充分大的自然数n，点x_n与点x的“距离”可以任意小，不过这里点$x_n = (\xi_n, \eta_n)$与点$x = (\xi, \eta)$之间的距离为$\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2}$。

从上面的例子可以看出，无论$\mathbf{R}$中的点还是$\mathbf{R}^2$中的点，甚至任意集合中的点，只要在其中定义了距离，就可以用它来衡量两点的接近程度，就可以在其中定义极限。事实上，在分析中当我们考虑用多项式序列来一致逼近闭区间$[a, b]$上的任一连续函数时，就曾用$\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |p(t) - x(t)|$来表示多项式$p(t)$与函数$x(t)$之间的距离。由此可见，“距离”在极限运算中是至关重要的。我们把“距离”最基本的性质抽象化就得到了距离空间的概念。

1.1.1 定义及例

定义 1.1.1 设X是任一非空集合，对X中任意两点x, y，有一实数$d(x, y)$与之对应且满足：

(i)(非负性)$d(x,y)\geqslant 0$且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(ii)(对称性)$d(x,y)=d(y,x)$;

(iii)(三角不等式)$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$。

称$d(\cdot,\cdot)$为X中的一个距离，定义了距离d的集合X称为距离空间，记为(X,d)。在不引起混淆的情形下，我们将(X,d)简记为X。条件(i)~(iii)称为距离公理，距离空间中的元素称为点。

现在设X为一距离空间，以d为距离，A为X的一非空子集，则A按照距离d也是一个距离空间，称它为X的子空间，如果$A\neq X$，则称它为X的真子空间。

值得注意的是，在任何一个非空集合X上，我们都可以定义距离。

例 1.1.1 离散空间D

设X是任一非空集，在X中定义距离如下：

$$d(x,y)=\begin{cases}0, x=y,\\ 1, x\neq y\end{cases}$$

不难验证d是一个距离，从而(X,d)是一个距离空间，称这个空间为离散空间，用D表示。这种距离是最粗的，它只能区分X中任意两个元素是否相同，而不能区分元素间的接近程度。

下面给出常见距离空间的一些例子，其中有些在分析中起着重要的作用。

例 1.1.2 设X是n元实数组全体，定义

$$d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1-1}$$

其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$。

我们证明(X,d)是一个距离空间。为此我们需要验证d满足距离的三条公理。(i)，(ii)显然成立，关键是证明三角不等式成立。

由Cauchy不等式，得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)\\ \leqslant&\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)]^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\\ =&[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{\frac{1}{2}}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{\frac{1}{2}}]^2\end{aligned}$$

设$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$,$z=(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n)$ 是任意三点，在以上不等式中令$a_k=(\xi_k-\rho_k),b_k=(\rho_k-\eta_k)$，则

$$[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2]^{\frac{1}{2}}\leqslant[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\rho_k)^2]^{\frac{1}{2}}+[\sum_{k=1}^{n}(\rho_k-\eta_k)^2]^{\frac{1}{2}}$$

即$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$。

所以(X,d)是一个距离空间，以后把这个空间简记为$\mathbf{R}^n$；本节开头提到的$\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^2$都是$\mathbf{R}^n$的特殊情形。

在集合$\mathbf{R}^n$中，我们还可以引入如下的距离：

$$d_1(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k| \tag{1-2}$$

d_1也满足距离公理的全部条件，故$\mathbf{R}^n$按照d_1也是一个距离空间。

上述例 1.1.2告诉我们，在一个集合中，定义距离的方式不是唯一的。一般地说，如果在一个非空集合X中定义了距离d与d_1，当$d(x,y)\neq d_1(x,y)$时，那么X按照d与d_1 所成的两个距离空间必须看成不同的。因此，$\mathbf{R}^n$按照d及d_1是两个不同的距离空间。

类似于例 1.1.2中的$\mathbf{R}^n$，我们还可以考虑复数的情形。假设$\mathbf{C}^n$是由所有n维复向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$组成的集合，这里$\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$都是复数。对$\mathbf{C}^n$中的任意两个向量$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$及$\boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，我们仍用式(1-1)定义它们之间的距离，即

$$d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

与实数情形一样，由复数情形的Cauchy不等式：

$$(\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|)^2\leqslant(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2)(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2)$$

其中$a_k, b_k (k = 1, 2, \cdots, n)$均为复数，得

$$[\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant [\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2]^{\frac{1}{2}} + [\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2]^{\frac{1}{2}}$$

于是又可得到三角不等式 $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$。

这里x, y, z均属于$\mathbf{C}^n$。因此按照式(1-1)定义的距离d，$\mathbf{C}^n$是距离空间。

当$n = 1$时，$\mathbf{R}^1, \mathbf{C}^1$分别记为$\mathbf{R}, \mathbf{C}$。

今后凡不特殊声明时，均取式(1-1)分别作为$\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$中的距离。

例 1.1.3 考虑区间$[a, b]$上所有连续函数构成的集合

设$x(t), y(t)$是$[a, b]$上任意两个连续函数，定义

$$d(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \tag{1-3}$$

由于$x(t) - y(t)$也是$[a, b]$上的连续函数，因此有最大值。距离公理(i)、(ii)显然成立。设$x(t), y(t), z(t)$是$[a, b]$上任意三个连续函数，则$\forall t \in [a, b]$,

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |z(t) - y(t)| = d(x, z) + d(z, y)$$

所以

$$d(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \leqslant d(x, z) + d(z, y)$$

$[a, b]$上的连续函数全体赋予上述距离d是一个距离空间，记为$C[a, b]$。

例 1.1.4 $L^p[a, b] (1 \leqslant p < \infty)$

考虑区间$[a, b]$上p次幂Lebesgue可积函数类全体，两个几乎处处相等的p次幂可积函数在$L^p[[a, b]$中视为同一元素。现在指出，如果对$L^p[a, b]$中任意两个元素x, y，令

$$d(x, y) = (\int_a^b |x(y) - y(t)|^p \mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}} \tag{1-4}$$

则d满足距离公理的全部条件。因此 $L^p[a, b]$按照距离d是一个距离空间。d满足距离公理中的条件(i)、(ii)是明显的，故只需验证三角不等式。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

任取$x,y,z\in L^p[a,b]$，由Minkowski不等式，便有

$$(\int_a^b|x(y)-y(t)|^p\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}\leqslant(\int_a^b|x(y)-z(t)|^p\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}+(\int_a^b|z(y)-y(t)|^p\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}$$

即

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

因此三角不等式成立。故$L^p[a,b]$按照d确实是一个距离空间。

例 1.1.5 空间$L^\infty[a,b]$

称定义在可测集$[a,b]$上的可测函数$x(\cdot)$是本性有界的，是指存在着$[a,b]$的某个零测度子集E_0，使得 $x(\cdot)$在集合$[a,b]\backslash E_0$上有界。$[a,b]$上所有本性有界可测函数构成的集用$L^\infty[a,b]$表示，几乎处处相等的两个本性有界的可测函数看作同一元素。对$L^\infty[a,b]$中任意两个元素x,y，令

$$d(x,y)=\inf_{mE_0=0,E_0\subset[a,b]}\{\sup_{t\in[a,b]\backslash E_0}|x(t)-y(t)|\}\tag{1-5}$$

需要验证d满足距离公理的条件。我们只验证三角不等式。设$x,y,z\in L^\infty[a,b]$，任给$\varepsilon>0$，存在$E_0,E_1\subset[a,b],mE_0=mE_1=0$，使

$$\sup_{t\in[a,b]\backslash E_0}|x(t)-z(t)|\leqslant d(x,z)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sup_{t\in[a,b]\backslash E_1}|x(t)-y(t)|\leqslant d(x,y)+\frac{\varepsilon}{2}$$

注意到$m(E_0\bigcup E_1)=0$，于是

$$\begin{aligned}d(x,y)&\leqslant\sup_{t\in[a,b]\backslash(E_0\bigcup E_1)}|x(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in[a,b]\backslash(E_0\bigcup E_1)}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in[a,b]\backslash(E_0\bigcup E_1)}|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in[a,b]\backslash E_0}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in[a,b]\backslash E_1}|z(t)-y(t)|\leqslant d(x,z)+d(z,y)+\varepsilon\end{aligned}$$

令$\varepsilon\to0$，得

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

三角不等式成立。因此按照式(1-5)定义的距离d，$L^\infty[a,b]$确为距离空间。

例 1.1.6 空间$l^p(1\leqslant p<\infty)$

令l^p是由满足下列条件的实（或复）数序列$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$构成的集合：

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<\infty$$

若对l^p中任意两个元素x,y，令

$$d(x,y)=[\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p]^{\frac{1}{p}} \tag{1-6}$$

其中$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$，则$l^p$按照距离$d$是一个距离空间。事实上，$d$满足距离公理中的条件(i)、(ii)是明显的，故只需验证三角不等式。任取 $x,y,z\in l^p$，由离散形式的Minkowski不等式

$$(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

可知

$$\begin{aligned}&(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p)^{\frac{1}{p}}=(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\rho_n+\rho_n-\eta_n|^p)^{\frac{1}{p}}\\ \leqslant&(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\rho_n|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{n=1}^{\infty}|\rho_n-\eta_n|^p)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

即

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

三角不等式成立。因此l^p按照式(1-6)定义的距离d确为距离空间。

例 1.1.7 空间l^∞

令l^∞是由一切有界的实（或复）数列构成的集合。任取l^∞中的两个元素$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$，令

$$d(x,y)=\sup_{1\leqslant n<\infty}|\xi_n-\eta_n| \tag{1-7}$$

不难证明式(1-7)中的d满足距离公理的全部条件，因此l^∞按照式(1-7)定义的距离d是一个距离空间。

例 1.1.8 空间s

考虑实数列$\{\xi_n\}$的全体。设$x=\{\xi_n\},y=\{\eta_n\}$是两个实数列，令

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|} \tag{1-8}$$

上式右边的$\frac{1}{2^n}$是一收敛因子，保证级数收敛，距离公理的(i)、(ii)显然成立，为证三角不等式，考虑$(0,\infty)$上的函数$\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$，易见$\varphi'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$，所以 $\varphi(t)$是单增的，由此，设$x=\{\xi_n\},y=\{\eta_n\},z=\{\rho_n\}$，由于

$$|\xi_n-\eta_n|\leqslant|\xi_n-\rho_n|+|\rho_n-\eta_n|$$

则有

$$\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}\leqslant\frac{|\xi_n-\rho_n|+|\rho_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\rho_n|+|\rho_n-\eta_n|}$$

$$=\frac{|\xi_n-\rho_n|}{1+|\xi_n-\rho_n|+|\rho_n-\eta_n|}+\frac{|\rho_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\rho_n|+|\rho_n-\eta_n|}$$

$$\leqslant\frac{|\xi_n-\rho_n|}{1+|\xi_n-\rho_n|}+\frac{|\rho_n-\eta_n|}{1+|\rho_n-\eta_n|}$$

在上不等式两边同乘$\frac{1}{2^n}$并求和，则得

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\rho_n|}{1+|\xi_n-\rho_n|}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\rho_n-\eta_n|}{1+|\rho_n-\eta_n|}=d(x,z)+d(z,y)$$

则三角不等式成立。因此s按照式(1-8)定义的距离构成距离空间。

例 1.1.9 空间S

设$E\subset R$是一个Lebesgue可测集，$0<m(E)<\infty$，考虑E上几乎处处有穷的可测函数全体，其中凡几乎处处相等的函数看成同一元，令

$$d(x,y)=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}t \tag{1-9}$$

与例 1.1.8的证明类似，S按照式(1-9)定义的距离构成距离空间。

注 通过以上几个例子我们看到，为了验证一个赋予函数d的非空集是一个距离空间，只需验证满足距离的三条公理，通常比较困难的是证明三角不等式。一个距离空间可以是任意一个非空集，只要其中定义满足距离三条公理的函数d即可，即在一个非空集上，我们可以随意地定义距离（如例 1.1.1，离散空间D）。特别地，距离不是唯一的，即使同一集

也可以引进不同的距离，从而得到不同的距离空间（如例 1.1.2），又如在$C[a,b]$中，如果定义

$$d_1(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t \tag{1-10}$$

不难验证d_1是一个距离，于是我们得到一个新的距离空间。我们认为这个空间与例 1.1.2中的空间是两个不同的距离空间。实际上，距离的定义是任意的，但是在每一个具体场合下，选择这样或那样的距离总是依据所研究的极限过程的需要引进的，关于这 一点下面我们还要继续讨论。

1.1.2 距离空间中的收敛概念

定义 1.1.2 设$\{x_n\}$为距离空间X中的一个点列（或称序列）$(n=1,2,\cdots)$，如果存在X中的点x_0使得当$n\to\infty$ 时，$d(x_n,x_0)\to 0$，就称点列$\{x_n\}$收敛于x_0，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0 \quad \{x_n\}\to x_0$$

有时简记为$x_n\to x_0$，称x_0为$\{x_n\}$的极限。

下面我们证明有关极限的几个简单性质。

定理 1.1.1 距离空间X中的点列$\{x_n\}$最多只能收敛于一个点，因此收敛点列的极限是唯一的。

证 设$\{x_n\}$收敛于两个点x_0,y_0，则对于任给的$\varepsilon>0,\exists N$，使得当$n>N$时，

$$d(x_n,x_0)<\varepsilon,d(x_n,y_0)<\varepsilon$$

由三角不等式可得

$$d(x_0,y_0)\leqslant d(x_0,x_n)+d(x_n,y_0)<2\varepsilon \quad (n>N)$$

由ε的任意性，知$d(x_0,y_0)=0$，故$x_0=y_0$。因此收敛点列的极限是唯一的。证毕。

定理 1.1.2 设距离空间X中的点列$\{x_n\}$收敛于x_0，则$\{x_n\}$的任一子列(或称子点列、子序列)$\{x_{n_k}\}$也收敛于x_0。

证 设$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的任一子列，因$\{x_n\}$收敛于x_0，则对于任意$\varepsilon>0,\exists N$，使得当$k>N$时，$d(x_k,x_0)<\varepsilon$，由于$n_k>k$，故当$k>N$时，更

有$n_k > N$， 故$d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$，这表明$\{x_{n_k}\}$也收敛于$x_0$。证毕。

定理 1.1.3 设距离空间X中的点列$\{x_n\}$收敛于x_0，则对于X中的任一点y_0，数列$\{d(x_n, y_0)\}$有界。

证 $\{d(x_n, x_0)\}$作为收敛数列是有界的，故存在$M > 0$，使得$d(x_n, x_0) \leqslant M$ 对一切n成立。于是

$$d(x_n, y_0) \leqslant d(x_n, x_0) + d(x_0, y_0) \leqslant M + d(x_0, y_0)$$

证毕。

下面我们看一看前面列举的几个具体的距离空间中收敛性的含义。

在空间$\mathbf{R}^n$中，易见点列的收敛就是按坐标收敛。

在离散空间D中，$\{x_n\}$收敛于x_0，当且仅当，从某一下标开始$\{x_n\}$为常驻列。

事实上，如果$x_n \to x_0 (n \to \infty)$，取$\varepsilon = \frac{1}{2}$，则存在$N$，当$n > N$时，$d(x_n, x_0) < \frac{1}{2}$，由此当$n \geqslant N$时，$x_n = x_0$，反之显然。

空间S中的收敛等价于函数列依测度收敛。

设$x_n \to x_0 (n \to \infty)$，则对于任意的$\sigma > 0$，由于

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) &= \int_E \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} \mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_{\{t \in E : |x_n(t) - x_0(t)| \geqslant \sigma\}} \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} \mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{\sigma}{1+\sigma} m\{t \in E : |x_n(t) - x_0(t)| \geqslant \sigma\} \end{aligned}$$

所以，当$n \to \infty$时，$m\{t \in E : |x_n(t) - x_0(t)| \geqslant \sigma\} \to 0$，即$\{x_n\}$在$E$上依测度收敛于$x_0(t)$。

反之，设$\{x_n(t)\}$在上依测度收敛于$x_0(t)$，则对$\forall \varepsilon > 0$及$\forall \sigma > 0$，由于

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) &= \int_E \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\sigma}{1+\sigma} mE + \int_{\{t \in E : |x_n(t) - x_0(t)| \geqslant \sigma\}} \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\sigma}{1+\sigma} mE + m\{t \in E : |x_n(t) - x_0(t)| \geqslant \sigma\} \end{aligned}$$

先选取σ，使$\frac{\sigma}{1+\sigma} mE < \frac{\varepsilon}{2}$，再对上述$\sigma$选取自然数$N$，使得当$n > N$时，$m\{t \in E : |x_n(t) - x_0(t)| \geqslant \sigma\} < \frac{\varepsilon}{2}$，于是当$n > N$时，

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即$d(x_n, x_0) \to 0 (n \to \infty)$。

对于$C[a,b]$(距离由等式(1-3)定义)来说，其中的点列$\{x_n\}$收敛于点x_0的充分必要条件是：作为函数列$\{x_n(t)\}$ 在$[a,b]$上一致收敛于函数$x_0(t)$。

事实上，设$\{x_n\}$按照距离公式(1-3)收敛于x_0，则当$n \to \infty$时，

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$$

于是对$\forall \varepsilon > 0, \exists N$,当$n > N$时，$\forall t \in [a,b]$，有

$$|x_n(t) - x_0(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$$

即函数列$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于函数$x_0(t)$。反之，如果$\{x_n(t)\}$一致收敛于$x_0(t)$，则$d(x_n, x_0) \to 0 \ \ (n \to \infty)$。

在$C[a,b]$中还可以定义距离(1-10)，但相应的收敛概念就不与一致收敛等价。首先，容易看出，$C[a,b]$ 按照式(1-10)定义的距离d_1构成距离空间而且是$L^2[a,b]$的子空间， 在$C[a,b]$中取函数列

$$x_n(t) = \frac{1}{(b-a)^n}(t-a)^n \ \ (t \in [a,b], n = 1, 2, \cdots,)$$

由Lebesgue控制收敛定理，$\{x_n\}$按照距离d_1收敛于$C[a,b]$中的零元素，但作为函数列， $\{x_n(t)\}$显然不一致收敛。因此，在$C[a,b]$中，按照距离d_1导出的收敛概念不等价于一致收敛。

迄今为止，我们已引进了距离及距离空间，在此基础上又引进了收敛概念，并讨论了一些有关的性质，概括起来，我们应当注意以下几点：

1. 对于任何一个非空集合，我们都可以定义距离，但是一般来说，我们应当根据该集合的特点适当地引进距离以充分反映这些特点。例如，对$C[a,b]$，我们常说用等式(1-3)定义距离；对于$L^p[a,b]$，我们常常用等式(1-5)定义距离，等等。只有这样，在理论上和实际上才有较大的意义。

2. 定义距离的方式一般来说不是唯一的。

3. 如果一个非空集合中定义了两个或两个以上的距离，那么由它们导出的收敛概念可以一致也可以不一致。

需要全本请访问 www.ertongbook.com