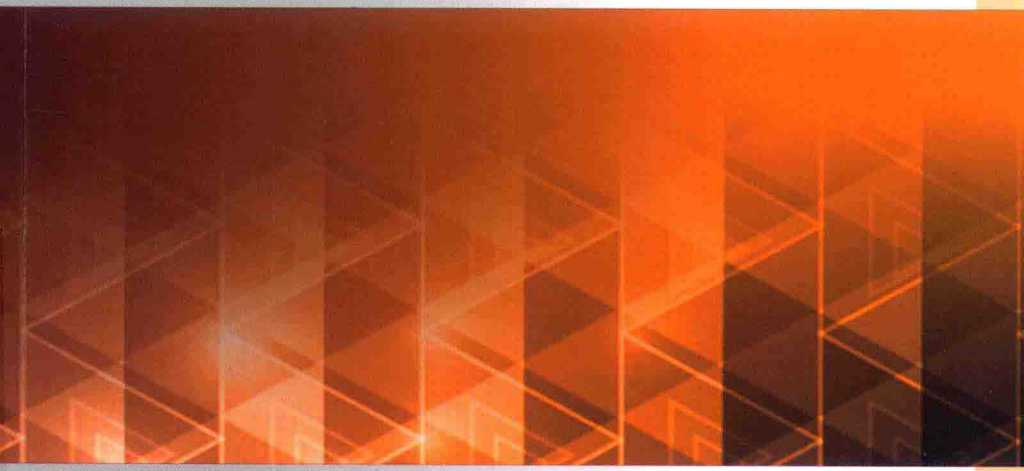
新编理论力学教程习题解答

陈赋迪 主编



西南交通大学出版社

新编 理论力学教程习题解答

陈赋迪 ○ 主 编

西南交通大学出版社
·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

新编理论力学教程：含习题集. 2，新编理论力学教程习题解答 / 陈赋迪主编. —成都：西南交通大学出版社，2020.11

ISBN 978-7-5643-7713-7

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①理论力学 – 高等学校 – 教材 Ⅳ. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 213344 号

前　言

（一）本书收录了280余道习题予以解答，收录的习题涵盖了理论力学这门学科的主要内容。

（二）本书解答习题所依据的理论力学的理论全部出自《新编理论力学教程》一书(编写人：陈赋迪。西南交通大学出版社，2020年)。我们约定：在本书中凡提到“教程”，若不特别指明，这是指由陈赋迪编写的《新编理论力学教程》。同时，本书中引用的章节序号(如“§5-1”)、图序号(如“图14-6”)、公式序号[如“式(2-12)”或“(2-12)”]、例题序号(如“例14-6”)，一律指教程中的章节序号、图序号、公式序号及例题序号。例如“§5-1”，这是指教程的§5-1。

（三）在本书中，一个物理量的单位如果没有指明，那么该物理量的单位应理解为国际单位制规定的单位，即长度单位为米(m)，质量单位为千克(kg)，时间单位为秒(s)，角度单位为弧度(rad)，力的单位为牛(N)，等等(参见§1-5)。例如，在本书中若提到某力$\boldsymbol{F}$的大小为20，某力偶$\boldsymbol{M}$的大小为50，某质点的加速度$\boldsymbol{a}$的大小为10，某刚体转动的角速度ω的大小为10.5，这是指$|\boldsymbol{F}| = 20$ N，$|\boldsymbol{M}| = 50$ N•m，$|\boldsymbol{a}| = 10$ m/s^2，$\omega = 10.5$ rad/s。另外，在本书中力的单位有时用kN表示(kN：千牛，1 kN = 10^3 N)，而在不致引起误解的场合，角度大小均以六十分制的方式(即30°、15°25′等)表示。

（四）在本书中，沿直角坐标系$Oxyz$的Ox、Oy、Oz轴的单位矢量一律以字符$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别表示(O为$Oxyz$的坐标原点，坐标原点也可以是其他点，如A点、B点)，相应地，沿直角坐标系$Ox'y'z'$的Ox'、Oy'、Oz'轴的单位矢量一律以$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$分别表示(坐标原点也

可以是其他点)。此外,本书使用的坐标系一律是右手坐标系(关于右手坐标系见教程13页的脚注)。

(五)在本书中,加粗的斜体字符"$\boldsymbol{g}$"一律表示重力加速度,未加粗的斜体字符"g"一律表示$\boldsymbol{g}$的大小(即$g=|\boldsymbol{g}|$),并且g为常量。此外,在本书中需要用到g的数值的场合,一律取$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$。

(六)在本书中,未加粗的斜体字符"t"一律表示时间。本书有时也采用变量对时间的导数的简略记法,例如"$\dot{\boldsymbol{A}}$"表示$\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$,"$\ddot{\boldsymbol{A}}$"表示$\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t^2$(变量$\boldsymbol{A}$可以是矢量,也可以是标量,参见教程533页)。另外,在本书中将一个矢量对时间求导数时,如果没有指明所在的坐标系,这个坐标系是指固定坐标系或惯性参考系(参见教程89页第1个脚注,以及§6-1)。

(七)在本书中,力系的记法与教程中力系的记法相同(关于力系的记法见教程第15页,参见该页第2个脚注),在本书的图示中力偶的表示法与教程中的也相同。

(八)在本书中,若不特别说明,细绳和弹簧的质量一律不予考虑(参见教程385页第4个脚注),并且细绳一律是不可伸长且绝对柔软的(即细绳一律视为柔索,关于柔索见§13-2)。

(九)本书中提到的各种约束(如球形铰支座、立体铰支座,辊轴支座、固定端支座等),若不特别说明,一律指§13-2中的约束。另外,本书中所说的"铰链"一律指立体铰支座,也就是说,对于由铰链连接的两个物体,两物体的相对运动为定轴转动。

(十)在本书中凡遇拉格朗日情形的重刚体做规则进动的场合(这时刚体的质心与刚体绕之运动的固定点不重合,参见教程358页的脚注),若不特别说明,刚体的进动角速度一律指慢进动角速度(关于慢进动角速度和快进动角速度见本书263页)。

(十一)在本书习题的解答过程中有时要用到一些读者不一定熟悉的数学公式,这些公式一律出自教程参考文献[7]。此外,本

书习题的解答还要用到三角函数的一些关系式，为便于运用，在此罗列如下[在式(1)至式(6)中，α和β为任意角度]：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\,,\qquad \sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \tag{1}$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \tag{2}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \tag{3}$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \tag{4}$$

$$\sin\alpha=\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\,,\qquad \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} \tag{5}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\,,\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\,,\quad \tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{6}$$

（十二）在本书习题的解答过程中有时会遇到一类由下式表示的微分方程的求解：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y=0$$

其中k为常量。这类方程的通解为(见教程参考文献[7]，第250页)

$$y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$$

其中C_1、C_2为待定系数(常量)。现将上式改写成

$$y=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos kx+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin kx\right)$$

并设$\sqrt{C_1^2+C_2^2}=U$，$\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\sin\gamma$，$\dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\cos\gamma$，则考虑到本页式(2)可将通解写成

$$y=U\sin(kx+\gamma)$$

其中U和γ仍为常量。

陈贼迪

2020年5月于贵阳

目 录

第一部分 运动学…… 1

第 1 单元 单一质点的运动学…… 2
第 2 单元 单一刚体的运动学(二维问题)……19
第 3 单元 单一刚体的运动学(三维问题)……35
第 4 单元 物体系的运动学(二维问题)……42
第 5 单元 物体系的运动学(三维问题)……95

第二部分 力系理论…… 110

第 6 单元 力矩 力系的简化…… 111
第 7 单元 力系的功…… 128

第三部分 质量几何学 动量矩和动能 …… 137

第 8 单元 质量几何学…… 138
第 9 单元 动量矩和动能…… 161

第四部分 动力学…… 166

第 10 单元 单一质点的动力学 …… 167
第 11 单元 单一刚体的动力学(二维问题) …… 175
第 12 单元 单一刚体的动力学(三维问题) …… 215
第 13 单元 物体系的动力学(二维问题) …… 285
第 14 单元 物体系的动力学(三维问题) …… 329
第 15 单元 碰 撞 …… 357
第 16 单元 平动变质量物体动力学 …… 390

第 17 单元 质点的相对运动动力学 …… 411
第 18 单元 刚体的相对运动动力学 …… 425

第五部分 静力学 …… 448

第 19 单元 静力学(二维问题) …… 449
第 20 单元 静力学(三维问题) …… 488

第六部分 分析力学初步 …… 498

第 21 单元 拉格朗日方程 …… 499
第 22 单元 虚位移原理 …… 524

第一部分

运 动 学

在本部分的习题中，二维问题是指平面问题，即求解对象中所有的动点(包括刚体和细绳内的点)至参考系中某固定平面Ω的距离始终保持不变。三维问题即为非平面问题(刚体的定点运动和一般运动都属于三维问题)。在二维问题中，动点的速度和加速度的方向都总是平行于固定平面Ω，而刚体转动的角速度矢量和角加速度矢量的方向都总是垂直于Ω。另外，本部分习题中的物体系是指由质点、刚体、细绳、弹簧以及各种约束或由它们当中的一部分组成的系统，在物体系的运动学中(包括二维问题和三维问题)，求解对象至少包含两个物体，这些物体可以都是刚体或都是质点，也可以其中一些是刚体，其余的是物体系中的其他物体。

关于点的弧坐标式运动方程可参阅教程例2-1末的说明。

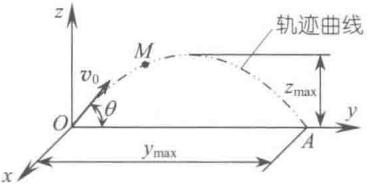
关于速度瞬心和加速度瞬心的确定方法见教程153～154页，关于定瞬心曲线和动瞬心曲线及其确定方法见教程174页(参见教程173页的脚注)。

求取定点运动刚体的角速度和角加速度时可参阅教程128页第2个脚注。关于定点运动刚体的自转轴、进动轴以及章动轴、章动角的认定可参阅§6-7准则1及教程129页第1个脚注。关于求解定点运动刚体和自由刚体的问题时所需要专门建立的坐标系见教程128页第1个脚注。

第1单元　单一质点的运动学

题1-1　如图，已知质点M以初速度v_0从O点被抛出后保持在坐标系$Oxyz$的Oyz平面内运动，M的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} y &= v_0\cos\theta\cdot t \\ z &= v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$



题1-1图

(其中$v_0=|\boldsymbol{v}_0|$)，试写出M的轨迹方程，并求出y_{max}和z_{max}，以及M从O处运动至A处所需要的时间(在题1-1图中A点位于Oy轴上，θ和y_{max}、z_{max}的意义如图所示)。

解：由式(a)中的两式消去时间t即得轨迹方程为

$$z=y\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}y^2 \qquad \text{(b)}$$

式(b)表明质点M的轨迹曲线为抛物线(题1-1图)。

根据式(b)，令$z=0$，可得

$$y_1=0\,,\qquad y_2=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

其中y_2即为y_{max}。

按照高等数学求函数极值的方法，先由式(b)求出

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\tan\theta-\frac{gy}{v_0^2\cos^2\theta}$$

再于上式中令$\mathrm{d}z/\mathrm{d}y=0$并解出$y$，将其代入式(b)即得$z_{max}$为

$$z_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

此外，由于z_{max}即为质点M的速度沿Oz轴的分量$v_z=0$时的z坐标(见

题1-1图), 因此也可根据式(2-12)并由式(a)的第二式求出

$$v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v_0\sin\theta-gt$$

再于上式中令$v_z=0$解出t, 将其代入式(a)的第二式即得到$z_{\max}$。

在式(a)的第一式中令$y=y_{\max}=y_2$可求出

$$T=t\big|_{y=y_2}=\frac{y_2}{v_0\cos\theta}=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta/g}{v_0\cos\theta}$$

$$=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

其中T即为质点M从O处运动至A处所需要的时间。此外, 在式(a)的第二式中令$z=0$并对t求解也可得到T。

题1-2　已知质点在坐标系$Oxyz$中的运动规律为

$$x=1.5\times10^3t^4,\qquad y=0.7x,\qquad z=\sqrt{x^2+0.002\,5}\tag{a}$$

试求：在$x=0.15$处, 质点于$Oxyz$中的速度$\boldsymbol{v}$和加速度$\boldsymbol{a}$分别沿$Oxyz$的坐标轴的各分量v_x、v_y、v_z和a_x、a_y、a_z。

解：将式(a)的第一式分别代入式(a)的后两式可将质点在$Oxyz$中的三个坐标分别写成

$$\left.\begin{aligned}&x=1.5\times10^3t^4,\qquad y=0.7\times1.5\times10^3t^4\\&z=\sqrt{(1.5\times10^3t^4)^2+0.002\,5}=\sqrt{1.5^2\times10^6t^8+0.002\,5}\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

由$x=1.5\times10^3t^4=0.15$可求出$t=0.1$, 因此由式(2-12)并由式(b)即得

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0.1}=4\times1.5\times10^3t^3\big|_{t=0.1}=6\\v_y&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0.1}=4\times0.7\times1.5\times10^3t^3\big|_{t=0.1}=4.2\\v_z&=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0.1}=\frac{8\times1.5^2\times10^6t^7}{2\sqrt{1.5^2\times10^6t^8+0.002\,5}}\bigg|_{t=0.1}=5.692\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

再由式(2-16)并由式(c)以及$t=0.1$即得

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0.1}=3\times4\times1.5\times10^3t^2\big|_{t=0.1}=180$$

$$a_y=\left.\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0.1}=\left.3\times4\times0.7\times1.5\times10^3t^2\right|_{t=0.1}=126$$

$$a_z=\left.\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0.1}$$

$$=\left.\left[\frac{7\times4\times1.5^2\times10^6t^6}{\sqrt{1.5^2\times10^6t^8+0.0025}}-\frac{(4\times1.5^2\times10^6t^7)^2}{\sqrt{(1.5^2\times10^6\times t^8+0.0025)^3}}\right]\right|_{t=0.1}$$

$$=193.5$$

题1-3　设质点在坐标系$Oxyz$中的运动方程为$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=$常量, 试证明：质点的切向加速度大小a_τ、法向加速度大小a_n及质点运动轨迹的曲率半径ρ可分别写成

$$a_\tau=\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\qquad a_n=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\qquad \rho=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}\tag{a}$$

其中$\dot{x}=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\ddot{x}=\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$, $\dot{y}=\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, $\ddot{y}=\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2$。

证：显然, 质点的轨迹为Oxy平面内的平面曲线。设质点的加速度为$\boldsymbol{a}$, 根据式(2-13)和(2-21)并由教程附录A的式(A-4)可得

$$|\boldsymbol{a}|^2=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2=\left(\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2\tag{b}$$

式中v为质点的速度大小。而根据式(2-17)可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

并由上式可求出

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\tag{c}$$

于是根据式(2-22)的第一式可知式(c)即为式(a)的第一式。又根据式(2-10), 有$v^2=|\boldsymbol{v}|^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$, 因此将$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$及式(c)代入式(b)便得到式(a)的第三式, 再由$a_n=v^2/\rho$即得到式(a)的第二式。

题1-4　已知质点的运动方程为$x=50t$, $y=500-5t^2$, $z=$常量, 试求$t=0$时质点的切向加速度大小a_τ、法向加速度大小a_n以及质点

运动轨迹的曲率半径ρ。

解：根据已知条件可求出

$$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=50\,,\quad \ddot{x}=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}=0\,,\quad \dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-10t\,,\quad \ddot{y}=\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}=-10$$

因此将以上四式代入题1-3的式(a)便得到

$$a_\tau=\left.\frac{0+100t}{\sqrt{250\,0+100t^2}}\right|_{t=0}=\left.\frac{10t}{\sqrt{25+t^2}}\right|_{t=0}=0$$

$$a_n=\left.\frac{|-50\times10-0|}{\sqrt{250\,0+100t^2}}\right|_{t=0}=\left.\frac{50}{\sqrt{25+t^2}}\right|_{t=0}=10$$

$$\rho=\left.\frac{(250\,0+100t^2)^{3/2}}{|-50\times10-0|}\right|_{t=0}=2\times(25+t^2)^{3/2}\big|_{t=0}=250$$

题1-5　已知质点的直角坐标式运动方程可表示成如下的4种情形(4种情形中的b、r、ω、c均为常量)：

(1) $x=3t^2+5$，　$y=4t^2+3$

(2) $x=b+r\cos\omega t$，　$y=r\sin\omega t$

(3) $x=\mathrm{e}^t\cos t$，　$y=\mathrm{e}^t\sin t$，　$z=\mathrm{e}^t$

(4) $x=b\cos t$，　$y=b\sin t$，　$z=ct$

试对每种情形分别写出质点的弧坐标式运动方程(设质点位于它的运动初始位置时，质点的弧坐标$s=0$)。

解：考虑到式(2-17)，对于第1种情形，有

$$\mathrm{d}x=6t\mathrm{d}t\,,\quad \mathrm{d}y=8t\mathrm{d}t\,,\quad \mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=10t\mathrm{d}t$$

根据题设条件，有$s|_{t=0}=0$，于是质点的弧坐标式运动方程为

$$s=\int_0^s\mathrm{d}s=10\int_0^t t\mathrm{d}t=5t^2$$

仿照第1种情形的解法，对于第2种情形，有

$$\mathrm{d}x=-r\omega\sin\omega t\cdot\mathrm{d}t\,,\quad \mathrm{d}y=r\omega\cos\omega t\cdot\mathrm{d}t\,,\quad \mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=r\omega\mathrm{d}t$$

$$s=\int_0^s\mathrm{d}s=r\omega\int_0^t\mathrm{d}t=r\omega t$$

对于第3种情形，有

$$dx=(e^t\cos t-e^t\sin t)dt\,,\quad dy=(e^t\sin t+e^t\cos t)dt\,,\quad dz=e^t dt$$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{3}e^t dt$$

$$s=\int_0^s ds=\sqrt{3}\int_0^t e^t dt=\sqrt{3}(e^t-1)$$

对于第4种情形，有

$$dx=-b\sin t\cdot dt\,,\quad dy=b\cos t\cdot dt\,,\quad dz=c dt$$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{b^2+c^2}\,dt$$

$$s=\int_0^s ds=\sqrt{b^2+c^2}\int_0^t dt=\sqrt{b^2+c^2}\,t$$

题1-6　已知质点沿半径$R=1\,000$ m的圆弧运动，它的切向加速度大小a_τ为常量。设质点于时刻t_0的速度大小$v_0=54$ km/h(千米/小时)，经过800 m的路程后于时刻t_1的速度大小$v_1=18$ km/h，试求a_τ和$\Delta t=t_1-t_0$，以及质点分别于时刻t_0和t_1的加速度大小a_0和a_1。

解：先将v_0和v_1换算成国际单位制(参见§1-5)：

$$v_0=\frac{54\times1\,000(\text{m})}{1\times3\,600(\text{s})}=15\ (\text{m/s})\,,\quad v_1=\frac{18\times1\,000(\text{m})}{1\times3\,600(\text{s})}=5\ (\text{m/s})$$

再根据教程例2-2式(a)的第三式，令$v=v_1$，$s-s_0=800$便可求出

$$a_\tau=\frac{v_1^2-v_0^2}{2(s-s_0)}=\frac{5^2-15^2}{2\times800}=-0.125\ (\text{m/s}^2)$$

又根据例2-2式(a)的第一式，有

$$v_0=v_0+a_\tau t_0\,,\qquad v_1=v_0+a_\tau t_1$$

由此可求出

$$t_0=0\,,\quad \Delta t=t_1=\frac{v_1-v_0}{a_\tau}=\frac{5-15}{-0.125}=80\ (\text{s})$$

而a_0和a_1可根据式(2-23)以及(2-22)的第二式求出，分别为

$$a_0=\sqrt{a_\tau^2+\left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}=\sqrt{(-0.125)^2+\left(\frac{15^2}{1000}\right)^2}=0.257\ (\text{m/s}^2)$$

$$a_1=\sqrt{a_\tau^2+(\frac{v_1^2}{R})^2}=\sqrt{(-0.125)^2+(\frac{5^2}{1000})^2}=0.127\ (\mathrm{m/s^2})$$

题1-7　已知质点以大小不变的切向加速度a_τ沿半径为R的圆弧运动，$a_\tau=10\ \mathrm{m/s^2}$，$R=1\,500\ \mathrm{m}$。设质点经过某位置点$A$时的速度大小$v_A=900\ \mathrm{km/h}$，试求质点在经过$A$点后第2秒末的速度大小和加速度大小，以及质点在这2秒内走过的路程。

解：仿照题1-6将$v_A=900\ \mathrm{km/h}$换算成$v_A=250\ \mathrm{m/s}$。根据教程例2-2式(a)的第一式，质点经过A点后第2秒末的速度大小为

$$v=v_A+a_\tau t=250+10\times2=270\ (\mathrm{m/s})$$

于是根据式(2-23)，质点在第2秒末的加速度大小为

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{a_\tau^2+(\frac{v^2}{R})^2}=\sqrt{10^2+(\frac{270^2}{1500})^2}$$

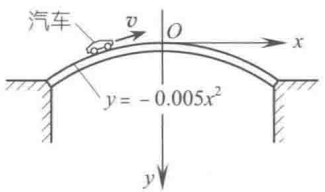
$$=49.62\ (\mathrm{m/s^2})$$

而根据例2-2式(a)的第三式，质点在这2秒内走过的路程为

$$s-s_0=\frac{v^2-v_A^2}{2a_\tau}=\frac{270^2-250^2}{2\times10}=520\ (\mathrm{m})$$

显然，$s-s_0$也可根据例2-2式(a)的第二式求出。

题1-8　如图，拱桥的形状可由抛物线$y=-0.005x^2$表示，一汽车以大小不变的速度$v=72\ \mathrm{km/h}$驶过该桥，试求汽车在桥顶时的加速度大小(设汽车可视为质点)。



题1-8图

解：仿照题1-6将$v=72\ \mathrm{km/h}$换算成$v=20\ \mathrm{m/s}$。由于汽车的速度v为常量，因此汽车的切向加速度$\boldsymbol{a}_\tau=\boldsymbol{0}$，于是汽车的法向加速度$\boldsymbol{a}_n$即为它的加速度$\boldsymbol{a}$。

显然，在桥顶处，有$x=0$，因此由$y=-0.005x^2$可求出

$$y'|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-0.01x|_{x=0}=0,\quad y''|_{x=0}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-0.01$$

再由高等数学可得到拱桥在桥顶处的曲率半径为

$$\rho|_{x=0}=\left.\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}\right|_{x=0}=\left.\frac{(1+0)^{3/2}}{|-0.01|}\right|_{x=0}=100$$

于是根据式(2-22), 汽车在桥顶时的加速度大小为

$$a=a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{20^2}{100}=4\,(\mathrm{m/s^2})$$

题1-9 一质点沿半径为R的圆周运动, 其运动方程为

$$s=v_0t-\frac{1}{2}ct^2 \tag{a}$$

其中v_0为质点的初速度大小, c为常量。试求: (1) 质点的加速度大小a。(2) 当$a=c$时的t值, 以及此时质点沿圆周走过的圈数n。

解: 根据§2-4, 由式(a)可求出质点于任一时刻t的速度大小v、切向加速度大小a_τ和法向加速度大小a_n, 分别为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-ct\,,\quad a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=c\,,\quad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-ct)^2}{R}$$

由此可得质点的加速度大小为

$$a=\sqrt{a_\tau^{\,2}+a_n^{\,2}}=\sqrt{c^2+\frac{(v_0-ct)^4}{R^2}}$$

而在上式中令$a=c$可得到$a=c$时的t值为

$$t=\frac{v_0}{c}$$

又根据式(a), 令$t=v_0/c$可得到$a=c$时质点沿圆周走过的路程为

$$s=v_0\frac{v_0}{c}-\frac{1}{2}c\left(\frac{v_0}{c}\right)^2=\frac{v_0^2}{2c}$$

于是质点沿圆周走过的圈数为

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{1}{4\pi Rc}v_0^{\,2}$$

题1-10 为测量一水井的深度, 自井口无初速地投下一颗石子, 经过时间T之后听到石子碰击水面的声音。已知自由落体运动的加速度为g(g为常量), 空气中的声速(即声波在空气中的传播速

度)为u(u为常量), 试证明：井口至水面的距离H可表示成

$$H=\left(\sqrt{\frac{u^2}{2g}+uT}-\sqrt{\frac{u^2}{2g}}\right)^2 \tag{a}$$

证：设石子自井口落至水面经历的时间为T_1, 石子碰击水面的声音传至井口经历的时间为T_2, 根据教程例2-2的结论可得

$$H=\frac{1}{2}gT_1^2, \qquad H=uT_2$$

显然, $T_1+T_2=T$, 于是$T_1=T-T_2$, 并由上两式可得

$$\sqrt{\frac{2H}{g}}=T-\frac{H}{u}$$

再由上式可得

$$H^2-\left(\frac{2u^2}{g}+2uT\right)H+u^2T^2=0$$

这是关于H的一元二次方程, 它的两个根分别为

$$\left.\begin{matrix}H_1\\H_2\end{matrix}\right\}=\left(\frac{u^2}{g}+uT\right)\pm\sqrt{\frac{u^4}{g^2}+\frac{2u^3T}{g}}$$

由于$T_2<T$, 因而$H=uT_2<uT$, 因此H_1应舍弃。于是

$$H=H_2=\frac{u^2}{g}+uT-\sqrt{\frac{u^4}{g^2}+\frac{2u^3T}{g}} \tag{b}$$

式(b)即为式(a)[将式(a)展开便得到式(b), 读者可自行验证]。

题1-11　一质点在平面坐标系Oxy内运动, 质点的速度沿Oy轴的分量大小为常量c, 试证明：质点的加速度大小为

$$a=\frac{v^3}{|c|\rho} \tag{a}$$

其中v为质点的速度大小, ρ为质点运动轨迹的曲率半径。

证：当质点的速度沿Oy轴的分量为常量c时, 有$\dot{y}=\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=c$, 因此$y=\mathrm{d}\dot{y}/\mathrm{d}t=0$, 这时有

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{\dot{x}^2+c^2}, \qquad a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\ddot{x}$$

于是根据本书题1-3式(a)的第三式可得