信息科学技术专著丛书

路径优化模型与算法

王莉 著

ROUTING OPTIMIZATION MODELS AND ALGORITHMS

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

信息科学技术专著丛书

路径优化模型与算法

王　莉　著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

路径优化是交通运输领域中的基本问题。随着社会经济的迅猛发展以及城市规模的不断扩大，交通供需矛盾日益突出，给出行者带来诸多不便。出行者在预先设定的优化路径上通行，不仅能节省出行费用，而且对提高整个路网的通行效率也起到积极作用。本书针对实际交通环境中的各种复杂因素，通过考虑路网状态呈现出的高度动态性和不确定性，研究了如何充分考虑并合理处理复杂路网的动态性和不确定性，进而得到更加接近实际的路网信息，为出行者提供有效的路径向导。

图书在版编目(CIP)数据

路径优化模型与算法/王莉著. -- 北京：北京邮电大学出版社，2021.1

ISBN 978-7-5635-6253-4

Ⅰ. ①路… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①交通网一效率计算 Ⅳ. ①U491.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 209571 号

策划编辑：姚 顺 刘纳新　　**责任编辑**：刘春棠　　**封面设计**：七星博纳

出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京玺诚印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：8.5
字　　数：172 千字
版　　次：2021 年 1 月第 1 版
印　　次：2021 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-6253-4　　定　价：43.00 元

前　言

路径优化是交通运输领域中的基本问题。随着社会经济的迅猛发展以及城市规模的不断扩大，交通供需矛盾日益突出，给出行者带来诸多不便。出行者在预先设定的优化路径上通行，不仅能节省出行费用，而且对提高整个路网的通行效率也起到积极作用。本书将基于实际路网环境，以最短路问题和协同路径优化问题为研究对象，并运用场景优化理论与方法探讨动态不确定路径优化问题的模型和算法，拟提出处理实际路网动态性和不确定性的有效方法，并将其应用于突发事件下疏散路径优化中，为交通应急疏散问题提出合理的预案。

本书共分为 7 章，第 1 章为绪论，主要介绍本书的研究背景及意义、路径优化问题及算法概述、国内外研究现状以及章节内容和结构。第 2 章引入动态模糊交通网络中的最优路径评价准则。第 3 章探讨期望时间最短的动态模糊路径的求解方法。第 4 章研究随机约束最短路问题及拉格朗日松弛算法。第 5 章探讨基于灾难应急响应的随机疏散路径规划问题。第 6 章研究动态随机路网条件下两阶段疏散路径规划问题。第 7 章对本书的研究成果进行总结，并指出今后需要进一步深入研究与探讨的问题。

路径优化涉及交通运输、运筹优化及智能计算等领域一系列相关问题的研究。本书是在我的博士学位论文《动态不确定路径优化模型与算法》的基础上修改完善的，尝试将近几年在该领域的一些研究成果与读者分享。

感谢高自友教授和杨立兴教授多年来在学术上给予的悉心指导，引领我进入浩瀚的学术海洋。感谢北京邮电大学现代邮政学院提供的良好科研环境。

本书相关研究工作的完成得到了国家自然科学基金青年基金项目(71801018)的资助，谨在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免有错漏之处，恳请广大读者批评指正。

王　莉

于北京邮电大学

目　录

第1章 绪　论

1.1 研究背景及意义

随着社会经济的迅猛发展以及城市规模的不断扩大，机动车保有量显著增加。以北京市为例，截止到2019年10月北京市机动车保有量已达632.5万辆[1]，交通供需矛盾日益突出，给交通出行者带来诸多不便。同时，随着现代生活节奏的不断加快和人民生活质量的显著提高，人们越来越重视交通出行的效率。因此，在现有的交通条件下，如何提供优化的路径以提高城市居民的出行效率和质量，已成为交通运输领域关注的一个重要科学问题。

传统的出行者信息系统通过电视、报刊等提供静态的出行信息，出行者往往只能根据个人经验选择出行路线。在当今电子地图、计算机和多媒体技术高度发展的时代，先进的出行者信息系统（Advanced Traveler Information System，ATIS）有助于出行者做出更加合理的出行计划，从而为出行者提供个性化的出行指导，以达到减轻道路拥挤和减少交通事故的目的。目前，各种导航系统（如车载导航仪、手机地图导航）、可变信息标志（Variable Massage Signal，VMS）等出行者信息系统可根据路况信息为出行者提供路线引导，以减少出行时间、降低出行总成本。因此，优化路径的生成功能已然成为这些信息系统的关键功能模块。

实际中，由于诸多复杂因素的影响（如恶劣天气、汽车抛锚、道路修建、交通事故等），路段的通行时间和通行能力具有高度的不确定性，此时的路段通行时间和通行能力不能精确测量。一般来讲，不确定性包括随机性和模糊性[2]。若路段的通行信息可以通过历史数据得到，则路段属性的不确定性用随机变量表示。若缺乏路段通行信息的历史数据甚至没有数据，路段属性则通常被看作专家估计的模糊变量。另外，在某一路段上，车辆进入该路段时刻的差异可能导致通行时间的不同，如高峰时期和非高峰时期的路段通行时间具有明显差异，即随着道路拥堵程度的不同，路段通行时间和通行能力也随之动态变化。需要指出的是，本书所指的动态性（Time-dependent）与经典动态交通分配问题的动态性（Dynamic）有所区别。动态交通分配问题的动态性是指网络上的流量与路段通行时间均动态变化且相互影响：路段通行时间受交通流量动态变化的影响，同时路段通行时间的动态变化进而又影响出

行者的选择行为而导致动态的流量变化。然而，本书的动态性仅体现在路段通行时间随时间而动态变化，呈现出时间相关性，未考虑它与交通流量之间的相互影响关系。

下面以路段 $a \to b$ 为例(如图 1-1 所示)来描述路段通行时间的动态性和不确定性。假设出行者在某天的上午 8:00 进入路段 $a \to b$ 时，通行时间为 5 分钟，而在 8:05 进入该路段时，通行时间为 6 分钟，这说明路段通行时间随出发时刻而动态变化，即呈现出动态性。此外，当历史样本数据充足时，可统计出路段通行时间的概率质量函数，如出行者上午 8:00 通过路段 $a \to b$ 的时间是 4 分钟的概率为 0.7，而通过该路段的时间是 5 分钟的概率为 0.3，即路段通行时间呈现出随机性；当缺乏样本数据甚至没有样本数据时，专家评判是一种估计路段通行时间的有效方法，如上午 8:00 通过路段 $a \to b$ 的时间是 4 分钟的隶属度为 0.7，而通过该路段的时间是 5 分钟的隶属度为 1.0，此时路段通行时间则呈现出了模糊性。随机性和模糊性从客观和主观上分别描述了路段通行时间的不确定性，并且它们具有完全不同的运算法则[2]，前者遵循相加相乘法则，而后者遵循取大取小法则。

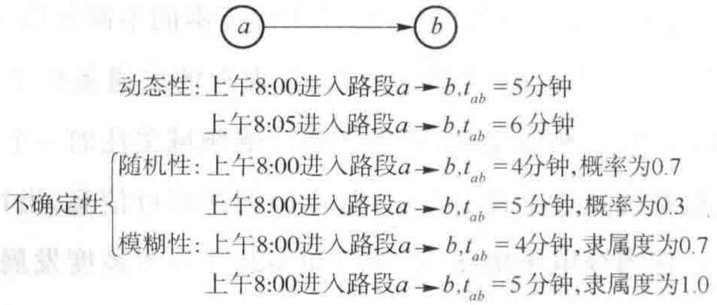

图 1-1　路段通行时间的动态性与不确定性

在上述情况下，单纯研究确定环境下静态路径优化问题显然不能满足实际交通出行的需要。因此，在具有动态性和不确定性的路网环境下如何为单个或多个 OD 间的车辆生成最短通行时间路径是一个值得深入探讨的课题。鉴于此，本书将基于实际应用背景，以最短路问题和最小费用流问题为研究对象，并结合场景优化[3](Scenario Optimization)的理论与方法探讨动态不确定路径优化模型和算法，以期得到处理实际路网动态性和不确定性的有效工具。具体地，首先，在路段通行时间样本数据缺乏的情况下，将路段通行时间处理为动态离散模糊变量，并探讨评价路径优劣的准则及求解方法。其次，在动态随机路网环境下，将路径长度、油耗等资源限制在预设阈值内，以得到稳健最短通行时间路径。再次，鉴于突发事件下(如地震、洪水)人员及车辆疏散路径分配与协同路径优化具有高度相似性，基于已提出的模型和算法，为应急管理下路径优化选择提出了总疏散时间最短的预案模型。

总之，本书以有效刻画和处理路段通行时间及通行能力的动态性和不确定性为主线，在路径评价准则、求解方法、资源约束及突发事件下的人员疏散等方面进行系统性研究，得到一系列有效的模型和算法，相关成果对处理动态不确定路网环境下的路径优化问题具有重

要的现实意义，具体如下。

(1) 在缺乏历史数据的情况下，根据专家经验将路段通行时间处理为动态模糊变量，设计了禁忌搜索算法求解期望通行时间最短的路径。

(2) 在资源限制情况下，构建约束最短路模型并设计拉格朗日松弛算法来求解动态随机路网环境下期望时间最短路径。

(3) 在突发事件下，假设受灾人员以车辆为单位进行疏散，并考虑路段通行能力约束为每辆车生成稳健可靠的疏散路径，进而得到高效的疏散方案。

(4) 若灾难发生后能够获取实时路段信息，则可根据是否已有实时信息将整个疏散过程划分为两个时间阶段，进而利用两阶段随机规划思想建立疏散路径规划模型。

(5) 本书所提出的路径优化模型及基于拉格朗日松弛算法的启发式算法为满足出行者的个性化需求提供了可能，并为政府决策者在突发事件发生时制定切实可行的疏散方案提供了有效方法。

1.2 路径优化问题概述

路径优化是将人员或车辆所行驶的路线按照某种性能指标（一般以时间为主）进行优化的过程，包括最短路问题、最小费用流问题、旅行商问题、车辆路径问题等。迄今，路径优化方法已被广泛应用于交通、通信、物流及互联网等领域。由于各个领域的个性化需求以及交通路网的高度复杂性，路径优化问题也呈现了多样性特点，不同领域对路径优化的定义及求解方法也不尽相同。例如，在交通路网中为出行者寻找一条从起点到终点距离最短的路径，即为最短路问题；而寻找从起点至终点总费用最小的可行流称为最小费用流问题。本书主要基于经典最短路问题及最小费用流问题，通过考虑路网的动态不确定性、资源约束、路网信息可获取性等情况深入探讨单个或者多个出行者的路径优化问题，并将提出的模型与算法应用于疏散路径规划问题中。为系统地阐述本书的研究内容，下面将根据不同的评价指标对路径优化问题进行分类，如表 1-1 所示。

表 1-1 路径优化问题的分类

分类指标	路径优化问题分类
对路网信息的了解程度	(1)确定性路径优化问题 (2)不确定路径优化问题
路网属性是否随时间变化	(1)静态路径优化问题 (2)动态路径优化问题

续表

分类指标	路径优化问题分类
起点和终点(OD)的数量	(1)单 OD 路径优化问题 (2)多 OD 路径优化问题
网络节点的供需量	(1)最短路问题 (2)网络流问题
目标函数特点	(1)单目标路径优化问题 (2)多目标路径优化问题
网络规模	(1)小规模路径优化问题 (2)中等规模路径优化问题 (3)大规模路径优化问题

本书基于上述分类指标对路径优化问题进行分类,并提出了一系列路径优化模型与算法。下面详细介绍表 1-1 中各分类指标的含义。

- 根据路网属性信息的可获取性,可以分为确定路网和不确定路网。值得说明的是,根据不确定路网样本数据是否充足,又可以将不确定路网处理为随机网络和模糊网络。在随机网络中,可依据充足的样本数据,采用统计方式估计路段属性的概率分布;而模糊网络则是在缺少样本数据时,采用专家评判法估计路段属性的可能性分布。
- 根据路网属性是否随时间变化,可分为静态路网和动态路网。静态路网的路段属性不随时间变化。而动态路网中的路段属性随着时间而动态变化,因此动态路网又称为时变路网。
- 根据求解过程中所考虑的起点和终点数量,可以分为单 OD 路径优化和多 OD 路径优化。例如,经典最短路问题即为单 OD 路径优化问题,而多商品流问题是将多个商品从不同供应地输送至多个需求地,即为多 OD 路径优化问题。
- 根据网络节点的供需量,可分为最短路问题和网络流问题。当供需量为 1 时,该问题为最短路问题,如经典最短路问题、旅行商问题及约束最短路问题;而当供需量大于 1 时,该问题则为网络流问题,如网络最大流问题、最小费用流问题及多商品流问题。
- 根据考虑的目标函数个数,可分为单目标问题和多目标问题。单目标路径优化仅以单一属性(如距离、时间等)达到最优为目标求得优化路径,而多目标路径优化是在两个或多个目标情况下,寻找最优路径。
- 根据网络规模的大小,可分为小规模路网、中等规模路网以及大规模路网。网络规

模的大小可用其包含的节点数和路段数来衡量。例如,一个具有4个节点、5条路段的网络为小规模路网;而具有933个节点、2 950条路段的芝加哥(Chicago)城市路网为一个大规模路网[4]。

基于上述分析,本书的研究重点是动态不确定路径优化问题。具体地,首先探讨OD数量及节点的供需量均为1时的动态模糊最短路的评价准则及其求解方法。其次考虑路径的资源/边际约束(Resource/Side Constraint),建立动态随机约束最短路模型。此外,探讨OD数量及节点供需量均大于1的随机协同路径优化问题(Coordinated Routing Optimization),并将其应用于突发事件下的应急疏散路径规划。最后采用先验优化和自适应选择相结合的策略,基于最小费用流理论,建立两阶段疏散路径规划模型。

1.3 路径优化算法

1.3.1 经典路径优化算法

自20世纪50年代以来,诸多领域的学者对求解路网最优路径问题进行了深入研究并提出高效算法,如Dijkstra算法[5](标号设定算法)、Bellman-Ford算法[6](标号修正算法)、Floyd-Warshall算法[7]等,这些算法均是在给定OD间找到一条最优的路径。而当需要寻找K条最短路径时,相关的算法为K最短路算法[8]。下面详细介绍本书在路径优化过程中所采用的标号修正算法和K最短路算法。

1. Dijkstra算法(标号设定算法)

Dijkstra算法的基本思想是:对于V中每一个节点j,赋予两个标号,一个是距离标号u_j,记录从起点到该节点最短路长度的上界;另一个是前趋标号pred(j),记录当起点s到该节点j的一条路长取到该上界u_j时,该条路中节点j前面的那个直接前趋节点。算法通过不断修改这些标号,进行迭代计算。当算法结束时,距离标号表示的是从起点到该节点的最短路长度。在算法不断修改这些标号、迭代进行计算的过程中,所有节点被分成了两类:一类是离起点s较近的节点,它们的距离标号表示的是从点s到该节点的最短路长度,因此其标号不会在以后的迭代中再被改变,称为永久标号;另一类是离起点s较远的节点,它们的距离标号表示的是从起点到该节点的最短路长度的上界,因此其标号还可能会在以后的迭代中被改变,因此被称为临时标号。

下面将给出标号设定算法的具体步骤[9]。

步骤1: 令$S=\varnothing$,$\bar{S}=V$,$u_s=u_1=0$,pred(s)$=0$;对V中的节点j($j\neq s$),令初始距离标号$u_j=\infty$。

步骤 2:如果 $S=V$,则 u_j 为节点 s 到节点 j 的最短路路长(最短路可以通过数组 pred 所记录的信息反向追踪获得),结束。否则,继续步骤 3。

步骤 3:从 $\bar{S}$ 中找到距离标号最小的节点 i,把它从 $\bar{S}$ 中删除,加入 S。对于所有从 i 出发的弧 $(i,j)\in A$,若 $u_j>u_i+w_{ij}$,则令 $u_j=u_i+w_{ij}$,$\text{pred}(j)=i$。转步骤 2。

2. Bellman-Ford 算法(标号修正算法)

由于标号设定算法仅适用于求解无圈网络或正费用网络的最短路问题,因此对于一般费用网络的最短路问题,需采用标号修正算法。标号修正算法的基本思路是[9]:在每次迭代中,所有节点的距离标号均为临时标号。其中,每个节点的距离标号表示在一定限制条件下,从起点至该节点的最短路长。当迭代终止时,限制条件被完全取消,此时所有节点标号同时转变为永久标号。一般标号修正算法可描述如下[9]。

步骤 1:令起点的距离标号 $u_s=0$,前趋标号 $\text{pred}(s)=0$;对所有其他节点 j,令 u_j 为无穷大。

步骤 2:若对所有权重为 w_{ij} 的弧 (i,j),$u_j\leqslant u_i+w_{ij}$,算法结束,u_j 为从起点至节点 j 的最短路长,最短路可通过依次寻找前趋标号(pred)获得,否则转至步骤 3。

步骤 3:寻找满足 $u_i+w_{ij}<u_j$ 的弧 (i,j),令 $u_j=u_i+w_{ij}$,$\text{pred}(j)=i$,转至步骤 2。

3. Floyd-Warshall 算法

上述介绍的两种方法均为求解给定一点到任意一点的最短路径。下面介绍求解任意两点之间最短路径的 Floys-Warshall 算法。该算法可以看成是标号修正算法的一种推广。通过迭代求解下面的方程,得到从节点 i 到节点 j 的最短路长。

$$\begin{cases} u_{ii}^{(1)}=0 \\ u_{ij}^{(1)}=\omega_{ij},i\neq j \\ u_{ij}^{(k+1)}=\min\{u_{ij}^{(k)},u_{ik}^{(k)}+u_{kj}^{(k)}\},i,j,k=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

在算法的具体实施过程中,与 Dijkstra 算法中用 pred 数组记录信息类似,还应该记录相应的中间信息,以便最后确定最短路。由于要记录所有节点之间最短路的信息,所以用二维数组 $P=(p_{ij})_{n\times n}$。具体来说,可以用 p_{ij} 表示从节点 i 到 j 的当前最短路中第 1 条弧的头节点。最后,可依据二维数组 P,采用“正向追踪”的方式得到最短路。Floyd-Warshall 算法可描述如下[9]。

步骤 1:$k=0$。对于所有节点 i 和 j,令 $p_{ij}^{(1)}=j$,$u_{ii}^{(1)}=0$(可认为 $w_{ii}=0$),$u_{ii}^{(1)}=w_{ij}\ (i\neq j)$(若节点 i 和 j 之间没有弧,认为 $w_{ij}=\infty$)。

步骤 2:$k=k+1$。对于所有节点 i 和 j,若 $u_{ij}^{(k)}\leqslant u_{ik}^{(k)}+u_{kj}^{(k)}$,令 $p_{ij}^{(k+1)}=p_{ij}^{(k)}$,$u_{ij}^{(k+1)}=u_{ij}^{(k)}$;否则令 $p_{ij}^{(k+1)}=p_{ik}^{(k)}$,$u_{ij}^{(k+1)}=u_{ik}^{(k)}+u_{kj}^{(k)}$。

步骤 3:如果 $k=n$,结束;否则转步骤 2。

4. *K* 最短路算法

K 最短路(K Shortest Path,KSP)问题[10]是寻找从起点至终点间的多条优化路径,形成备选路径集合,以最大限度满足出行者的不同路径选择需求。根据路径限制条件,KSP 问题可分为限定无环 KSP 问题和一般 KSP 问题:前者要求所有路径均不能含有环,即必须是简单路径;后者则对路径无任何限制。目前针对这两类 KSP 问题提出了不同的求解算法。求解限定无环 KSP 问题的算法主要有偏离路径算法和改进 Dijkstra 算法;针对一般 KSP 问题的算法有标号算法、删除路径算法、偏离路径算法及改进智能算法等。下面主要介绍本书求解 *K* 最短路所采用的删除路径算法。

给定有向图 $G(V,A)$,其中 V 是节点集合,A 是弧集合。删除路径算法具有以下特征[10]:假设图 G' 由图 G 通过删除最短路径 p_1 得到,则图 G 的第二最短路径 p_2 是图 G' 的最短路径,第三最短路径是在删除路径 p_1 和 p_2 后得到图 G'' 的最短路径,依此类推,得到前 K 条最短路径。因此,删除路径算法一般包括以下两步:(1)从当前图中删除某最短路径;(2)确定新产生图的最短路径。这类算法的关键在于第(1)步。通常,从图 G 删除最短路径 $p=\langle s=v_0,v_1,v_2,\cdots,v_l=t\rangle$ 产生图 G' 的过程包括以下四步[10]。

步骤 1:为路径 p 的每个中间节点 $v_i(1<i<l)$ 建立一个备份节点 v_i',产生新的节点集合 $V'=V\cup\{v_0',v_1',v_2',\cdots,v_{l-1}'\}$。需要注意的是,$v_0'$ 与 v_0 表示同一个节点。

步骤 2:将节点 $\{v_{i-1}',v_i'\}(1<i<l)$ 连接起来。

步骤 3:将节点 v_i 不在路径 p 上的前趋节点与每个节点 v_i' 相连,即 v_i' 的入弧 $\text{in}(v_i')$ 为 $\text{in}(v_i')=\{(j,v_i')\mid(j,v_i)\in A,j\in V-\{v_{i-1}\}\}\cup\{(v_{i-1}',v_i')\}$。

步骤 4:将弧 (v_{l-1},v_l) 移到 (v_{l-1}',v_l),则路径 $p=\langle s=v_0,v_1,v_2,\cdots,v_l=t\rangle$ 从图 G' 中删除。

1.3.2 现代路径优化算法

虽然上述经典算法能得到精确解,但由于现实中各种因素(如道路拥挤、恶劣天气、道路修建、交通事故等)的影响,网络通常具有动态性和不确定性,而经典算法通常不再适用于求解具有以上特征的大规模路径优化问题。而在现实世界中,具有动态性和不确定性的路径优化问题广泛存在。鉴于此,自 20 世纪 70 年代以来,相关学者相继提出了一系列近似优化算法,如遗传算法、禁忌搜索算法、蚁群优化算法、模拟退火算法和拉格朗日松弛算法等。值得说明的是,这些现代优化算法(拉格朗日松弛算法除外)均给出了最优值的上界(以极小化目标函数为例),而拉格朗日松弛算法则给出最优值的下界。另外,上述算法均是以人类或者其他生物的行为方式为背景,通过数学抽象建立起来的算法模型,因此这些算法亦称为智能优化算法。下面重点介绍本书在模型求解过程中所用到的现代优化算法。

1. 禁忌搜索算法

禁忌搜索算法[11]由 Glover 提出。该算法是人工智能在组合优化算法中的应用,禁忌技术是该算法的主要特点。为避免在迭代过程中因局部搜索陷入局部最优,该算法使用禁忌表来记录已经到达过的局部最优点或达到局部最优的过程,在后续搜索中,选择性地搜索这些点或不再搜索禁忌表中的相关信息,从而跳出局部最优点。

禁忌搜索算法主要由禁忌表、候选集(邻居)、评价函数、停止规则以及一些相关的计算信息组成。禁忌表即指禁忌对象和禁忌长度,禁忌对象一般选择导致解变化的状态,候选集中的元素则由评价函数决定。该算法的步骤可描述如下[12]。

步骤 1:给定禁忌表 $H=\varnothing$,并选定初始解 x^{now}。

步骤 2:判断是否满足停止规则:若满足停止规则,则停止计算;否则,在 x^{now} 的邻域 $N(x^{\text{now}})$中选择未禁忌的候选集 Can_$N(x^{\text{now}})$;在候选集 Can_$N(x^{\text{now}})$中选择一个评价值最佳的解 x^{next},$x^{\text{now}}=x^{\text{next}}$;更新禁忌表 H,重复步骤 2。

2. 拉格朗日松弛算法

拉格朗日松弛算法的基本思想[12]是将复杂约束松弛至目标函数中,并保持目标函数的线性特性。由于通过拉格朗日松弛算法减少一些约束,求解问题的难度系数会大幅度降低,从而使问题易于求解。例如,一些组合优化问题是 NP 难问题,在现有约束条件下不存在多项式时间算法,而在减少一些复杂约束后,该问题就能够在多项式时间内求解。同时,实验结果表明,该方法能够在可接受时间内计算较好的下界。

下面以整数规划问题为例说明拉格朗日松弛算法,该问题的数学模型如下所示[12]:

$$\begin{cases}\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b} \\ \qquad \boldsymbol{x}\in Z_{+}^{n}\end{cases} \tag{1-1}$$

其中,决策变量 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量,系数 $\boldsymbol{c}$ 为 n 维列向量,$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{b}$ 为 m 维列向量,Z_{+}^{n} 表示 n 维非负整数向量的集合。

假设整数规划问题为 NP 难问题,为了方便讨论拉格朗日松弛算法,该问题可描述如下[12]:

$$(\text{IP})\quad\begin{cases}z_{\text{IP}}=\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } \boldsymbol{Ax}\geqslant \boldsymbol{b} \quad (\text{复杂约束}) \\ \qquad \boldsymbol{Bx}\geqslant \boldsymbol{d} \quad (\text{简单约束}) \\ \qquad \boldsymbol{x}\in Z_{+}^{n}\end{cases} \tag{1-2}$$

其中,决策变量$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$为 $m\times(n+1)$整数矩阵,$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{d})$为 $l\times(n+1)$整数矩阵。则该问题的可行域为 $S=\{\boldsymbol{x}\in Z_{+}^{n}\mid \boldsymbol{Ax}\geqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{Bx}\geqslant\boldsymbol{d}\}$。

在模型 IP 中，定义 $\boldsymbol{Ax}\geqslant\boldsymbol{b}$ 为复杂约束的原因为：如果去掉该约束，则模型 IP 能够在多项式时间内求得最优解，即[12]

$$\begin{cases} z'_{\mathrm{IP}}=\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s. t. } \boldsymbol{Bx}\geqslant\boldsymbol{d} \quad \text{（简单约束）} \\ \quad \boldsymbol{x}\in Z_{+}^{n} \end{cases} \tag{1-3}$$

可以在多项式时间内求解。

对于给定的 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，模型 IP 对 λ 的松弛模型 LR 定义为[12]

$$(\mathrm{LR}) \quad \begin{cases} z_{\mathrm{LR}}(\lambda)=\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}) \\ \text{s. t. } \boldsymbol{Bx}\geqslant\boldsymbol{d} \\ \quad \boldsymbol{x}\in Z_{+}^{n} \end{cases} \tag{1-4}$$

其中，LR 的可行域记为 $S_{\mathrm{LR}}=\{\boldsymbol{x}\in Z_{+}^{n}\mid \boldsymbol{Bx}\geqslant\boldsymbol{d}\}$，向量 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$ 称为拉格朗日乘子。

定理 1.1[12] 松弛模型 LR 与式(1-3)具有相同的复杂性，且如果 IP 的可行域非空，则 $\forall\lambda\geqslant 0\Rightarrow z_{\mathrm{LR}}(\lambda)\leqslant z_{\mathrm{IP}}$。

定理 1.1 说明拉格朗日松弛模型是原模型 IP 的下界，因此为求得与 z_{IP} 最接近的下界，则需要求解拉格朗日对偶模型 LD[12]：

$$z_{\mathrm{LD}}=\max_{\lambda\geqslant 0} z_{\mathrm{LR}}(\lambda) \tag{1-5}$$

求解拉格朗日对偶问题 LD 通常采用次梯度优化(Subgradient Optimization)算法，该算法的思想与非线性规划中梯度下降法的思想相同。由前边的讨论可知，每一个 λ 对应的 $z_{\mathrm{LR}}(\lambda)$ 均可作为 IP 的一个下界，进而找到最佳值 z_{LD}。由于 LR 得到的解不一定是 IP 的可行解，需进一步将次梯度优化算法扩展为拉格朗日松弛启发式算法[12]：第一阶段是基于拉格朗日松弛算法的次梯度优化算法，第二阶段是将第一阶段中得到的不可行解可行化。

1.4 路径优化问题研究现状

1.4.1 动态不确定路径优化问题

自 20 世纪 90 年代以来，国内外相关学者广泛关注并深入探讨了路网的动态性和不确定性，且取得了丰硕的研究成果，对处理交通运输网络中路段属性的动态性和不确定性起到了重要的推动作用。

现实中，路段属性通常随着时间而动态变化，尤其是在高峰时段，路段属性呈现出的动态性更加明显。针对路网的动态性(Time-dependent)，国内外学者开展了大量的研究工作。

比如，林澜等[13]针对弧权重随时间变化的特征，给出了最短路稳定性的充要条件，并以此为基础提出基于稳定区间的近似算法。何俊等[14]研究了动态交通网络的性质，针对此类网络提出了一种时间依赖的最短路算法，并将此算法成功应用于公交查询系统。刘建美等[15]分别为允许超车和不允许超车两种情况设计了动态导航最短路算法。Zilisskopoulos 和 Mahmassani[16]为寻找动态网络中的最短时间路径提出了有效算法。Grier 和 Chabini[17]将在满足 FIFO 的动态网络中寻找所有出发时刻的最小时间路径问题转化为一系列的静态最短路径树问题。Miller-Hooks 和 Sorrel[18]在一个动态的交通网络中提出了一个疏散策略以使尽可能多的人员在一定时间内到达安全区域。通过以上研究成果可知，现有文献主要通过引入离散化时间轴的方法将所考虑的时间段离散为一系列的小区间，从而有利于设计相应的方法搜索最优路径。

由于汽车抛锚、交通事故、道路维修等因素的影响，路段属性又呈现出很强的不确定性。在路网历史信息充分的情况下，路段属性的不确定性通常可用随机性来表示，表示方法大致可分为以下三类：使用离散或连续概率分布函数表示，如 Miller-Hooks[19,20]，Nie 和 Wu[4]，Chen 等[21]；通过方差或其他统计方法刻画路段属性的矩特征，如 Fu 和 Rillett[22]，Sun 等[23]；基于样本或场景的表示，如 Liu[24]，Chen 和 Ji[25]，Xing 和 Zhou[26]，Yang 和 Zhou[27]。为了简便起见，通常情况下假设路段属性之间是相互独立的，如 Wu[28]，Chen 等[29]，Khani 和 Boyles[30]。然而，由于交通流在时间和空间上的拥堵传播特性，路段属性之间会存在一定的相关性。例如，上午 8:00 路段 $b\rightarrow c$ 发生交通事故，之后该路段的通行时间会明显增长，同时会将拥挤效应传播至上游路段 $a\rightarrow b$，从而导致路段 $a\rightarrow b$ 的通行时间在几分钟后（如 8:05）有显著增长。针对此特点，许多学者考虑了路段属性之间的相关性（Correlation），如 Xing 和 Zhou[26]，Dong 等[31]，Chen 等[32,33]，Huang 和 Gao[34]。

然而，在缺少路网信息甚至没有相关信息的情况下，路段属性则可根据专家经验将其处理为模糊变量。如 Yang 等[35]探讨了缺少系统参数情况下的物流中心选址问题，基于可信性理论提出了机会约束规划模型，并讨论了所提模型的性质。Mahdavi 等[36]将路段长度看作模糊数，提出了一种求解交通路网中模糊最短路的动态规划方法。Kumar 和 Kaur[37]用梯形模糊数表示系统参数（如需求量、运输成本及供应量等）来求解非平衡运输问题。Wong 等[38]通过采用模糊时间序列表示参数间的相互关系，据此提出了一个动态模糊时间序列预测模型。Zheng 和 Ling[39]提出了一个基于可信性理论的广义模型来处理应急交通管理中参数的模糊性。

现有文献大多基于优化理论的框架对路径优化问题展开研究，评价目标函数的方法主要有：极小化期望通行时间，如 Hall[40]，Miller-Hooks[20]，Fu[41]，Yang 和 Miller-Hooks[42]，Gao 和 Chabini[43]；最大化按时到达概率，如 Nie 和 Wu[4]，Samaranayake 等[44]；最小化最大