剑指150

考研数学零基础串讲

数学三

高昆轮 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

剑指150

考研数学零基础串讲

数学三

高昆轮 主编

剑指150系列编委(按姓氏拼音排序)

陈静静 程晓飞 高昆轮 贾建厂 姜洁 雷会娟 吕倩 史明洁

王慧珍 吴金金 张青云 张婷婷 赵楠 郑利娜 朱原则

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

剑指150：考研数学零基础串讲. 数学三／高昆轮主编. —北京:北京理工大学出版社,2021.1

ISBN 978-7-5682-9456-0

Ⅰ.①剑…　Ⅱ.①高…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2021)第005054号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市文阁印刷有限公司
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／31
字　　数／774千字
版　　次／2021年1月第1版　2021年1月第1次印刷
定　　价／119.80元

责任编辑／封　雪
文案编辑／封　雪
责任校对／周瑞红
责任印制／李志强

前言

考研数学在研究生初试选拔中有着举足轻重的地位，它分值高(150分)、难度大、极具区分度，要想攻下这门学科，获取高分，我们究竟需要怎么做？或者说我们究竟需要借助什么“工具”以及又该如何使用好这个“工具”呢？这就是我想对大家谈的几点。

一、考研数学有基础题，且每年的基础题在整张试卷中都会占相当一部分的比例。对于这部分试题，同学们只要在全年复习中借助一个好的“工具”踏踏实实修内功、打基础并严格落实到计算，那么在考场上拿到这部分分数来达到“保底”并不困难。

《剑指150：考研数学零基础串讲》就是大家在第一轮复习中必备的一个“工具”！本书主要有以下几大特色：一是本书配备全程课程讲解；二是本书全面总结了考研数学的所有考点，将定理、公式、法则和性质放在具体的、优秀的经典题目中，以举例学考点的方式指导同学们完成复习；三是部分题目一题多解，同学们可选择适合自己的解题方法；四是应试性强，考什么就学什么，本书对固定类型总结了固定解题方法，同学们只需“模仿”本书总结的方法即可顺利解决很多题目。

二、考研数学有难题，但真正的“压轴题”一般就1～2个。很大一部分考题与其说是难题，倒不如说是综合题。这种题基本上都是将跨章节的多个知识点综合在一起。对于这种综合题没有一蹴而就的法宝，同学们首先必须对每个考点的内容及解题的方法非常熟悉，然后对其进行高强度训练，才能攻下这类题，从而为考试获得高分增添砝码。

综上，就是要求同学们把本书多看多做，只有这样，才能真正理解每个考点的内涵，打开分析问题及处理问题的思路。本书在适当的位置(如“考点38　定积分与极限的综合题”等)上安排了一些相应的综合题，请同学们认真演算这些题，反复揣摩，以期掌握其中的要领。值得一提的是，本书中介绍的某些考点是我反复研究历年真题后从中提炼而成的(如“考点67　已知方程的解反求方程及进一步研究方程的解”“考点68　通过变形改造建立微分方程并求解”等)。这些考点在一般教材上没有给出系统总结，往往是同学们在

复习过程中的“空白”，本书对此做了大量总结与示范，这对同学们的复习无疑是锦上添花。

本书以考点为脉络来组织内容，这既适合同学们在第一轮复习中打基础、修内功，又可在同学们后期做题过程中当作“词典”使用，也适合同学们在考前当作“读物”来查缺补漏。总之，它是你的好友，更是你的伴读！

最后，感谢北京理工大学出版社的编辑们，正是在他们的帮助下，本书才能顺利地出版并与同学们见面。

高昆轮

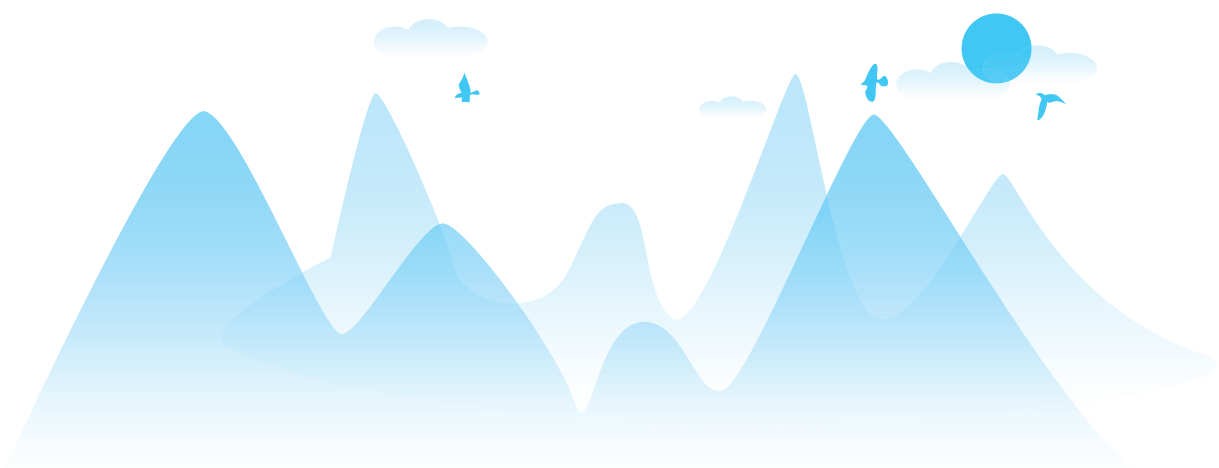
目录

第一部分　微积分

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　微积分



第一章　函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小量和无穷大量的概念及其关系　无穷小量的性质及无穷小量的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

7. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

8. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

考点分布

1.函数（考点1、2）

这部分重点是函数表达式的求解及函数各种性质的判定.

2.极限（考点3－12）

这部分内容丰富，首先是对极限定义的理解、对极限性质的使用、对无穷小理论及阶数的建立；其次就是求极限的各种方法与技巧，这是本章的重点也是难点（尤其是求数列的极限）；最后就是极限的反问题（已知极限值，反求其中的未知参数）.

3.连续（考点13、14）

这部分实际上属于极限的应用（当然，极限的应用远不止连续，如后续的渐近线、导数、积分、级数等都属于极限的应用），这部分重点是会找函数的间断点并能指明类型；闭区间上连续函数的各种性质，尤其是零点定理是我们研究方程根的有力工具.

考点详析

考点1　常用函数及常用曲线

1. 函数的概念及一些常用函数

定义1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的对应法则 f 在 $\mathbf{R}$ 上总有唯一一个确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，常称 x 为自变量，y 为因变量，D 为函数的定义域，因变量 y 的变化范围为函数的值域.

注 构成函数的基本要素是定义域和对应法则，只有两个函数的定义域和对应法则完全相同时，它们才是同一个函数，这也说明函数与用什么字母表示是无关的，以后在求解函数表达式时，经常用到这种与字母无关的特性.

下面我们来介绍一些常用的函数，特别要注意它们所具有的“规律”.

例1 （分段函数）$y=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0,\\ g(x), & x>x_0\end{cases}$ 或 $y=\begin{cases}f(x), & x\neq x_0,\\ a, & x=x_0\end{cases}$ 或

$$y=\begin{cases}f(x), & x<x_0,\\ a, & x=x_0,\\ g(x), & x>x_0.\end{cases}$$

注 分段函数重点研究分段点处的极限、连续性及导数.

例2 （绝对值函数）$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x, & x>0.\end{cases}$

注 ①$y=|x|$ 在 $x=0$ 处是连续的，但它在 $x=0$ 处是不可导的（即 $y'(0)$ 不存在）；

② $|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

例 3 (最值函数)$U = \max\{f(x), g(x)\}$,$V = \min\{f(x), g(x)\}$.

注
$$U = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2},$$
$$V = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2},$$
且 $U+V = f(x)+g(x)$,$U-V = |f(x)-g(x)|$,$U \cdot V = f(x)g(x)$.

例 4 (符号函数)$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

注 对任何 x,都有 $\sqrt{x^2} = |x| = x\operatorname{sgn} x$.

例 5 (取整函数)$y = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数,如图 1-1-1 所示.

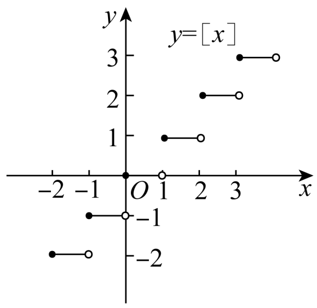


图 1-1-1

如 $\left[\frac{5}{7}\right] = 0$,$[\sqrt{2}] = 1$,$[-1] = -1$,$[-3.5] = -4$.

注 $[x+n] = [x]+n$,其中 n 是整数,$x-1 < [x] \leqslant x$.

例 6 (狄利克雷函数)$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{Q}^C. \end{cases}$

注 ① 狄利克雷函数没有图形(没有任何曲线段).

② 狄利克雷函数是以任何正有理数为周期的周期函数,因此它没有最小的正周期.

③ 狄利克雷函数处处无极限、处处不连续、处处不可导.

狄利克雷函数常用来举反例和构造具有某种特殊性质的函数.例如,函数 $y = xD(x)$ 仅在原点连续,在其他点处间断;函数 $y = x^2D(x)$ 仅在原点可导,在其他点处间断(从而不可导).

例 7 (幂指函数)$y = u(x)^{v(x)}$,$u(x) > 0$,且 $u(x) \neq 1$.

注 $u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$ 这一恒等变形是重要的解题技巧.

2. 反函数、复合函数及初等函数

(1) 反函数.

定义2 设 $y = f(x)$ 的定义域为 D,值域为 R_f,如果对于任一 $y \in R_f$,有唯一确定的

$x \in D$，使得 $y=f(x)$，则称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，有时也将 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$.

注 ① 单调函数必有反函数，且有相同的单调性.

② 在同一坐标系中，$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，而 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是重合的. 后续我们将会看到是 $x=f^{-1}(y)$ 才有所谓的求导公式 $[f^{-1}(y)]'=\dfrac{1}{f'(x)}$，而反函数 $y=f^{-1}(x)$ 求导是没有具体公式的.

③ $f[f^{-1}(x)]=x$，$f^{-1}[f(x)]=x$（这两个小结论在考试中多次被用到）.

例 8 设 $y=\sin x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$，求其反函数.

分析 对 $y=\sin x$，只有当 x 落在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上时，才直接有反函数 $x=\arcsin y, y \in [-1,1]$.

解 如图 1-1-2 所示，① 当 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时，对 $y=\sin x$ 直接有 $x=\arcsin y, y \in [0,1]$.

② 当 $\dfrac{\pi}{2}<x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$ 时，有 $-\dfrac{\pi}{2}<x-\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，此时 $\sin(x-\pi)=-\sin(\pi-x)=-\sin x=-y$，于是有 $x-\pi=-\arcsin y$，故 $x=\pi-\arcsin y, y \in [-1,1)$.

③ 当 $\dfrac{3\pi}{2}<x \leqslant 2\pi$ 时，有 $-\dfrac{\pi}{2}<x-2\pi \leqslant 0$，此时 $\sin(x-2\pi)=\sin x=y$，于是有 $x-2\pi=\arcsin y$，故 $x=2\pi+\arcsin y, y \in (-1,0]$.

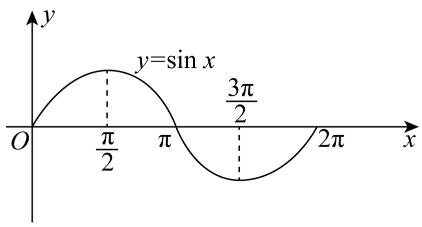


图 1-1-2

例 9 设函数 $y=f(x)=\begin{cases} 1-2x^2, & x<-1, \\ x^3, & -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 12x-16, & x>2, \end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

解 当 $x<-1$ 时，由 $y=1-2x^2$，得 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}\ (y<-1)$；

当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，由 $y=x^3$，得 $x=\sqrt[3]{y}\ (-1 \leqslant y \leqslant 8)$；

当 $x>2$ 时，由 $y=12x-16$，得 $x=\dfrac{y+16}{12}\ (y>8)$.

综上，有
$$x=\begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}, & y<-1, \\ \sqrt[3]{y}, & -1 \leqslant y \leqslant 8, \\ \dfrac{y+16}{12}, & y>8, \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的反函数为

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

(2) 复合函数.

定义3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g\subset D_f$，则称 $y=f[g(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数.

注 函数 $u=g(x)$ 的值域 R_g 必须包含于函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 内，二者才可复合得到 $y=f[g(x)]$，比如 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 与 $u=g(x)=\tan x$ 就无法复合，因为 $g(x)=\tan x$ 的值域 $R_g=(-\infty,+\infty)$，显然不包含于 $f(u)=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_f=[0,+\infty)$ 内.

例 10 设

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0,\\ -\mathrm{e}^x, & x<0,\end{cases}\quad \varphi(x)=\ln x.$$

(1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域；

(2) 讨论是否可复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

解 (1) 因为 $\varphi(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 所以 $\varphi(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内，故 $f[\varphi(x)]$ 有意义，因而

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\varphi^2(x), & \varphi(x)\geqslant 0,\\ -\mathrm{e}^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<0,\end{cases}$$

即

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2 x, & x\geqslant 1,\\ -x, & 0<x<1.\end{cases}$$

从上式可以看出，$f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

(2) 由于 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,0]$，$\varphi(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，它们无公共的部分，所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

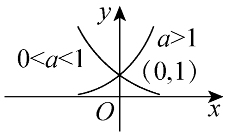
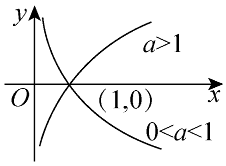
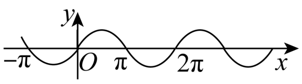
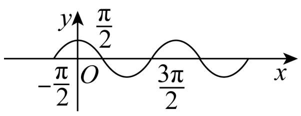
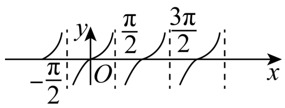
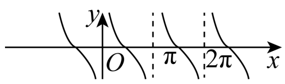
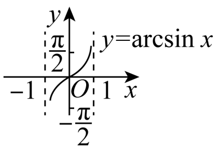
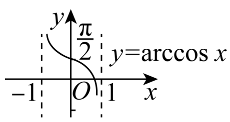
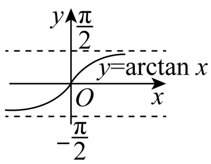
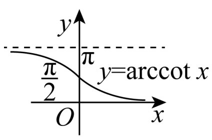
(3) 初等函数.

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数称为基本初等函数，它们的基本性质如表1-1-1所示. 由常数和基本初等函数经有限次四则运算(加减乘除)及有限次复合运算得到的且能用一个式子表示的函数称为初等函数.

注 ① 分段函数一般不是初等函数，但有些分段函数是初等函数的情况，如 $|x|=\sqrt{x^2}$ 就是初等函数.

② 由于幂指函数 $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$，$u(x)>0$，且 $u(x)\neq 1$，故幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 是初等函数.

表 1-1-1

函数名称	定义域	值域	图像	基本关系式
幂函数 $y=x^{\mu}$	随 μ 的 不同而不同	随 μ 的 不同而不同		
指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$		
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$		
三角函数 $y=\sin x$ $y=\cos x$ $y=\tan x$ $y=\cot x$	$(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$ $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n\in\mathbf{Z})$ $x\neq n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$	$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$		$\sin(\arcsin x)=x$ $(\lvert x\rvert\leqslant 1)$; $\cos(\arccos x)=x$ $(\lvert x\rvert\leqslant 1)$; $\tan(\arctan x)=x$ $x\in\mathbf{R}$; $\cot(\operatorname{arccot} x)=x$ $x\in\mathbf{R}$
反三角函数 $y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\arctan x$ $y=\operatorname{arccot} x$	$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $[0,\pi]$ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $(0,\pi)$		$\arcsin(\sin x)=x$ $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $\arccos(\cos x)=x$ $x\in[0,\pi]$; $\arctan(\tan x)=x$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{arccot}(\cot x)=x$ $x\in(0,\pi)$
三个恒等式：$a^{\log_a x}\equiv x$，$\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2}$，$\arctan x+\operatorname{arccot} x\equiv\frac{\pi}{2}$				

3. 函数表达式的求解

函数表达式的求解一般是借助解“微分方程”而得到,这里举几个不涉及微分方程而只涉及函数初等运算的例子.

例 11 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解 (1)
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1,\end{cases}$$

而 $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}|g(x)|\leqslant 1,\text{得 } |2-x^2|\leqslant 1,\text{即 } 1\leqslant |x|\leqslant\sqrt{3},\\ |g(x)|>1,\text{得 } |x|<1 \text{ 或 } |x|>\sqrt{3},\end{cases}$

故
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant |x|\leqslant\sqrt{3},\\ 0, & |x|<1 \text{ 或 } |x|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

(2) $g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2,\\ 2, & |f(x)|>2,\end{cases}$ 而 $|f(x)|\leqslant 2$ 恒成立,故
$$g[f(x)]=2-f^2(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

例 12 设 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=1-x$,且 $x\neq 0$,则 $f(x)=$________.

答案 $\frac{1}{3}-\frac{2}{3x}+\frac{x}{3}$

解析 令 $\frac{1}{x}=t$,则 $f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=1-\frac{1}{t}$,联立原等式,有
$$\begin{cases}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=1-x,\\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=1-\frac{1}{x},\end{cases}$$
得 $f(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3x}+\frac{x}{3}$.

例 13 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}$,且 $x\neq 0$,则 $f(x)=$________.

答案 $\frac{x}{x^2-2}$

解析 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}=\frac{\frac{1}{x}+x}{\frac{1}{x^2}+x^2}=\frac{\frac{1}{x}+x}{\left(\frac{1}{x}+x\right)^2-2}$,令 $x+\frac{1}{x}=t$,则 $f(t)=\frac{t}{t^2-2}$,从而有 $f(x)=\frac{x}{x^2-2}$.

注 求出 $f(x)=\frac{x}{x^2-2}$ 后,可计算 $\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x\left(=\frac{1}{2}\ln 3\right)$,这便是2008年的填空题.

例 14 设 $f(x)=2+4\cos x\lim\limits_{x\to 0}f(x)$,则 $f(x)=$________.

答案　$2-\frac{8}{3}\cos x$

解析　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是一个数，记$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$，则$f(x)=2+4A\cos x$，两端再同时取极限$x\to 0$，有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2+4A\cos x)$，即$A=2+4A$，故$A=-\frac{2}{3}$，于是$f(x)=2-\frac{8}{3}\cos x$.

注 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$、导数$f'(x_0)$、积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$等都是一个数，类似的有很多.

例 15 求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\ (x>0)$的表达式.

解　利用重要结论$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，其中$a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，于是$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2,\\ \frac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$

注 ① $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，其中$a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$的证明见考点12中的例6.

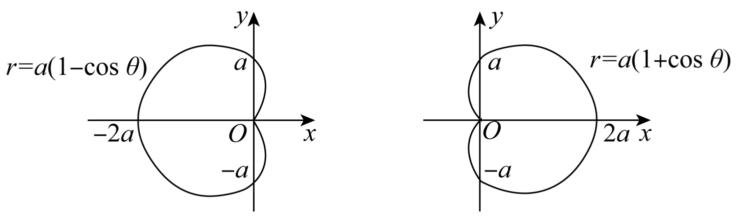
② 本题是利用极限$\lim\limits_{n\to\infty}g(n,x)$来构造函数$f(x)$，这样的$f(x)$往往是分段函数.

4. 常用曲线（这些曲线在以后会经常碰到）

（1）笛卡尔心形线.

$x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}-x)$或$r=a(1-\cos\theta)$（见图1-1-3(a)）；

$x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$或$r=a(1+\cos\theta)$（见图1-1-3(b)）.



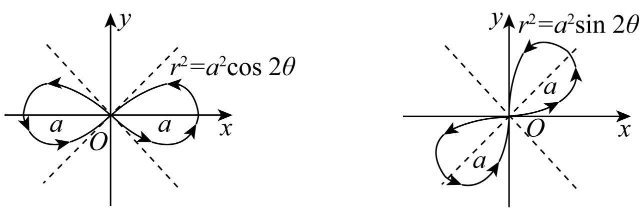
(a)　　(b)

图 **1-1-3**

（2）伯努利双纽线.

$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$或$r^2=a^2\cos 2\theta$（见图1-1-4(a)）；

$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$或$r^2=a^2\sin 2\theta$（见图1-1-4(b)）.



(a)　　(b)

图 **1-1-4**