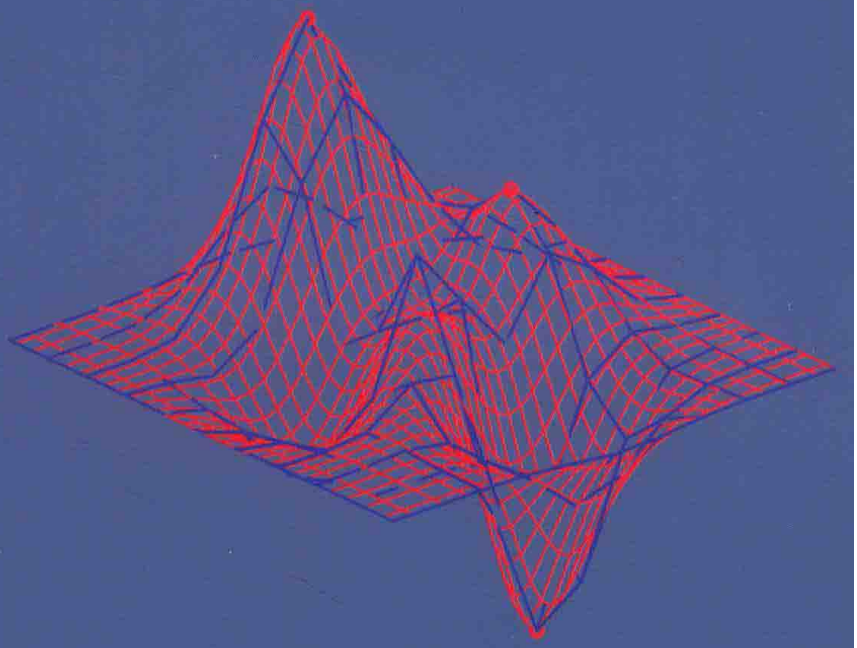
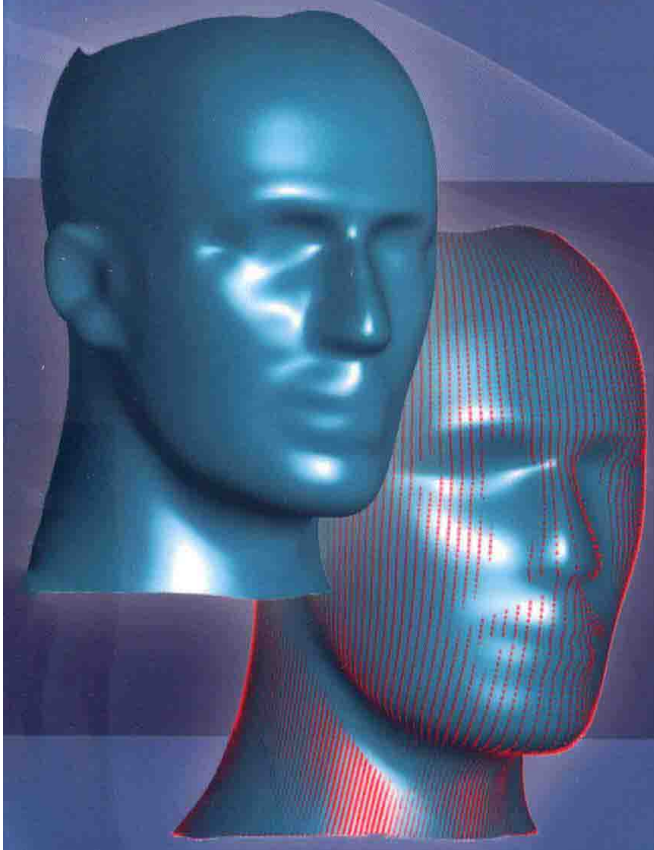


Geometric iterative methods and their applications

几何迭代法及其应用

◎ 蔺宏伟 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

几何迭代法及其应用

Geometric iterative methods and their applications

蔺宏伟　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

几何迭代法及其应用 / 蔺宏伟著. —杭州：浙江大学出版社，2021.2
ISBN 978-7-308-20613-6

Ⅰ. ①几… Ⅱ. ①蔺… Ⅲ. ①迭代逼近 Ⅳ. ①O174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 180602 号

几何迭代法及其应用

蔺宏伟 著

责任编辑 杜希武
责任校对 汪志强 石国华
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排 版 杭州好友排版工作室
印 刷 杭州高腾印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 16.5
字 数 304
版 印 次 2021 年 2 月第 1 版 2021 年 2 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-20613-6
定 价 59.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换
浙江大学出版社市场运营中心联系方式：（0571）88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

序

高兴地读过《几何迭代法及其应用》书稿. 这本书主要内容展现了作者蔺宏伟博士在数值分析这样一个专题上的深入思考与新颖成果. 通过插值与逼近迭代方法的研究, 阐述人们十分关心的问题, 即"数"和"形"之间的关联与转化. 如此看来, 这一著述, 对应用数学与计算数学的本科生、研究生, 以及相关的工程技术人员, 无论做理论研究还是做实际应用, 都有很好的参考价值, 从中获得的启示或许有更久远的影响.

几何迭代法, 又称渐进迭代逼近(Progressive-iterative approximation), 简称PIA. 针对数据拟合问题, 按几何迭代法求解, 这是一类具有明显几何意义的逼近过程. 换句话说, 求解途径是动态的. 恰恰因其动态操作, 使得在求解过程中可以灵活加入所需要的几何约束条件, 这是鲜明的特点, 也是与通常插值逼近方法的重要差别.

几何迭代法最基本的想法, 其实并不复杂. 本书作者蔺宏伟博士写道: "几何迭代法肇始于1975年由齐东旭等学者提出的均匀B-样条曲线的盈亏修正算法. 1979年, de Boor也独立证明了这一算法的收敛性". 这是40年前的事情. 作为"肇始"者之一, 我愿意借此机会回顾这段故事.

中美建交之后, 我作为访问学者, 于1980年4月的一天, 与Carl de Boor教授首次见面, 地点是美国威斯康辛(麦迪逊)大学数学研究中心大楼(此后共事两年, 从他那里得到许多帮助与指导). 当时, 我刚刚读过他那篇文章How does Agee's smoothing method work? (标题吸引了我), 话题就从这里开始. 那时, 在美国根本找不到中国大陆的中文学术刊物, 我只能把我们在《数学学报》上发表的论文翻译给他. 有趣的是, 虽然此前我与de Boor教授互不相识, 但交谈中发现彼此研究背景极为相似: 其一, 问题都来自实际应用. de Boor教授是为了回答美国白沙导弹发射场工程师提出的一个算法的有效性问题, 而我与我的同事(田自贤、张玉心、冯家斌, 他们都是飞机设计师)在沈阳飞机设计研究所, 刚刚完成一项曲线曲面表达与计算的任务, 它是针对某超音速歼击机的机翼与进气道的设计研究; 其二, 都是以3次均匀B-样条曲线为数学模型作数据拟合; 其三, 都是在具体算法上采用"盈亏修正"的迭代手段, 逐次修改控制点数据, 加上一定的判断条件, 迭代次数适可而止, 无须迭代到底. 上述第二点, 采用的是人们熟知的现成方法, 思路平凡, 不算创新. 而第三点, 尽管简单, 却是与众不同的新意所在.

相对于目前比较系统的几何迭代方法(或称PIA方法)而言, 40年前的探讨与应用实践可算作是个开端. 与de Boor教授一起展望过"盈亏修正"的前景, 之后各忙别的, 并没有深究这一论题. 然而, 到了世纪之交, 我国青年学者, 在王国瑾、汪国昭等教授指导下, 对这一专题开展了系统而深入的研究, 并取得了一系列的理论与应用成果. 本书作者蔺宏伟较早进入这一领域, 把近年成果总结成书, 可喜可贺!

蔺宏伟博士撰写的《几何迭代方法及其应用》, 有如下特点:

(1). 几何迭代法的理论基础阐述严谨, 数学方面的论证清晰易读, 照顾到了非数学专业的读者.

(2). 以计算机辅助设计与制造(CAD/CAM)为背景, 针对曲线曲面造型的应用目标, 密切结合实际应用.

(3). 论述不同类型几何迭代的具体算法, 其细致的阐述给用户提供方便.

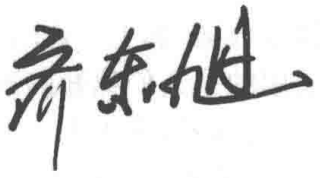
(4). 提供几何迭代方法的实际应用例题, 它们除了示范作用, 更给读者展现进一步研究的空间.

就此, 顺便说点闲话, 谈点感想.

借用一句很出名的话——虽然出名但听起来却很普通, 这就是:“春天的紫罗兰处处开放”. 它出自匈牙利的一位父亲写给儿子的信中, 收信人是后来载入数学史册的数学家鲍耶依. 众所周知, 非欧几何的出现是数学中的大事. 翻开非欧几何创始人的著作, 会发现大量看似简单初等的球面几何、球面三角公式, 内容极其繁杂, 乃至今天面对这些公式, 其繁难程度仍会令人望而却步. 尽管现在已经有简洁得多的方法, 但这也只是对专业的数学工作者而言的. 直线与平面、大圆与球面, 对这类问题的艰苦深思, 背后隐藏并孕育着新的几何学要素. 二百年前数学家的创见, 不只是出于灵感, 这里不知道凝聚了多少汗水! 19世纪初, 虽然非欧几何已经呼之欲出, 却又过了几十年才出现了公认的非欧几何创始人鲍耶依, 当然还有罗巴切夫斯基和高斯等人.

科学进程从来都是一步一步的, 停不下也急不得. 鲍耶依的父亲老鲍耶依也是一位数学家, 当年他针对非欧几何研究以及儿子少年时期的暴躁性格所说的“春天的紫罗兰处处开放”, 是否可以这样解读: 春暖大地, 花始盛开. 给做学问者一个良好的环境, 不能今天立项, 明天要成果. 只有静下心来, 大家都消除浮躁情绪, 才能“良种入土, 秋后进账”.

我无意将几何迭代法比作非欧几何. 我想说的是, 蔺宏伟博士的著作出版可谓十年磨一剑, 成果值得肯定, 同时也赞扬这种耐得住寂寞、认真钻研、扎实积累的精神.



2019年8月23日

前 言

几何迭代法, 又称渐进迭代逼近(PIA: Progressive-iterative approximation), 是一种具有明显几何意义的迭代方法. 几何迭代法肇始于1975年由中国学者齐东旭教授等提出的均匀3次B样条曲线的盈亏修正算法; 1979年, 美国学者de Boor也独立证明了这一算法的收敛性. 在此基础上, 2005年, 本书作者提出了渐进迭代逼近.

渐进迭代逼近自提出以来, 受到了国内外学术界的持续关注. 日本、美国、德国、西班牙等国家的学者, 以及国内浙江大学、合肥工业大学、大连理工大学、中山大学、浙江工业大学、杭州电子科技大学、浙江工商大学和福建师范大学等单位的专家学者开展了对渐进迭代的理论和应用研究. 其中, 有些国外学者对于渐进迭代的变体给出了不同的名字, 比如, "Progressive Interpolation", "Geometric Interpolation/Approximation"等. 本书将这些方法统一称为几何迭代法.

经过10余年的发展, 在国内外学者的努力下, 逐渐建立了几何迭代法较完整的理论框架, 并将几何迭代法应用到几何设计、数据拟合、网格和样条体的生成、逆向工程及图像处理等领域, 用于实现涡轮发动机外形设计、机翼外形设计、船舶外形设计、汽车车灯系统设计和箱包外形设计等.

本书是对几何迭代法目前研究进展的总结. 全书分5章. 第1章介绍了几何设计的基本概念和基本方法. 第2章阐述了插值型几何迭代法的迭代格式和收敛性分析. 第3章给出了几何迭代法的局部性质. 第4章讲述了逼近型几何迭代法. 最后, 第5章展示了几何迭代法在几何设计、逆向工程、数据拟合及网格处理等方面的应用.

本书由蔺宏伟制定写作大纲. 本书第1章初稿由董哲同撰写, 第5章第2、3节的初稿由蒋旖旎完成, 其他部分的初稿由蔺宏伟完成. 任靖雯、方炫苏、姚远、张犇对本书进行了校对. 全书由蔺宏伟修改定稿.

本书承蒙齐东旭教授作序, 并在本书的写作过程中, 得到齐东旭教授的热情指导和鼓励. 在作者的研究工作中, 得到我的导师王国瑾教授, 浙江大学数学科学学院汪国昭教授、杨勋年副教授, 以及浙江大学CAD&CG国家重点实验室石教英教授、彭群生教授、高曙明教授、鲍虎军教授、冯结青教授等老师的支持和帮助. 本书采用了国内外同行的有关研究成果. 对几何迭代法的研究获得若干国家自然科学基金项目支持(Nos. 61872316, 61379072). 本书出版得到了浙江大学CAD&CG国家重点实验室资助. 浙江大学王国瑾教授、合肥工业大学张莉教授和浙江工商大学胡倩倩教授审阅了本书. 浙江大学出版社杜希武编辑等对本书进行了细致的编辑校对. 在此, 对各位专家学者和有关机构表示衷心感谢!

作 者

2019年9月 浙大玉泉

目 录

序 iii

前 言 v

第1章 几何设计基础 1

1.1 参数曲线曲面 1

1.1.1 Bézier曲线曲面 1

1.1.2 B样条曲线曲面 10

1.1.3 NURBS曲线曲面 15

1.2 细分曲面 19

1.2.1 Catmull-Clark细分曲面 19

1.2.2 Doo-Sabin细分曲面 21

1.2.3 Loop细分曲面 23

1.3 隐式曲线曲面 25

1.3.1 代数B样条曲线曲面与曲线重建 25

1.3.2 径向基函数与隐式曲面重建 27

第2章 插值型几何迭代法 33

2.1 全正基混合曲线曲面的插值型几何迭代法 33

2.1.1 全正基混合曲线的插值型几何迭代法 34

2.1.2 全正基混合曲面的插值型几何迭代法 38

2.2 NURBS曲线曲面的插值型几何迭代法 42

2.3 三角Bernstein-Bézier曲面的插值型几何迭代法 47

2.3.1 低次非均匀参数三角B-B曲面的插值型几何迭代法 47

2.3.2 均匀参数三角B-B曲面的插值型几何迭代法 52

2.3.3 有理三角Bernstein-Bézier曲面的插值型几何迭代法 56

2.4 细分曲面的插值型几何迭代法 58

2.4.1 Catmull-Clark细分曲面的插值型几何迭代法 60

2.4.2 Doo-Sabin细分曲面的插值型几何迭代法 62

2.4.3 Loop细分曲面的插值型几何迭代法 66

2.5 收敛速度与加速方法 68

2.5.1 全正基混合曲线曲面的加权几何迭代法 69

2.5.2 NURBS曲线曲面的加权几何迭代法 74

2.5.3 三角Bernstein-Bézier曲面的加权几何迭代法 75

2.5.4 细分曲面的加权几何迭代法 78

第3章 几何迭代法的局部性质 79

3.1 全正基混合曲线几何迭代法的局部性质 79
3.2 全正基混合曲面几何迭代法的局部性质 83
3.3 NURBS曲线曲面几何迭代法的局部性质 89
3.4 细分曲面几何迭代法的局部性质 93

第4章 逼近型几何迭代法 101

4.1 扩展的渐进迭代逼近算法 101
4.1.1 混合曲线的ExPIA迭代格式及其收敛性 101
4.1.2 混合曲面的ExPIA迭代格式及其收敛性 104
4.1.3 基于ExPIA的增量式数据拟合算法 106
4.1.4 实验结果与讨论 111
4.2 最小二乘渐进迭代逼近 113
4.2.1 混合曲线的LSPIA迭代格式及其收敛性 114
4.2.2 混合曲面的LSPIA迭代格式及其收敛性 117
4.2.3 数值算例 118
4.3 奇异情况下LSPIA的收敛性 126

第5章 几何迭代法的应用 138

5.1 几何迭代法在几何设计方面的应用 138
5.1.1 基于几何迭代的降阶逼近、多项式逼近与等距曲线生成 138
5.1.2 插值给定数据点、切向量和曲率向量的几何迭代法 143
5.1.3 基于几何迭代的B样条体生成算法 150
5.2 几何迭代在逆向工程中的应用 161
5.2.1 保证拓扑正确的B样条曲面重建 161
5.2.2 基于几何迭代的对称曲面与光顺曲面重建 172
5.2.3 隐式曲线曲面重建 183
5.3 几何迭代在数据拟合领域的应用 196
5.3.1 自适应数据拟合 196
5.3.2 大规模数据拟合 207
5.4 几何迭代法在网格生成中的应用 222

参考文献 241

索 引 251

第1章　几何设计基础

几何设计主要研究在计算机图形学、计算机辅助设计与制造中使用的曲线曲面的数学表示. 本章旨在介绍参数曲线曲面设计、细分曲面设计和隐式曲线曲面设计三个主题, 为读者提供阅读本书必备的基础知识. 熟悉这些主题的读者可以跳过本章, 直接阅读本书其他章节.

§1.1　参数曲线曲面

在几何设计中, 为了交互设计的灵活性, 经常使用参数曲线曲面表示几何形状, 主要是自由曲线曲面. 自由曲线曲面设计最早源于飞机、船舶等工业产品的外形放样技术, 其理论基础由Bézier和Coons等人在20世纪60年代奠定. 20世纪70年代B样条(B-spline)技术逐渐发展, 80年代出现了有理B样条技术. 目前, 曲线曲面造型的主体技术是非均匀有理B样条(NURBS: Non-Uniform Rational B-Spline)技术.

本节将简要介绍Bézier曲线曲面、B样条曲线曲面和NURBS曲线曲面, 详细内容请参考文献[1].

§1.1.1　Bézier曲线曲面

Bézier曲线是由法国工程师de Casteljau和Pierre Bézier于20世纪50年代末、60年代初分别独立发明的. 据此, Pierre Bézier为Renault汽车公司建立了 UNISURF 自由曲线曲面设计系统[2]. 然而, Bézier给出的曲线表达式十分特殊, 并不直观. 1972年, Forrest[3]发现了Bézier曲线的Bernstein基函数和控制顶点的线性组合形式, 该方法简单直观, 用户交互友好. 下面, 首先介绍Bernstein基函数及其性质.

定义 1.1.1 记组合数$\binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}$, 称定义在$0\leqslant t\leqslant 1$上的$n+1$个多项式函数

$$B_j^n(t)=\binom{n}{j}(1-t)^{n-j}t^j,\quad j=0,1,\cdots,n, \tag{1.1}$$

为n次Bernstein基函数.

n次Bernstein基函数$B_j^n(t)$有如下重要性质:

性质 1.1.2 (1) 非负性: $B_j^n(t)\geqslant 0,\ \forall t\in[0,1]$;

(2) 权性: $\sum_{j=0}^n B_j^n(t)\equiv 1$;

(3) 对称性: $B_j^n(t)=B_j^{n-j}(1-t)$;

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_j^n(t) = n[B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)]$, 当$j = 0$时, $B_{-1}^{n-1}(t) = 0$;

(5) $B_j^n(t) = (1-t)B_j^{n-1}(t) + tB_{j-1}^{n-1}(t)$, 当$j = 0$时, $B_{-1}^{n-1}(t) = 0$;

(6) $B_j^n(t) = \frac{j+1}{n+1}B_{j+1}^{n+1}(t) + \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)B_j^{n+1}(t)$;

(7) 最值: $B_j^n(t)$在$t = j/n$时取最大值.

这些性质容易验证. 下面, 给出Bézier曲线的定义及性质.

定义 1.1.3 设$\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_n$是3维欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的点列, 关于参数$t$的空间曲线

$$\boldsymbol{P}(t) = \sum_{j=0}^{n} B_j^n(t)\boldsymbol{P}_j, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.2}$$

称为n次Bézier曲线(图1.1(a)), 其中$B_j^n(t)$是n次Bernstein基函数, 3维空间中的点

$$\boldsymbol{P}_j,\ j = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$$

称为曲线的控制顶点, 多边形$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_n$称为曲线的控制多边形或者Bézier网.

由于Bernstein基函数具有权性和非负性, 所以n次Bézier曲线是控制顶点按照Bernstein基函数的加权平均. 为了便于研究Bézier曲线的性质, 我们给出它的算子表示形式.

定义 1.1.4 若关于控制顶点$\boldsymbol{P}_j(j = 0, 1, \cdots, n)$的位移算子$E$、恒等算子$I$和向前差分算子$\Delta$分别是

$$E\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{P}_{j+1},\ I\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{P}_j,\ \Delta\boldsymbol{P}_j = (E-I)\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{P}_{j+1} - \boldsymbol{P}_j, \tag{1.3}$$

那么称曲线

$$\boldsymbol{P}(t) = [(1-t)I + tE]^n\boldsymbol{P}_0 = (I + t\Delta)^n\boldsymbol{P}_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.4}$$

为由控制顶点$\boldsymbol{P}_j(j = 0, 1, \cdots, n)$确定的$n$次Bézier曲线(如图1.1$(a)$).

容易证明, 定义1.1.3和定义1.1.4是等价的. 下面给出Bézier曲线(1.2)的一些基本几何性质.

性质 1.1.5 以$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_n$为控制多边形的Bézier曲线和以$\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{P}_{n-1}\cdots\boldsymbol{P}_0$为控制多边形的Bézier曲线相同, 但定向相反. 即Bézier曲线关于参数t和$1-t$具有对称性.

由于$B_j^n(1-t)=B_{n-j}^n(t)$, 令$s=1-t$, 代入(1.2)式, 可证明性质1.1.5成立.

性质 1.1.6 Bézier曲线具有凸包性, 即曲线位于控制顶点$\boldsymbol{P}_j$ $(j=0,1,\cdots,n)$的凸包内.

由于Bernstein基函数的权性和非负性, Bézier曲线是控制顶点的凸组合, 这证明了性质1.1.6.

性质 1.1.7 Bézier曲线具有几何不变性, 即曲线仅依赖于控制顶点, 与坐标系的位置和方向无关; Bézier曲线具有仿射不变性, 即对控制多边形进行仿射变换后生成的新曲线, 和对原曲线进行相同仿射变换后得到的曲线一致.

性质 1.1.8 设控制顶点没有重合的情况, 则n次Bézier曲线的k阶导矢曲线是以$\{\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\boldsymbol{P}_j\}_{j=0}^{n-k}$为控制顶点的$n-k$次Bézier曲线. 采用定义1.1.4的表示形式, 有

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(I+t\Delta)^n\boldsymbol{P}_0=\frac{n!}{(n-k)!}(I+t\Delta)^{n-k}\Delta^k\boldsymbol{P}_0=\frac{n!}{(n-k)!}\sum_{j=0}^{n-k}B_j^{n-k}(t)\Delta^k\boldsymbol{P}_j,\quad(1.5)$$

其中, $k=0,1,\cdots,n$.

性质 1.1.9 n次Bézier曲线两端点处的k阶导矢分别只与前后$k+1$个控制顶点有关, 即

$$\boldsymbol{P}^{(k)}(0)=\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\boldsymbol{P}_0,\quad \boldsymbol{P}^{(k)}(1)=\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\boldsymbol{P}_{n-k},\ k=0,1,\cdots,n.\quad(1.6)$$

根据性质1.1.9, 令式(1.6)中k为0和1可知, Bézier曲线在端点处与控制多边形端点重合, 端边相切.

性质 1.1.10 (升阶公式) n次Bézier曲线可以形式上看成是$n+1$次Bézier曲线, 即

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{j=0}^{n}B_j^n(t)\boldsymbol{P}_j=\sum_{j=0}^{n+1}B_j^{n+1}(t)\hat{\boldsymbol{P}}_j,\quad(1.7)$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{P}}_j=\left[\left(1-\frac{j}{n+1}\right)\boldsymbol{P}_j+\frac{j}{n+1}\boldsymbol{P}_{j-1}\right],\ \boldsymbol{P}_{-1}=\boldsymbol{P}_{n+1}=\boldsymbol{0}.\quad(1.8)$$

升阶公式可以由性质1.1.2中的(6)式直接推出.

性质 1.1.11 (变差缩减性, Variation Diminishing) 平面Bézier曲线与此平面内任一直线的交点个数, 不多于该直线与它的控制多边形的交点个数.

以上性质的证明略去, 有兴趣的读者可以阅读文献[1]第一章.

1959年前后, 法国工程师de Casteljau发现了Bézier曲线的递归求值算法, 又称为作图定理:

定理 1.1.12 (de Casteljau递归求值算法) 设$\boldsymbol{P}_j(j=0,1,\cdots,n)$是3维欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的$n+1$个点, 递归地构造

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_i^r(t)=(1-t)\boldsymbol{P}_{i-1}^{r-1}(t)+t\boldsymbol{P}_i^{r-1}(t),\ r=1,2,\cdots,n,\ i=r,r+1,\cdots,n, \\ \boldsymbol{P}_i^0(t)=\boldsymbol{P}_i^0=\boldsymbol{P}_i,\ i=0,1,\cdots,n, \end{cases} \tag{1.9}$$

则$\boldsymbol{P}_n^n(t)$是n次Bézier曲线(1.2) 上的点$\boldsymbol{P}(t)$, 且直线$\boldsymbol{P}_{n-1}^{n-1}(t)\boldsymbol{P}_n^{n-1}(t)$是Bézier曲线(1.2)在点$\boldsymbol{P}_n^n(t)$的切线(如图1.1(b)).

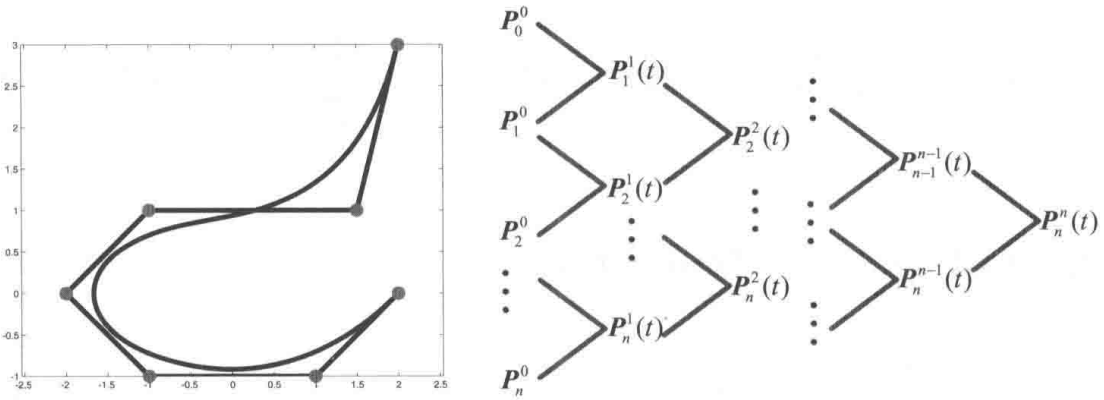


图 1.1 Bézier曲线(a)与de Casteljau算法示意图(b)

利用定义1.1.4和性质1.1.9, 可以验证

$$\boldsymbol{P}_i^r(t)=[(1-t)I+tE]\boldsymbol{P}_{i-1}^{r-1}(t)=[(1-t)I+tE]^r\boldsymbol{P}_{i-r}^0,\ i=r,r+1,\cdots,n.$$

特别地, 取$r=n$得$\boldsymbol{P}_n^n(t)=[(1-t)I+tE]^n\boldsymbol{P}_0^0=\boldsymbol{P}(t)$. 另外, 取$r=n-1$, $i=n-1,n$得

$$\boldsymbol{P}_n^{n-1}(t)-\boldsymbol{P}_{n-1}^{n-1}(t)=[(1-t)I+tE]^{n-1}\left(\boldsymbol{P}_1^0-\boldsymbol{P}_0^0\right)=(I+t\Delta)^{n-1}\Delta\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{P}'(t)/n,$$

定理1.1.12得证.

自由曲面也是几何设计研究的主要对象. 接下来, 我们分别介绍矩形域和三角域上的Bézier曲面、常用性质和算法.

定义 1.1.13 给出三维欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的$(m+1)\times(n+1)$个点$\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$，称关于$u,v$的参数曲面

$$\boldsymbol{P}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(u)B_j^n(v)\boldsymbol{P}_{ij},\quad u,v\in[0,1], \tag{1.10}$$

为矩形域$[0,1]\times[0,1]$上的$m\times n$次Bézier曲面，其中$B_i^m(u),B_j^n(v)$为Bernstein基函数，$\boldsymbol{P}_{ij}$称为控制顶点. 分别将下标i相同的点和下标j相同的点用直线段连接，得到一个网格，称作Bézier曲面控制网格，简称B网(如图1.2).

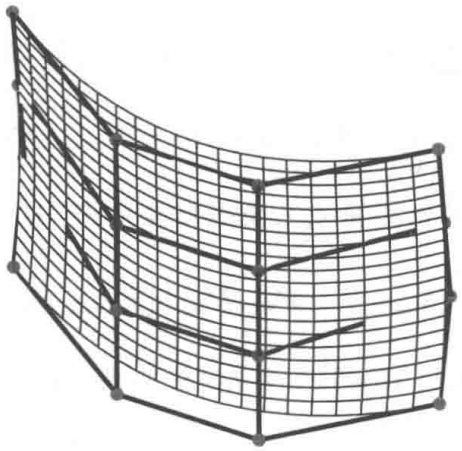


图 1.2 矩形域上的Bézier曲面及其控制网格和控制点

令$\boldsymbol{Q}_i(v)=\sum_{j=0}^{n}B_j^n(v)\boldsymbol{P}_{ij}$，易知$\boldsymbol{Q}_i(v)$表示以$\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{j=0}^{n}$为控制顶点的$n$次Bézier曲线(其中$i$固定). 再由式(1.10)知，$\boldsymbol{P}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}B_i^m(u)\boldsymbol{Q}_i(v)$. 当固定$v$时，这表明Bézier曲面可以看作是以$\boldsymbol{Q}_i(v)$为控制顶点的$m$次Bézier曲线. 当$v$从0变动到1时，就生成了Bézier曲面.

类似定义1.1.4，可以写出Bézier曲面的算子表示形式.

定义 1.1.14 设$E_1,E_2;\Delta_1,\Delta_2$分别是对于控制顶点$\boldsymbol{P}_{ij}$在$u$和$v$两个方向上的位移算子和向前差分算子：

$$E_1\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{P}_{i+1,j},\ E_2\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{P}_{i,j+1};\ \Delta_1\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{P}_{i+1,j}-\boldsymbol{P}_{ij},\ \Delta_2=\boldsymbol{P}_{i,j+1}-\boldsymbol{P}_{ij}.$$

I为恒等算子，满足$I\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{P}_{ij}$，则

$$\boldsymbol{P}(u,v)=[(1-u)I+uE_1]^m[(1-v)I+vE_2]^n\boldsymbol{P}_{00}=(I+u\Delta_1)^m(I+v\Delta_2)^n\boldsymbol{P}_{00}$$

称为由控制网格$\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$所决定的$m\times n$次Bézier曲面.

Bézier曲面与Bézier曲线具有许多相似的几何性质.

性质 1.1.15 Bézier曲面具有几何不变性和仿射不变性.

性质 1.1.16 Bézier曲面具有凸包性, 即曲面在它的B网的凸包内.

性质 1.1.17 Bézier曲面(1.10)的4条边界曲线, 是分别以它的B网的4个边界多边形作为控制多边形所决定的4条Bézier曲线, 分别为

$$\sum_{i=0}^{m} B_i^m(u)\boldsymbol{P}_{i0},\ \sum_{i=0}^{m} B_i^m(u)\boldsymbol{P}_{in},\ \sum_{j=0}^{n} B_j^n(v)\boldsymbol{P}_{0j},\ \sum_{j=0}^{n} B_j^n(v)\boldsymbol{P}_{mj}.$$

性质 1.1.18 Bézier曲面(1.10)在四个角点插值B网的四个角点, 即

$$\boldsymbol{P}(0,0)=\boldsymbol{P}_{00},\ \boldsymbol{P}(0,1)=\boldsymbol{P}_{0n},\ \boldsymbol{P}(1,0)=\boldsymbol{P}_{m0},\ \boldsymbol{P}(1,1)=\boldsymbol{P}_{mn}.$$

且四个角点的切平面是B网的四个角点三角形所在平面. 这四个角点三角形分别为

$$\triangle\boldsymbol{P}_{00}\boldsymbol{P}_{10}\boldsymbol{P}_{01},\ \triangle\boldsymbol{P}_{0n}\boldsymbol{P}_{1n}\boldsymbol{P}_{0,n-1},\ \triangle\boldsymbol{P}_{mn}\boldsymbol{P}_{m-1,n}\boldsymbol{P}_{m,n-1},\ \triangle\boldsymbol{P}_{m0}\boldsymbol{P}_{m-1,0}\boldsymbol{P}_{m1}.$$

性质 1.1.19 Bézier曲面(1.10)的$k\times l$阶导矢曲面是以

$$\left\{\frac{m!n!}{(m-k)!(n-l)!}\Delta_1^k\Delta_2^l\boldsymbol{P}_{ij}\right\}_{i=0,j=0}^{m-k,n-l}$$

为控制顶点的$(m-k)\times(n-l)$次Bézier曲面, 其中$0\leqslant k\leqslant m-1,\ 0\leqslant l\leqslant n-1$.

性质 1.1.20 Bézier曲面(1.10)的法矢曲面是$(2m-1)\times(2n-1)$次Bézier曲面$\boldsymbol{N}(u,v)$:

$$\boldsymbol{N}(u,v)=\boldsymbol{P}_u'(u,v)\times\boldsymbol{P}_v'(u,v)=mn\sum_{i=0}^{2m-1}\sum_{j=0}^{2n-1}B_i^{2m-1}(u)B_j^{2n-1}(v)\boldsymbol{N}_{ij},$$

其中

$$\boldsymbol{N}_{ij}=\sum_{k=\max(0,i-m)}^{\min(m-1,i)}\sum_{l=\max(0,j-n)}^{\min(n-1,j)}\frac{\binom{m-1}{k}\binom{m}{i-k}\binom{n-1}{l}\binom{n}{j-l}}{\binom{2m-1}{i}\binom{2n-1}{j}}(\Delta_1\boldsymbol{P}_{k,j-l}\times\Delta_2\boldsymbol{P}_{i-k,l}).$$

性质 1.1.21 (离散构造) 任意一张Bézier曲面

$$\boldsymbol{P}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m\left(\frac{u-a}{b-a}\right)B_j^n\left(\frac{v-c}{d-c}\right)\boldsymbol{P}_{ij},\quad a\leqslant u\leqslant b,\ c\leqslant v\leqslant d,$$

可在其定义域内任一点(g,h)处分割为四张Bézier子面片:

$$\boldsymbol{P}(u,v)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(\frac{u-a}{g-a})B_j^n(\frac{v-c}{h-c})\boldsymbol{P}_{ij}^{ij}, & a\leqslant u\leqslant g, c\leqslant v\leqslant h,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(\frac{u-a}{g-a})B_j^n(\frac{v-h}{d-h})\boldsymbol{P}_{in}^{i,n-j}, & a\leqslant u\leqslant g, h\leqslant v\leqslant d,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(\frac{u-g}{b-g})B_j^n(\frac{v-c}{h-c})\boldsymbol{P}_{mj}^{m-i,j}, & g\leqslant u\leqslant b, c\leqslant v\leqslant h,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(\frac{u-g}{b-g})B_j^n(\frac{v-h}{d-h})\boldsymbol{P}_{mn}^{m-i,n-j}, & g\leqslant u\leqslant b, h\leqslant v\leqslant d.\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{P}_{ij}^{r0}=\begin{cases}\boldsymbol{P}_{ij}, & r=0,\\ (I+\alpha\Delta_1)\boldsymbol{P}_{i-1,j}^{r-1,0}, & r=1,\cdots,m,\end{cases}\quad i=r,r+1,\cdots,m;\ j=0,\cdots,n;\ \alpha=\frac{g-a}{b-a},$$

$$\boldsymbol{P}_{ij}^{is}=\begin{cases}\boldsymbol{P}_{ij}^{i0}, & s=0,\\ (I+\beta\Delta_2)\boldsymbol{P}_{i,j-1}^{i,s-1}, & s=1,\cdots,n,\end{cases}\quad i=0,\cdots,m;\ j=s,s+1,\cdots,n;\ \beta=\frac{h-c}{d-c},$$

$$\boldsymbol{P}_{mj}^{m-i,s}=\begin{cases}\boldsymbol{P}_{mj}^{m-i,0}, & s=0,\\ (I+\beta\Delta_2)\boldsymbol{P}_{m,j-1}^{m-i,s-1}, & s=1,\cdots,n,\end{cases}\quad i=0,\cdots,m;\ j=s,s+1,\cdots,n;\ \beta=\frac{h-c}{d-c}.$$

与Bézier曲线类似, 可以用de Casteljau算法递归地求出Bézier曲面上的点. 设点的参数值为(u,v), 记

$$\boldsymbol{P}_{ij}^{00}(u,v)\equiv\boldsymbol{P}_{ij}^{00}=\boldsymbol{P}_{ij},$$

一个基本思想是对两个参数方向分别递归地计算, 即可先对$r=1,2,\cdots,m$递归地计算

$$\boldsymbol{P}_{ij}^{r0}(u,v)=(1-u)\boldsymbol{P}_{i-1,j}^{r-1,0}(u,v)+u\boldsymbol{P}_{ij}^{r-1,0}(u,v),\ i=r,r+1,\cdots,m,\ j=0,1,\cdots,n;$$

再对$s=1,2,\cdots,n$进行递归计算

$$\boldsymbol{P}_{mj}^{ms}(u,v)=(1-v)\boldsymbol{P}_{m,j-1}^{m,s-1}(u,v)+v\boldsymbol{P}_{mj}^{m,s-1}(u,v),\ j=s,s+1,\cdots,n,$$

按此方法计算得到的$\boldsymbol{P}_{mn}^{mn}(u,v)$就是$\boldsymbol{P}(u,v)$.

三角域上的Bernstein-Bézier曲面: 首先介绍三角形有向面积及重心坐标的概念. 三角形$\triangle ABC$的有向面积$S_{\triangle ABC}$, 当顶点A,B,C按照逆时针方向排列时, 为面积数值乘以+1; 否则, 当顶点按照顺时针排列时, 为面积数值乘以−1.

定义 1.1.22 设三角域$T = \triangle T_1T_2T_3$的顶点按逆时针方向依次记为T_1, T_2, T_3, 该三角形上有一点P, 则

$$(u, v, w) = \left(\frac{S_{\triangle PT_2T_3}}{S_{\triangle T_1T_2T_3}}, \frac{S_{\triangle T_1PT_3}}{S_{\triangle T_1T_2T_3}}, \frac{S_{\triangle T_1T_2P}}{S_{\triangle T_1T_2T_3}} \right) \tag{1.11}$$

称为点P关于三角形$\triangle T_1T_2T_3$的重心坐标, 且总有$u + v + w = 1$.

以下是三角域上Bernstein-Bézier曲面的定义.

定义 1.1.23 设3维欧氏空间$\mathbb{R}^3$中有$(n+1)(n+2)/2$个点$\boldsymbol{T}_{i,j,k}$, 整数指标i, j, k满足$i, j, k \geqslant 0$且$i + j + k = n$, 又设三角域T以及点$P = (u, v, w)$如定义1.1.22所示, 称

$$\boldsymbol{T}^n(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B^n_{i,j,k}(u, v, w)\boldsymbol{T}_{i,j,k}, \quad (u, v, w) \in T,\ u + v + w = 1, \tag{1.12}$$

为三角域T上的n次Bernstein-Bézier曲面, 简称三角B-B曲面, 其中

$$B^n_{i,j,k}(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!}u^iv^jw^k, \quad i + j + k = n,\ u, v, w \geqslant 0,\ u + v + w = 1,$$

称为n次三角Bernstein基函数, $\boldsymbol{T}_{i,j,k}$称为曲面(1.12)的控制顶点; 将三个相邻控制顶点

$$\boldsymbol{T}_{i+1,j,k}, \boldsymbol{T}_{i,j+1,k}, \boldsymbol{T}_{i,j,k+1}\ (i + j + k = n - 1)$$

两两相连形成的三角网格$\hat{\boldsymbol{T}}$称为曲面(1.12)的控制网格.

定义 1.1.24 $T, P, \boldsymbol{T}_{i,j,k}$如定义1.1.23所示, 则称与曲面(1.12)等价的曲面

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^n(u, v) &= \sum_{i+j=0}^{n} B^n_{i,j,n-i-j}(u, v, 1 - u - v)\boldsymbol{T}_{i,j,n-i-j} \equiv \sum_{i+j=0}^{n} B^n_{ij}(u, v)\boldsymbol{T}_{ij}, \\ &(u, v) \in D,\ u, v \geqslant 0,\ u + v \leqslant 1, \end{aligned} \tag{1.13}$$

为三角域$D : \{(u, v)|u, v \geqslant 0, u + v \leqslant 1\}$上的$n$次B-B曲面.

下面, 我们给出三角域上B-B曲面的算子表示.

定义 1.1.25 设作用于控制顶点$\boldsymbol{T}_{i,j,k}$下标的位移算子E_1, E_2, E_3为

$$E_1\boldsymbol{T}_{i,j,k} = \boldsymbol{T}_{i+1,j,k},\ E_2\boldsymbol{T}_{i,j,k} = \boldsymbol{T}_{i,j+1,k},\ E_3\boldsymbol{T}_{i,j,k} = \boldsymbol{T}_{i,j,k+1},$$

则曲面

$$\boldsymbol{T}^n(u, v, w) = (uE_1 + vE_2 + wE_3)^n\boldsymbol{T}_{000},\ (u, v, w) \in T, u, v, w \geqslant 0, u + v + w = 1,$$

称为定义在三角域T上的n次B-B曲面. 另外, 设算子$E_1, E_2, \Delta_1, \Delta_2, I$如定义1.1.14所示, 则曲面

$$\boldsymbol{T}^n(u,v) = [(1-u-v)I + uE_1 + vE_2]^n \boldsymbol{T}_{00} = (I + u\Delta_1 + v\Delta_2)^n \boldsymbol{T}_{00},$$

其中, $(u,v) \in D, u, v \geqslant 0, u+v \leqslant 1$, 称为三角域$D$上的$n$次B-B曲面.

与矩形域上Bézier曲面类似, 三角域上的B-B曲面也具有几何不变性、角点位置、角点切平面和边界曲线等性质. 另外, 三角域上的B-B曲面还具有以下性质:

性质 1.1.26 (凸包性) 曲面(1.12)在其控制网格形成的凸包内.

性质 1.1.27 (升阶公式) 曲面(1.12)可以表示为

$$\boldsymbol{T}^n(u,v,w) = \sum_{i+j+k=n+1} B_{i,j,k}^{n+1}(u,v,w)\hat{\boldsymbol{T}}_{i,j,k}, \ (u,v,w) \in T, u, v, w \geqslant 0, u+v+w = 1,$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{T}}_{i,j,k} = \frac{i}{n+1}\boldsymbol{T}_{i-1,j,k} + \frac{j}{n+1}\boldsymbol{T}_{i,j-1,k} + \frac{k}{n+1}\boldsymbol{T}_{i,j,k-1}, \ i+j+k = n+1.$$

性质 1.1.28 (离散构造) 设点$H_i = (u_i, v_i, w_i) \in T, \ i = 1, 2, 3$, 则曲面(1.12)上对应于三角形$\triangle H_1H_2H_3 \subseteq T$部分的子三角面片, 可以表示为三角形$\triangle H_1H_2H_3$上的B-B曲面

$$\boldsymbol{T}^n(u^*,v^*,w^*) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^{n}(u^*,v^*,w^*)\boldsymbol{T}_{i,j,k}^*, \ (u^*,v^*,w^*) \in \triangle H_1H_2H_3,$$

其中

$$\boldsymbol{T}_{i,j,k}^* = (u_1E_1 + v_1E_2 + w_1E_3)^i (u_2E_1 + v_2E_2 + w_2E_3)^j (u_3E_1 + v_3E_2 + w_3E_3)^k \boldsymbol{T}_{000},$$

且$i+j+k = n$.

最后, 给出对三角B-B曲面(1.12)上某一定点的de Casteljau递归求值法: 分别对$r = 1, 2, \cdots, n$进行递归计算

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}_{i,j,k}^r(u,v,w) = u\boldsymbol{T}_{i+1,j,k}^{r-1}(u,v,w) + v\boldsymbol{T}_{i,j+1,k}^{r-1}(u,v,w) + w\boldsymbol{T}_{i,j,k+1}^{r-1}(u,v,w), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i+j+k = n-r \\ \boldsymbol{T}_{i,j,k}^0(u,v,w) \equiv \boldsymbol{T}_{i,j,k}^0 = \boldsymbol{T}_{i,j,k}, \ i+j+k = n, \end{cases}$$

按递归算法得到的曲面$\boldsymbol{T}_{000}^n(u,v,w)$就是曲面(1.12)上的点.

三角域上B-B曲面的正性和凸性条件较复杂, 有兴趣的读者可参阅文献[1].