前言

PREFACE

本书是我和教学团队对考研数学题源研究的最新成果，供 2022 考研的考生在复习全过程中使用。

为了突出考研数学新大纲与新的命题趋势，更好地指导即将进入大众化考研的考研群体，这次再版，本书做了大幅修订。一是增加优秀的客观题的数量，反映新大纲的要求；二是进一步优化习题，反映新的命题要求；三是将习题分成两大部分，结合已经出版的《张宇考研数学基础 30 讲——基础 300 题》（配套《张宇考研数学基础 30 讲》），可在复习的不同阶段使用，具体说明如下。

《张宇考研数学基础 30 讲——基础 300 题》可以看作基础题。所谓基础题，主要包含如下涵义：一是考查基本的概念、公式和定理的题目；二是题型常规且计算量不大的题目。这类题目主要用来热身并巩固所学的基础知识，属于基础知识的再现，难度不大，区分度也不高，属于送分题，在考研中所占分量约五分之一，一般来说，除非粗心大意，考生不会在这类题目上丢分。考生在基础阶段应该完成这些题目，为强化阶段的复习打下基础。

本书每一章的第一部分，强化训练，可以看作中等难度题。所谓中等难度题，主要包含如下涵义：一是考查比较复杂的概念、公式和定理的题目；二是题型常规但计算量较大的题目；三是基本的应用题目，包括几何应用和专业应用。这类题目主要用来深刻考查考生对所学知识的理解和运用，区分度较高，难度中等及中等偏上，在考研中所占分量约五分之三，是考研数学试卷上的重头戏，这类题目会决定考生考研数学成绩，甚至考研成败。考生在强化复习阶段要认真操练这类题目，努力提高自己的考研数学水平。

本书每一章的第二部分，巩固提高，可以看作难题。所谓难题，主要包含如下涵义：一是考查冷僻的概念、公式和定理的题目，虽然这类题目综合性不强，计算量也不大，但是冷僻，所谓冷僻，既包括考研知识中几乎不考的边角料知识，也包括考查频率很低（多年不考）的常规知识，会给考生造成措手不及的感觉，极易丢分；二是计算量大的题目，考研数学题大部分是要通过计算才能得出结果的，计算量大的题目，对于平时复习时眼高手低，不注重提高计算能力的考生，着实是一种难题；三是题型新颖的综合性题目，近几年的考研中，尤其从 2019 年开始，为了体现公平公正，反对社会上押题猜宝的不良风气，树立正确的复习备考观，命题单位加大了对从未考查过的新颖命题的设计和考查力度，这类题目命题手法高超、风格独特、行云流水、令人拍案。难题在考研中所占分量约五分之一，而且有加大分量的趋势，这类问题不再只是所谓尖子生的专用考题，对于即将进入大众化考研的庞大考研群体来说，这类题目做得好不好，也是至关重要的。考生在强化阶段和冲刺阶段，除了要完成

历年真题的训练之外，还要多做既好又新的题目，这样才能应对考研的激烈竞争，稳操胜券。

感谢命题专家们给予的指导和帮助，感谢历届考生对本书的厚爱和建议，感谢编辑老师们的辛勤工作。希望考生认真研读、操练本书中的每一道题目，提高解题能力，争取考研得到高分。

张宇

2020 年 12 月　于北京

目　录

CONTENTS

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇 微积分

微积分是硕士研究生招生考试考查内容之一，主要考查考生对微积分的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决实际问题的能力。在考研数学三试卷中分值约86分。

第 1 章　函数极限与连续

强化训练

1. 在下列区间内函数 $f(x)=\dfrac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是（　　）.

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

2. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{x^a\ln(1+x)}=b\neq 0$，则（　　）.

(A)$a=-\dfrac{2}{3},b=-1$　　(B)$a=\dfrac{2}{3},b=1$

(C)$a=-1,b=-\dfrac{2}{3}$　　(D)$a=1,b=\dfrac{2}{3}$

3. 设当 $x\to 0^+$ 时，$\ln(1+x^2)\sin^2 x$ 是比 $x^k(\sqrt{1+x^2}-1)$ 高阶的无穷小，而 $x^k(\sqrt{1+x^2}-1)$ 是比 $(1-\cos\sqrt{x})\arctan x$ 高阶的无穷小，则 k 的取值范围是（　　）.

(A)$(0,4)$　　(B)$(0,2)$　　(C)$(2,4)$　　(D)$(2,+\infty)$

4. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$ 是无穷小量 x^k 的同阶无穷小，则 $k=$（　　）.

(A)1　　(B)2　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $\dfrac{3}{2}$

5. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中，最高阶的无穷小是（　　）.

(A)$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$　　(B)$1-\cos x$

(C)$\tan x-\sin x$　　(D)$e^x+e^{-x}-2$

6. 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中，与 x 同阶的无穷小是（　　）.

(A)$\sqrt{1+x}-1$　　(B)$\ln(1+x)-x$　　(C)$\cos(\sin x)-1$　　(D)x^x-1

7. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin x+\int_0^x t^2e^{t^2}\,dt$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k=$（　　）.

(A)3　　(B)4　　(C)5　　(D)6

8. 当 $x\to\left(\dfrac{1}{2}\right)^+$ 时，$\pi-4\arccos\sqrt{2}x$ 与 $a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^b$ 为等价无穷小，则（　　）.

(A)$a=4,b=2$　　(B)$a=-4,b=2$　　(C)$a=8,b=1$　　(D)$a=-8,b=1$

9. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=ax^3+bx$ 与 $g(x)=\int_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)\,dt$ 是等价无穷小，则（　　）.

(A)$a=\dfrac{1}{3},b=1$　　(B)$a=3,b=0$　　(C)$a=\dfrac{1}{3},b=0$　　(D)$a=1,b=0$

10. 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=1$，且当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x-\tan x} f(t)\mathrm{d}t$ 与 $(1+\sin^a x)^b-1$ 为等价无穷小，则(　　).

(A)$a=3,b=\frac{1}{3}$　　(B)$a=3,b=-\frac{1}{3}$

(C)$a=1,b=\frac{1}{3}$　　(D)$a=1,b=-\frac{1}{3}$

11. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)$ 是 x 的 n 阶无穷小，则正整数 n 为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

12. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{f(x)}{x^3}+\frac{\sin x^3}{x^4}\right]=5$，则 $f(x)$ 是 x 的(　　).

(A) 等价无穷小量　　(B) 同阶但不等价的无穷小量

(C) 高阶无穷小量　　(D) 低阶无穷小量

13. 设 $f(x)$ 连续，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=1$，又设

$$g(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t,\ h(x)=\int_0^{\sin x}\frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}-1}\mathrm{d}t,$$

则当 $x\to 0$ 时，$g(x)$ 是 $h(x)$ 的(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但不等价的无穷小　　(D) 等价无穷小

14. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x}{1+x^{2n}}$，则 $f(x)$(　　).

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

15. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $g[f(x)]$ 的(　　).

(A) 连续点　　(B) 可去间断点　　(C) 跳跃间断点　　(D) 第二类间断点

16. 设 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^a)\cdot\sin x}{x^2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $a>0$，则(　　).

(A)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

(B)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

(D)$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

17. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $f(2)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[3-f\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)\right]=$ ________.

18. 当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+2x^3)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $\mathrm{e}^{x\tan^2 x}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 $n=$ ________.

19. 当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{1+\tan\sqrt{x}}-\sqrt{1+\sin\sqrt{x}}$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k=$ ________.

20. 设 $f(x-2)=x^2+2x+1$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=$ ________.

21. 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\cos x\cos 2x$ 与 cx^k 为等价无穷小，则 $c=$ ________，$k=$ ________.

22. 当 $x\to\pi$ 时，若有 $\sqrt[4]{\sin\dfrac{x}{2}}-1\sim A(x-\pi)^k$，则 $A=$ ________，$k=$ ________.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\sin x}^{x}\sqrt{3+t^2}\,\mathrm{d}t}{x(\mathrm{e}^{x^2}-1)}=$ ________.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2}{x}=$ ________.

25. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-4x^2\sin x}-1}{x\ln(1+2x^2)}=$ ________.

26. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b.

27. 设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

28. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2+7}+\dfrac{\sin^4 x}{\sqrt{x}}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^3)}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2)$，$a>0$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\ln\left(\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right)}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x}$；

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$，$a\neq 0$；

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}$；

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0$，且 $a_i\neq 1$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant 2$；

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x^4}+\cos 4x-2}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}$；

(19) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\tan x)^x}{x(\sqrt{1+3\sin^2 x}-1)}$.

29. 当 $x\to 0$ 时，$\sin x(\cos x-4)+3x$ 为 x 的几阶无穷小？

30. 当 $x\to 0^+$ 时，确定下列无穷小量的阶数：

(1) $\tan(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$；

(2) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$；

(3) $3^{\sqrt{x}}-1$.

31. 确定函数 $f(x)=\dfrac{2x(x-1)}{|x|x^2-|x|}$ 的间断点，并判定其类型.

32. 设 $a>0,b>0,c>0$，且

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ c, & x=0.\end{cases}$$

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性；

(2) 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$f(-1)$，$f(1)$ 五者之间的大小关系.

33. 求 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续区间、间断点，并判别间断点的类型.

34. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的间断点，并指出其类型.

35. 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, & x\leqslant 0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$ 的间断点，并判断它们的类型.

36. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2+e^{nx}}$，求 $f(x)$ 的间断点，并判定其类型.

37. 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数，求 a,b 的值.

巩固提高

1. 设 $\alpha=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\beta=\dfrac{x}{\ln(1+3\sqrt{x})}$，$\gamma=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\int_0^x(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}$，则当 $x\to 0^+$ 时，这 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排列次序是(　　).

(A) α,β,γ　　(B) γ,β,α　　(C) β,γ,α　　(D) β,α,γ

2. 设 $\alpha(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\dfrac{\ln(1+t)}{1+t^4}\mathrm{d}t$，$\beta(x)=\int_0^{\tan x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0^+$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的(　　).

(A) 等价无穷小　　(B) 同阶但非等价的无穷小

(C) 低阶无穷小　　(D) 高阶无穷小

3. 若 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\lambda-e^{-kx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则(　　).

(A) $\lambda<0,k<0$　　(B) $\lambda<0,k>0$　　(C) $\lambda\geqslant 0,k<0$　　(D) $\lambda\leqslant 0,k>0$

4. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$，则 $f(x)$(　　).

(A) 处处连续

(B) 只有第一类间断点

(C) 只有第二类间断点

(D) 既有第一类间断点，又有第二类间断点

5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+3}}{\sqrt{3^{2n}+x^{2n}}}(-\infty<x<+\infty)$,则 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上(　　).

(A) 连续

(B) 有一个可去间断点

(C) 有一个跳跃间断点

(D) 有一个第二类间断点

6. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{1}{n^x}(0<x<+\infty)$,则 $f(x)$ 在其间断点处的值等于________.

7. 记 $f(x)=27x^3+5x^2-2$ 的反函数为 f^{-1},求极限:$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(27x)-f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

8. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\displaystyle\int_0^x\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2}\int_0^x(\sqrt{t+1}-1)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-xe^{\frac{1}{x}})$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{\frac{x^2}{2}})\sin\frac{x^2}{2}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{(\sqrt[3]{1+x^3}-1)\sin x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$;

(9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

9. 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$,证明:存在常数 A,B,使得当 $x\to0^+$ 时,恒有

$$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2),$$

并求常数 A,B.

10. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x-x}, & x<0,\\[2ex] \dfrac{e^{-x}+\frac{1}{2}x^2+x-1}{x\sin\frac{x}{6}}, & x>0,\end{cases}\quad g(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}},$$

求 $\lim\limits_{x\to0}f[g(x)]$.

11. 设 $\alpha\geqslant5$ 且为常数,则 k 为何值时极限

$$I=\lim_{x\to+\infty}[(x^\alpha+8x^4+2)^k-x]$$

存在,并求此极限值.

12. 已知极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}+\dfrac{c}{x^5}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=1$,求常数 a,b,c.

13. 设 $x\geqslant0$ 时,$f(x)$ 满足 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$,且 $f(0)=1$,证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

14. 设 $f(x;t)=\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$ $((x-1)(t-1)>0,x\neq t)$，函数 $f(x)$ 由表达式

$$f(x)=\lim_{t\to x}f(x;t)$$

确定，求 $f(x)$ 的连续区间和间断点，并判定间断点的类型.

15. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}$ $(x\geqslant 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式；

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

第2章 数列极限

强化训练

1. 已知数列$\{x_n\}$满足$x_{n+2}-\frac{4}{3}x_{n+1}+\frac{1}{3}x_n=0,n=1,2,3,\cdots$，且$x_1=1,x_2=2$，则$\{x_n\}$收敛于(　　).

(A)1　　(B)-1　　(C)$\frac{5}{2}$　　(D)$-\frac{5}{2}$

2. 设$x>0$且$x\neq 1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n-1]{x}-\sqrt[n]{x})=$________.

3. 设$x_1=1,x_{n+1}=\frac{x_n+3}{x_n+1}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

巩固提高

1. 已知$f(x),g(x)$为有界闭区域$[a,b]$上的连续函数，且$f(x_n)=g(x_{n+1})$，其中$\{x_n\}$收敛且$x_n\in[a,b],n=1,2,\cdots$，则(　　).

(A)$\forall x\in[a,b]$，均有$f(x)>g(x)$　　(B)$\forall x\in[a,b]$，均有$f(x)<g(x)$

(C)$\exists x_0\in[a,b]$，使得$f(x_0)=g(x_0)$　　(D)$f(a)=g(a)$且$f(b)=g(b)$

2. 记$a_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx,n=0,1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}=$________.

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\frac{1}{2}\right]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$.

4. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right),a>0$.

5. 设当$a\leqslant x\leqslant b$时，$a\leqslant f(x)\leqslant b$，并设存在常数$k,0\leqslant k<1$，对于$[a,b]$上的任意两点$x_1$与$x_2$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$. 证明：

(1) 存在唯一的$\xi\in[a,b]$使$f(\xi)=\xi$；

(2) 对于任意给定的$x_1\in[a,b]$，定义$x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

6. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，满足$0\leqslant f(x)\leqslant x,x\in[0,+\infty)$，设$a_1\geqslant 0,a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列；

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = t$，则有 $f(t) = t$；

(3) 若条件改为 $0 \leqslant f(x) < x, x \in (0, +\infty)$，则(2) 中的 $t = 0$.

7. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < 1, \ln(1 + x_n) = e^{x_{n+1}} - 1 (n = 1, 2, \cdots)$. 证明：

(1) 当 $0 < x < 1$ 时，$\ln(1 + x) < x < e^x - 1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限.

8. 设 $F(x, y) = \dfrac{f(y - x)}{2x}, F(1, y) = \dfrac{y^2}{2} - y + 5, x_0 > 0, x_1 = F(x_0, 2x_0), \cdots, x_{n+1} = F(x_n, 2x_n)$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限.

第 3 章　一元函数微分学的概念

强化训练

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-e^{-x}+x}{\arctan x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}(\ln^2 2+1)$　　(B) 可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}(\ln^2 2-1)$

(C) 不可导　　(D) 是否可导与 a 的取值有关

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 为有界函数，则在 $x=0$ 处，$f(x)$(　　).

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

3. 设 $f(x)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dy$，$0\leqslant x\leqslant 1$，则 $f'_+(0)=$(　　).

(A) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　(C) $-\pi$　　(D) π

4. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 内的奇函数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为(　　).

(A) a　　(B) $-a$　　(C) 0　　(D) 不存在

5. 设函数 $f(x)$ 可导，$y=f(x^3)$. 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.3，则 $f'(-1)=$(　　).

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 1　　(D) 0.3

6. 设 $f(x)$ 可导，$f(0)=f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)e^x-1}{f(x)\cos x-1}=$ ________.

7. 已知 $f'(2)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(2-2x)-f(2-x)}=$ ________.

8. 若 $f(x)=e^{10x}x(x+1)(x+2)\cdots(x+10)$，则 $f'(0)=$ ________.

9. 若 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x^2), & x\leqslant 0,\\ a\sin x+2x, & x>0\end{cases}$ 是可导函数，则 $a=$ ________.