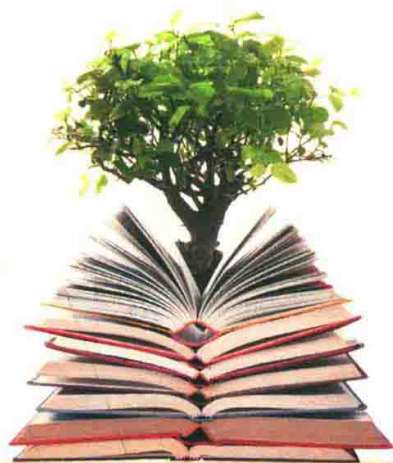


小学生数学学习 典型问题与教学改进

宋秋前 苏明杰 主编



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

小学生数学学习 典型问题与教学改进

宋秋前 苏明杰 主编



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书基于学习病理学和教学病理学的视角,分为“数与代数”“图形与几何”“问题解决”三个模块,系统阐述了小学生数学学习中的典型问题与教学改进策略。对每个典型问题的分析,都从“典型问题”“原因分析”和“教学改进”三方面进行阐述,并在文末列出“延伸阅读链接”,以便读者进一步系统和深入学习。本书是浙江省“‘十三五’师范教育创新工程”建设项目“层式联动·协同创新·特色发展——卓越教师培养模式研究与实践探索”的研究成果。

图书在版编目(CIP)数据

小学生数学学习典型问题与教学改进 / 宋秋前, 苏明杰主编. -- 上海: 上海交通大学出版社, 2021

ISBN 978-7-313-23867-2

I. ①小… II. ①宋… ②苏… III. ①小学数学课—课堂教学—教学研究 IV. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020) 第 195373 号

小学生数学学习典型问题与教学改进

XIAOXUESHENG SHUXUE XUEXI DIANXING WENTI YU JIAOXUE GAIJIN

主 编: 宋秋前 苏明杰

出版发行: 上海交通大学出版社

地 址: 上海市番禺路 951 号

邮政编码: 200030

电 话: 021-64071208

印 制: 广东虎彩云印刷有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 710mm × 1000mm 1/16

印 张: 22

字 数: 265 千字

版 次: 2021 年 1 月第 1 版

印 次: 2021 年 1 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-313-23867-2

定 价: 178.00 元

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 0769-85252189

前 言

教学是教师的教与学生的学的和谐统一。但是，对于课堂教学的改进，长期以来，人们关注的重点往往是教师的教，而不是学生的学，研究教的多，研究学的少。为了教学的整体优化和学生的学习进步，必须从教学整体观出发，在重视对教师教学研究的同时，做好对学生学习的研究。

著名心理学家奥苏伯尔在其代表作《教育心理学——认知观点》的扉页上写道：“假如让我把全部教育心理学仅仅归结为一条原理的话，那么，我将一言以蔽之曰：影响学习的唯一最重要的因素，就是学习者已经知道了什么。要探明这一点，并应据此进行教学。”奥苏伯尔的这一教育名言告诉我们，改进教学的关键是要弄清学生“已经知道了什么”，并“据此进行教学”。

根据奥苏伯尔的观点，研究学生学习的关键是要弄清学生“已经知道了什么”。这不仅是指要弄清学生已经学过什么内容，掌握到何种程度及知识的认知结构如何，还应包括对学生学习过程和结果中表现出的问题与错误原因的分析研究——病理的探索，对错误现象、行为、结果进行透视、探析，研究学习时所表现出的心理变化、行为表现，以及学生在获取知识过程所表现出来的学习心理、思维表现、学习习惯、学习态度、学习意志等。只有弄清了这些问题，才能加强教学的针对性，做到“据此进行教学”。

就小学数学来说，对小学生数学学习的典型问题进行归纳、总结和分析，并针对性地提出教学改进的策略和方法，不仅有助于在职教师弄清学生“已经知道了什么”和如何“据此进行教学”，而且对师范相关专业学生了解小学生数学学习中的典型问题、错误原因和解决方法，积累教学经验和问题解决策略，提高教学实习和入职起始阶段课堂教学的质量，都具有特别重要的价值和意义。

基于以上思考，近年来，在浙江海洋大学、舟山市教育局和舟山绿城育华国际学校领导的关心支持下，舟山市苏明杰名师工作室与浙江海洋大学师范学院紧密协作，从学习病理学、教学病理学的视角，积极开展“小学生数学学习典型问题与教学改进”的课题研究，取得了显著的成效。

本书共三编。第一编为“数与代数”，分有“乘法分配律和结合律混淆的典型问题与教学改进”等 21 篇；第二编为“图形与几何”，分有“画三角形高线的典型问题与教学改进”等 8 篇；第三编为“问题解决”，分有“解决‘照这样计算’问题的典型问题与教学改进”等 31 篇。

在本书的构思和编写过程中，我们力图体现以下特点：

第一，导向性。教育要着眼未来，着眼学生核心素养的形成。本书的每篇文章都是站在学生的立场，聚焦学生实际获得感的教育教学研究成果。从目标达成上，指向的是核心素养；从方式方法上，构建的是学本课堂。这对当前小学数学教学具有一定的导向作用。

第二，科学性。教育要遵循规律，遵循学科发展和学生成长的客观规律。教育的专业性就体现在科学性上。小学阶段的儿童正值数学能力发展的重要时期，加强教学的科学性格外重要。为此，本书阐述的相关内容，都以当代先进教学理论和实践经验为基础，力图彰显小学数学学科教学的基本规律。



第三，实用性。经过实践论证的研究才是真正富有成效的研究。本书的每一篇文章都能基于学情从“典型问题”“原因分析”“教学改进”等三方面进行阐述，读者可以通过一则则案例呈现，引发对小学数学“数与代数”“图形与几何”“问题解决”等核心知识内容的思考，并由此应用于教学实践，真正实施“从学生中来，又回到学生中去”的研究。每篇文章后面都列有“延伸阅读链接”，便于读者进一步系统与深入地学习。

衷心希望本书能带给小学数学教学同仁多样化、深层次和成长性的启发，引导广大教师转变教学观念，改进教学方法，促进自身专业成长。

本书是浙江省“‘十三五’师范教育创新工程”建设项目“层式联动·协同创新·特色发展——卓越教师培养模式研究与实践探索”的研究成果，在编写和出版过程中，得到了浙江海洋大学谢永和副校长、教务处王健鑫处长、舟山绿城育华国际学校领导和同仁的大力支持和帮助。在此，本书全体编写者向他们表示衷心的感谢。

本书在编写过程中，参阅和引用了大量相关的研究成果，在此谨向有关作者表示诚挚的谢意。

尽管在编写过程中，我们一直本着严谨和科学的态度不断修改和矫正，但由于水平所限，书中存在的纰漏和谬误，恳请各位专家和教师不吝赐教。

宋秋前 苏明杰

2020.4

目 录

第一编 数与代数

乘法分配律和结合律混淆的典型问题与教学改进（一）·····	3
乘法分配律和结合律混淆的典型问题与教学改进（二）·····	9
乘法意义理解中“几个几”相加掌握不清的典型问题与教学改进···	16
乘法分配律简算学习中的典型问题与教学改进（一）·····	22
乘法分配律简算学习中的典型问题与教学改进（二）·····	31
除法竖式掌握的典型问题与教学改进·····	35
除法意义理解中的典型问题与教学改进·····	45
分数加减混合运算中典型数字陷阱错误问题与教学改进·····	51
分数量、率混淆的典型问题与教学改进（一）·····	56
分数量、率混淆的典型问题与教学改进（二）·····	64
分数量、率混淆的典型问题与教学改进（三）·····	69
除法中，总数、每份数、份数理解的典型问题与教学改进·····	74

几颗算珠能表示哪些数的典型问题与教学改进·····	79
计算数的个数的典型问题与教学改进·····	83
加减法算式中等式填空的典型问题与教学改进·····	89
类似 $A \times \left(\frac{C}{A} + \frac{D}{B} \right) \times B$ 分数乘法简算的典型问题与教学改进·····	93
求解未知数是减数、除数方程的典型问题与教学改进（一）·····	103
求解未知数是减数、除数方程的典型问题与教学改进（二）·····	109
数字陷阱导致误用运算定律简算的典型问题与教学改进·····	115
小学生计算能力下降的典型问题与教学改进·····	121
有余数除法竖式计算中的典型问题与教学改进·····	129

第二编 图形与几何

画三角形高线的典型问题与教学改进·····	137
求解环形面积的典型问题与教学改进·····	142
求解实际容纳物体个数的典型问题与教学改进·····	147
生活与图纸间方位转换对应的典型问题与教学改进·····	152
根据液面变化求解体积的典型问题与教学改进·····	156
学画三角形高的典型问题与教学改进·····	162
圆柱和圆锥等积变形学习的典型问题与教学改进（一）·····	171
圆柱和圆锥等积变形学习的典型问题与教学改进（二）·····	175

第三编 问题解决

解决“照这样计算”问题的典型问题与教学改进·····	181
24 时计时法中经过时间计算的典型问题与教学改进 ·····	189
等量关系与比例关系转化的典型问题与教学改进·····	194
低年级解决问题算式规范的典型问题与教学改进·····	199
解决分数除法问题的典型问题与教学改进·····	203
解决分数数据干扰归一问题的典型问题与教学改进·····	206
和倍、差倍问题变式的典型问题与教学改进·····	211
计算经过天数的典型问题与教学改进·····	216
解决瓷砖铺地的典型问题与教学改进（一）·····	220
解决瓷砖铺地的典型问题与教学改进（二）·····	224
求比另一个数多（少）百分之几的典型问题与教学改进·····	229
求解分配比与对应分配量的典型问题与教学改进·····	233
求解稍复杂“鸡兔同笼”的典型问题与教学改进·····	238
求解“是几分之几”和“占几分之几”的典型问题与教学改进·····	243
求解榨油问题的典型问题与教学改进·····	246
求经过几时几分的典型问题与教学改进·····	251
实际问题中估算策略选用的典型问题与教学改进（一）·····	260
实际问题中估算策略选用的典型问题与教学改进（二）·····	265
税率应用的典型问题与教学改进·····	269

加减法估算应用的典型问题与教学改进·····	273
解决问题中多信息正确提取的典型问题与教学改进（一）·····	279
解决问题中多信息正确提取的典型问题与教学改进（二）·····	283
解决问题中多信息正确提取的典型问题与教学改进（三）·····	288
解决问题中正确使用估算方法的典型问题与教学改进·····	292
解决相差关系问题学习中的典型问题与教学改进（一）·····	296
解决相差关系问题学习中的典型问题与教学改进（二）·····	303
解决相差关系问题学习中的典型问题与教学改进（三）·····	313
学生学习“时间周期”的典型问题与教学改进·····	318
用比例解应用题的典型问题与教学改进·····	322
有序思考在解题运用中的典型问题与教学改进·····	328
解决有余数除法统筹问题的典型问题与教学改进·····	333

第一编

数与代数



乘法分配律和结合律 混淆的典型问题与教学改进（一）

一、典型问题

在人教版小学四年级下册第三单元“运算定律”“乘法运算定律”的教学中，我们发现，学生在只学习乘法结合律时掌握、运用得还不错，而学完后面的乘法分配律后，部分学生连乘法结合律也不会运用了，全部混淆在一起，以致教到最后只能逼着学生死记硬背。但由于乘法分配律的变式实在太多，在不理解算理的基础上硬背也是徒劳无功，部分学生还是屡屡出错。如下面这样的题型是学生经常出错的：

$$\begin{array}{lll} 55 \times (8 + 10) & 48 \times 125 & 125 \times 12 \times 25 \\ = 55 \times 8 + 10 & = (6 \times 8) \times 125 & = 125 \times (8 + 4) \times 25 \\ & = (6 \times 125) \times (8 \times 125) & = 125 \times 8 + 4 \times 25 \end{array}$$

运算法则是数学四则运算的支柱之一，其主要作用是确定运算顺序，实现对四则运算算式的解构，保证算得“对”；而运算定律是四则运算法则的重要补充，其主要作用是通过改变运算顺序对四则运算算式进行重构，实现算得“快”。乘法分配律和乘法结合律是小学数学教学中重要的运算定律，尤其是乘法分配律，它基于乘法意义，让“两个数

分别乘一个相同的数再相加”与“这两个数先相加再乘那个数”实现互通。这个定律表面上是两种算式形式的互通,但实质是乘法意义的互通。掌握乘法分配律不仅需要知道算式可以进行形式的变换,更需要感知变换的意义是使计算方便。

二、原因分析

为什么学习乘法结合律时学生不容易出错,似乎掌握得很好,但学完乘法分配律后连乘法结合律都不会运用了?其实这两个运算定律的一部分形式在视觉上的直观印象非常像, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$,很多学生做题时就是凭着感觉走的,如上述三道题的错误都是学生把乘法分配律和乘法结合律混淆应用。究其原因,我觉得主要有以下几点:

1. 对乘法分配律的理解不够到位

学生的学习止于形式,没有真正理解运算。初学时,学生往往注重等式两边的外形特点,而没有从乘法意义的角度去理解。对于计算规律的建模,固然需要感觉,但更需要理性思考。因为规律反映事物的本质,感觉只指向表面现象,而理性才触及本质。

2. 缺乏针对性、对比性的练习

运用乘法分配律进行简便计算的变式很多,再受到前面乘法结合律的影响,学生招架不住。计算教学中平时的练习多数都是量的堆积,而学生往往反复在错同一类的题。教师需要根据学生作业反馈的情况,设计针对性、对比性的练习才能减少同类错误的发生。

3. 受到干扰数据的诱惑

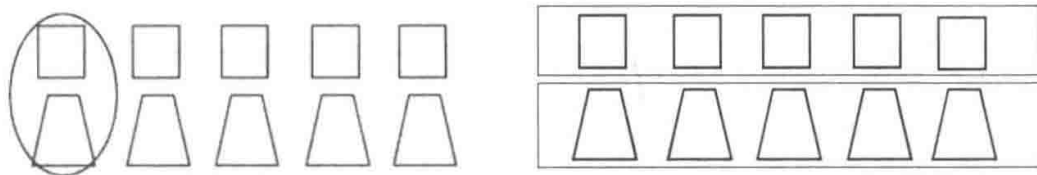
类似于错例中的 $125 \times 12 \times 25$, 学生看到 125 和 25 自然想到 8 和 4, 并且儿童往往对简单事物有一种优先选择趋向, 这样学生的思维从一开始就带有明显的选择性, 使其首先关注感兴趣的部分, 忽视了对运算对象的整体把握, 自然想到把 12 变成 $8 + 4$, 导致出现 $125 \times (8 + 4) \times 25 = 125 \times 8 + 4 \times 25$ 的错误。

三、教学改进

1. 数形结合, 强化学生对乘法分配律的理解

课程标准十分强调数学联系实际生活, 关注数学的现实背景, 体现数学回归生活。教师在课堂教学中要积极寻找与生活实际接近的教学内容, 提供数学知识的现实背景, 从而唤醒学生有关数学的生活经验, 使学生发现生活中的数学, 加深对数学知识的理解和掌握。对于乘法分配律的教学来说, 就是使学生能依靠生活模型, 自主构建运算定律。

教材中通过例题“一共有 25 个小组, 每组 4 人负责挖坑种树, 2 人负责抬水浇树, 一共有多少名同学参加了植树活动?”的实际问题引出乘法分配律。教学时我改成:“上衣每件 65 元, 裤子每条 45 元。要买 5 套衣服, 一共要付多少元?”信息更加简单, 便于学生理解。接下来请学生用画图的方式表示自己的解题思路, 并列算式。



通过画图，让学生更加直观地看到两种方法的不同之处，以及最后的殊途同归。最后两个算式的结果是一样的，都是算出5套衣服的总价，说明只是算法不同，从而建立乘法分配律的模型。

2. 充分进行变式训练，感受乘法分配律模型的丰富性

教学中，我们对运算定律的教学与学习多数是与简便运算结合在一起，导致很多学生形成学习运算定律就是为了简便计算的意识。其实简便计算只是运算定律学习的副产品中的一种，我们更要指导学生学会把算式进行灵活变式。如： 15×12 这样一个普通的算式，请学生写一写能有多少种变式，拓宽他们的思维，在写变式的过程中让学生自主分析、对比不同运算定律的应用。

对于学生来说，乘法分配律的理解和掌握最困难，因为它的构成要素多，展开式复杂，应用中的变化类型比较多。在学生建立乘法分配律的基本模型 $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ 之后，教师还需在接下来的巩固课中渗透不同的变式，如变成 $c \times (a + b) = c \times a + c \times b$ 。虽然这样的变化是较简单的，但是对于初学者来说，还是有一定的困难的，需要老师有意识地引导，并组织学生进行分辨对比。另外还有增加项数 $(a + b + c) \times d = a \times d + b \times d + c \times d$ ；两数和变成两数差 $(a - b) \times c = a \times c - b \times c$ ；乘法分配律的反向练习；有特殊数“1”参与的展开式等。这些内容都需要教师来扩充，并让学生进行练习。经过一段时间的练习后，学生才可能逐步把握乘法分配律的本质，在简便计算以及解决问题时“以不变应万变”。

3. 多种形式的练习，提高学生对运算定律运用的熟练程度

有部分学生总是习惯性地被一些易干扰的数据诱惑导致出错，但



他们拿到错题时又往往恍然大悟，不需要老师指点就会订正。学生在简便运算中出现盲目凑整，一是由于教师上课时过分强调凑整，二是一些特殊的数据表现形式使学生的大脑感官受到影响，从而使他们看到类似的数据就会产生条件反射。因此，在学生学了乘法分配律以后，教师要把一些形如 $99 \times 86 + 86$ 、 102×54 、 $101 \times 74 - 74$ 等简算题目给学生进行比较练习，让学生厘清运算的依据，这样错误率就会大大降低。

计算的巩固熟练免不了量的积累，我们不主张“题海战术”，但要保证学生计算质量，必须为学生选择精而有效的练习内容。如同类题的归类练习、相似题的对比练习、易错题的重复练习等。我们可以设计多种形式的计算练习，也可以在日常教学中设计一些学生感兴趣的 forms，并及时加以鼓励，如我在教学中开展的“每日四题”——每天四道简便计算或四则混合运算，让学生习惯成自然；“每周纠错”——每周一次的数学早自修请学生自己出易错计算题再让同学做，并评出最有价值的错题；“每月一测”——限时比赛，评出计算达人，训练学生的注意力。这些活动不只是安排在学这单元内容的时候，更要贯穿一整个学期。

在乘法分配律和乘法结合律的教学和练习过程中，学生在计算中往往出错，很多情况下是没有理解和掌握概念，所以需要教师首先在概念教学中注意运用合理的教学手段，使学生在初次接触新概念时就能理解概念，为之后运用概念进行计算打好基础。另外在对各种错例分析后，要及时寻找内在原因，及时调整教学方式，避免学生形成错误定式，做到举一反三，并能让学生自己悟错，有效提高正确率。

(定海区马岙中心学校 严燕娜)