学类课程教材

高等数学及其应用
(下)
第二版

主　编　张文钢
副主编　龙　松　李春桃

华中科技大学出版社
中国·武汉

前　　言

随着社会的进步，我国的高等教育也有了突飞猛进的发展，无论是学生的素质还是相关专业对高等数学知识的需要，都对基础课教材，尤其是数学课教材提出了更新、更严格的要求。高等数学课程是经济管理类、理工科各专业的重要基础课程，除了要求学生掌握高等数学的基本知识以外，还强调培养学生的抽象思维能力、逻辑思维能力和定量思维能力，以及运用数学的理论和方法解决实际问题的能力。

本书主要根据经济管理类各专业的本科数学基础课程的教学要求，参照研究生入学统一考试数学三的考试大纲以及作者多年经济管理类本科专业高等数学课程的教学经验编写而成。本书具有以下特色：

1. 突出高等数学的基本思想和基本方法。目的在于方便学生理解和掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，提高教学效果。在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，更多的是让学生体会高等数学的本质和内涵。

2. 贴近实际应用。本书对基本概念的叙述力求从身边实际问题出发，提出一些在自然科学、经济管理领域和日常生活中经常面临的现实问题，以例题或问题的形式让学生来阅读或解答，以此来提高学生学习高等数学的兴趣和利用高等数学知识解决实际问题的能力。

3. 充分考虑到部分学生考研的需求及教学基本要求，重新构建学生易于接受的微积分的内容体系，适当地编写了一些不被基本要求包含的内容，供学生选修用。还编入了 Matlab 软件的部分应用，希望借此提高学生利用计算机软件解决部分数学问题的能力。

4. 按照分层次教学要求，对有关内容和习题进行了设计和安排。每章都加入了一节关于 Matlab 软件的简单应用，每节附有习题，每章附有总复习题。对于超过教学基本要求及为某些相关专业选用的基本内容，均在书中以 * 号标出。

全书分上、下两册，上册包括一元函数的极限与连续、一元函数微积分学及其应用等内容，下册包含微分方程与差分方程、空间解析几何、多元函数微分法、二重积分、级数等内容。附录有：常见的初等数学公式、几种常见的曲线、积分表、Matlab 软件简介等。本书主要面向高等院校经济类本科专业，也可作为普通高等专科院校各

专业的高等数学教材。

本书由张文钢任主编，龙松、张秋颖、李春桃任副主编，同时，参与习题编写的还有朱祥和、徐彬、沈小芳、张丹丹等，在此对他们的工作表示感谢！

在教材的编写过程中，得到了武昌首义学院基础科学部主任齐欢教授、数学教研室主任叶牡才教授及数学教研室其他各位老师的大力支持，他们对本教材的编写提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢！

最后，本书作者再次向所有支持和帮助过本书编写和出版的单位和个人表示由衷的感谢！

由于作者水平所限，书中不妥和错误之处在所难免，敬请专家、同行和广大读者批评指正！

编　者

2020 年 4 月

目　　录

第 7 章　常微分方程与差分方程 ………………………………………… (1)
7.1　微分方程的基本概念 ………………………………………… (1)
7.1.1　微分方程的概念及类型 ………………………………………… (2)
7.1.2　微分方程的解 ………………………………………… (2)
习题 7.1 ………………………………………… (4)
7.2　一阶微分方程 ………………………………………… (5)
习题 7.2 ………………………………………… (12)
7.3　可降阶的二阶微分方程 ………………………………………… (13)
习题 7.3 ………………………………………… (16)
7.4　二阶线性微分方程解的结构 ………………………………………… (17)
习题 7.4 ………………………………………… (19)
7.5　二阶常系数线性微分方程 ………………………………………… (19)
7.5.1　二阶常系数齐次线性微分方程及其解法 ………………………………………… (20)
7.5.2　二阶常系数非齐次线性微分方程及其解法 ………………………………………… (23)
习题 7.5 ………………………………………… (27)
7.6　差分方程 ………………………………………… (27)
7.6.1　差分与差分方程的概念及性质 ………………………………………… (27)
7.6.2　线性差分方程解的基本定理 ………………………………………… (30)
7.6.3　一阶常系数线性差分方程的解法 ………………………………………… (30)
*7.6.4　二阶常系数线性差分方程的一般形式 ………………………………………… (34)
习题 7.6 ………………………………………… (37)
7.7　常微分方程与差分方程在经济学中的应用 ………………………………………… (38)
7.7.1　微分方程在经济学中的应用举例 ………………………………………… (38)
7.7.2　差分方程在经济学中的应用举例 ………………………………………… (41)
习题 7.7 ………………………………………… (43)
*7.8　Matlab 软件简单应用 ………………………………………… (44)
本章小结 ………………………………………… (46)
复习题 7 ………………………………………… (47)
第 8 章　向量代数与空间解析几何 ………………………………………… (50)
8.1　空间直角坐标系 ………………………………………… (50)

8.1.1 空间直角坐标系 …… (50)
8.1.2 空间两点间的距离 …… (51)
习题 8.1 …… (52)
8.2 向量及其线性运算 …… (53)
8.2.1 向量的概念 …… (53)
8.2.2 向量的加减法 …… (53)
8.2.3 向量与数的乘法 …… (54)
习题 8.2 …… (54)
8.3 向量的坐标表达式 …… (55)
8.3.1 向量的坐标 …… (55)
8.3.2 向量的模与方向余弦 …… (56)
习题 8.3 …… (57)
8.4 向量间的乘法 …… (58)
8.4.1 向量的数量积 …… (58)
8.4.2 两向量的向量积 …… (59)
习题 8.4 …… (61)
8.5 空间曲面及曲线 …… (61)
8.5.1 空间曲面方程 …… (61)
8.5.2 空间曲线方程 …… (67)
习题 8.5 …… (69)
8.6 平面与直线 …… (70)
8.6.1 平面及其方程 …… (70)
8.6.2 空间直线方程 …… (73)
习题 8.6 …… (78)
*8.7 Matlab 软件简单应用 …… (78)
本章小结 …… (80)
复习题 8 …… (81)
第 9 章 多元函数微分法及其应用 …… (84)
9.1 多元函数的基本概念 …… (84)
9.1.1 区域 …… (84)
9.1.2 多元函数的定义 …… (85)
9.1.3 二元函数的极限 …… (86)
9.1.4 二元函数的连续性 …… (87)
习题 9.1 …… (89)
9.2 偏导数与全微分 …… (89)

9.2.1 偏导数的概念 …… (89)
9.2.2 偏导数的计算 …… (91)
9.2.3 偏导数的几何意义 …… (92)
9.2.4 高阶偏导数 …… (92)
9.2.5 全微分及其应用 …… (93)
习题 9.2 …… (96)
9.3 多元函数的微分法 …… (97)
9.3.1 多元复合函数的求导法则 …… (97)
9.3.2 隐函数的求导公式 …… (101)
习题 9.3 …… (102)
9.4 多元函数的极值 …… (103)
9.4.1 多元函数的无条件极值与最值 …… (103)
9.4.2 条件极值、拉格朗日乘数法 …… (106)
9.4.3 最小二乘法 …… (108)
习题 9.4 …… (110)
*9.5 Matlab 软件简单应用 …… (110)
9.5.1 多元函数的求极限 …… (110)
9.5.2 多元函数的求导 …… (111)
本章小结 …… (113)
复习题 9 …… (115)
第 10 章 二重积分 …… (117)
10.1 二重积分的概念与性质 …… (117)
10.1.1 二重积分的概念 …… (117)
10.1.2 二重积分的几何意义 …… (119)
10.1.3 二重积分的性质 …… (120)
习题 10.1 …… (122)
10.2 二重积分的计算 …… (122)
10.2.1 二重积分在直角坐标系中的计算 …… (122)
10.2.2 二重积分在极坐标系中的计算 …… (128)
习题 10.2 …… (132)
10.3 二重积分的应用 …… (134)
10.3.1 平面区域的面积 …… (134)
10.3.2 空间立体的体积 …… (135)
10.3.3 平面薄片的质心 …… (137)
10.3.4 平面薄片的转动惯量 …… (138)

10.3.5 平面薄片对质点的引力 …………………………………… (139)
习题 10.3 ……………………………………………………………… (140)
*10.4 Matlab 软件简单应用……………………………………… (140)
本章小结 …………………………………………………………… (142)
复习题 10 …………………………………………………………… (144)
第 11 章 无穷级数 ……………………………………………… (146)
11.1 常数项级数的概念与性质 ………………………………… (146)
11.1.1 常数项级数的概念 ………………………………………… (146)
11.1.2 收敛级数的基本性质 ……………………………………… (148)
习题 11.1 …………………………………………………………… (150)
11.2 常数项级数的审敛法 ……………………………………… (151)
11.2.1 正项级数及其审敛法 ……………………………………… (151)
11.2.2 交错级数及其审敛法则 …………………………………… (155)
11.2.3 绝对收敛与条件收敛 ……………………………………… (155)
习题 11.2 …………………………………………………………… (157)
11.3 幂级数 ……………………………………………………… (158)
11.3.1 函数项级数的概念 ………………………………………… (158)
11.3.2 幂级数及其收敛性 ………………………………………… (158)
11.3.3 幂级数的运算 ……………………………………………… (161)
习题 11.3 …………………………………………………………… (163)
11.4 函数展开成幂级数 ………………………………………… (163)
11.4.1 泰勒公式与泰勒级数 ……………………………………… (163)
11.4.2 函数展开成幂级数 ………………………………………… (165)
11.4.3 幂级数展开式的应用 ……………………………………… (168)
习题 11.4 …………………………………………………………… (171)
*11.5 Matlab 软件简单应用……………………………………… (171)
11.5.1 无穷级数之和 ……………………………………………… (171)
11.5.2 幂级数之和 ………………………………………………… (173)
11.5.3 符号函数的 Taylor 级数展开式 ………………………… (173)
本章小结 …………………………………………………………… (175)
复习题 11 …………………………………………………………… (176)
附录 A Matlab 用法简介 ……………………………………… (180)
附录 B 积分表 ………………………………………………… (206)
附录 C 习题答案 ……………………………………………… (215)
参考文献 ………………………………………………………… (228)

第 7 章　常微分方程与差分方程

微分方程是联系数学理论与实际的桥梁，是在微积分的基础上进一步发展起来的一个重要的数学分支. 微分方程在自然科学和工程技术领域和社会科学领域中都有着广泛的应用.

我们知道，函数是研究客观事物运动规律的重要工具，在实践中找出函数关系具有重要意义. 但是在许多的实际问题中，我们常常不能给出所需要的函数关系，反而更容易建立这些变量及其导数或微分之间的关系，即得到一个关于未知函数的导数或微分的方程，数学上称这样的方程为微分方程. 通过这样的方程，最后可以得到我们需要的函数关系式. 现实世界中的很多问题都可以在一定的条件下抽象为微分方程，例如人口增长问题、经济增长问题等都可归结为微分方程问题；这时的微分方程或差分方程习惯上称为所研究问题的**数学模型**，如人口模型、经济增长模型等.

另外，在经济管理和许多的实际问题中，大多数数据是按等时间间隔周期统计的，于是有关变量的取值是离散变化的. 如何找出它们之间的关系及变化规律呢？差分方程是研究这样的离散型数学问题的有力工具，本章在最后介绍差分方程的一些基本概念及常用的求解方法.

7.1　微分方程的基本概念

先看两个例子.

例 7.1.1　一曲线通过点(1,2)，且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $2x$，求此曲线的方程.

解　设所求曲线的方程为 $y=y(x)$，则根据导数的几何意义可知，$y=y(x)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$

两端积分得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C\quad (C \text{ 为任意常数})$$

再根据曲线过点(1,2)得　　$C=1$

即得所求曲线方程　　$y=x^2+1$

例 7.1.2　一物体自某高度自由落下，如果空气阻力忽略不计，试求物体所经过

的路程 s 与时间 t 的函数关系.

解 在忽略空气阻力的情况下,自由落体的物体下落速度为 gt,故有

$$\frac{ds}{dt}=gt \quad 或 \quad ds=gtdt$$

这个方程也是一个含有未知函数的导数或微分的微分方程.

7.1.1 微分方程的概念及类型

含有自变量、自变量未知函数及未知函数的(若干阶)导数或微分的方程称为**微分方程**.

如果未知函数是一元的,则通常称此方程为**常微分方程**;如果未知函数是多元的,则通常称此方程为**偏微分方程**.本书中只讨论常微分方程.

微分方程中出现的未知函数的导数或微分的最高阶数称为**微分方程的阶**.例如 $y'=4x+10$,$4xdy+ydx=5x-6$ 是一阶的微分方程;$y'''=x+5(y')^5+6$ 是三阶微分方程.

微分方程中未知函数的导数或微分的最高阶数是一阶时,称此方程为一阶微分方程,记为 $F(x,y,y')=0$ 或 $y'=f(x,y)$;微分方程中未知函数的导数或微分是二阶及以上时,称此方程为高阶微分方程.因此一般的 n 阶微分方程可表示为 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 或 $y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$.

在微分方程中,如果未知函数及其导数都是一次的,且不含这些变量的乘积项,则称这样的微分方程为**线性微分方程**,n 阶线性微分方程的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

其中 $a_k(x)(0\leqslant k\leqslant n)$ 及 $f(x)$ 为已知函数.当 $f(x)\equiv 0$ 时的线性微分方程称为**线性齐次微分方程**,否则称为**线性非齐次微分方程**.又若 $a_k(x)(0\leqslant k\leqslant n)$ 全为常数,则称为**常系数线性微分方程**,否则称为**变系数线性微分方程**.例如

$\frac{dS}{dt}=-kS$ 是一阶常系数线性齐次微分方程;

$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=1$ 是二阶常系数线性非齐次微分方程;

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$ 是二阶变系数线性齐次微分方程;

$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$ 是二阶非线性微分方程;

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}=1$ 是一阶非线性微分方程.

7.1.2 微分方程的解

若把函数 $y=\varphi(x)$ 代入微分方程使微分方程恒成立,则称 $y=\varphi(x)$ 是该**微分方

程的一个解. 例如 $y=2x^2+10x$, $y=2x^2+10x+5$, $y=2x^2+10x+C$(C 是任意常数)都是微分方程 $y'=4x+10$ 的解.

1. 微分方程的通解、特解

把含有与微分方程的阶数相同个数的独立的任意常数(即:它们不能合并而使得任意常数的个数减少)的解称为该**微分方程的通解**;不含任意常数的微分方程的解称为该**微分方程的特解**. 例如 $y=2x^2+10x+C$(C 是任意常数)是微分方程 $y'=4x+10$ 的通解, $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解;而 $y=2x^2+10x$, $y=2x^2+10x+5$ 是微分方程 $y'=4x+10$ 的特解, $y=3\sin x+5\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的特解.

2. 微分方程的通解与特解的关系

微分方程的通解通过一定的条件确定其中的每一个任意常数的数值后,微分方程的解即为特解;确定每一个任意常数值的条件称为**微分方程的初始条件**;求微分方程满足初始条件的特解问题称为**微分方程的初值问题**. 例如 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解,加上条件 $y|_{x=0}=-1$ 和 $y'|_{x=0}=1$ 可确定 $C_1=1$, $C_2=-1$,从而得到 $y=\sin x-\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的特解;其中条件 $y|_{x=0}=-1$ 和 $y'|_{x=0}=1$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的初始条件;把

$$\begin{cases} y''+y=0 \\ y|_{x=0}=-1, y'|_{x=0}=1 \end{cases}$$

称为微分方程的初值问题.

微分方程的解的图形是一条曲线,称为微分方程的**积分曲线**. 通解的图形是一簇积分曲线,特解是这一簇积分曲线中的某一条. 初值问题的几何意义就是求微分方程满足初始条件的那条积分曲线.

例 7.1.3　验证

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x \tag{7.1.1}$$

是微分方程

$$y''+y=e^x \tag{7.1.2}$$

的解.

解　因为

$$y'=C_1\cos x-C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$$

$$y''=-C_1\cos x-C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x$$

故而 $y''+y=-C_1\sin x-C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x=e^x$ 成立. 函数

(7.1.1)及其导数代入微分方程(7.1.2)后成为一个恒等式,因此函数(7.1.1)是微分方程(7.1.2)的解.

例 7.1.4 已知函数(7.1.1)是微分方程(7.1.2)的通解,求满足初始条件 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$ 的特解.

解 将 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$ 代入例 7.1.3 的 y', y'' 表达式,得

$$\begin{cases} C_1\cos 0 - C_2\sin 0 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^0 = 0 \\ -C_1\sin 0 - C_2\cos 0 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^0 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{1}{2} = 0 \\ -C_2 + \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

解得 $C_1 = -\dfrac{1}{2}, C_2 = \dfrac{1}{2}$,故所求特解为 $y = -\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

习 题 7.1

1. 指出下列方程的阶数.

(1) $x^4 y''' - y'' + 2xy^6 = 0$; (2) $L\dfrac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{Q}{c} = 0$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} + \rho = \cos^2\theta$; (4) $(y - xy)\mathrm{d}x + 2x^2\mathrm{d}y = 0$.

2. 指出下列微分方程的类型.

(1) $y'^2 + 2xy = x^2$; (2) $y'' + 2xy = x^2$;

(3) $y'' + 2xyy' = x + 1$; (4) $y'' + 2xy' + y^2 = 1$.

3. 验证下列给出的函数是否为相应方程的解.

(1) $xy' = 2y$, $y = Cx^2$; (2) $(x+1)\mathrm{d}y = y^2\mathrm{d}x$, $y = x + 1$;

(3) $y'' + 2y' + y = 0$, $y = x\mathrm{e}^{-x}$; (4) $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4$, $s = -0.2t^2 + c_1 t + c_2$.

4. 验证:函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt\,(k \neq 0)$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$ 的通解.

5. 已知函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt\,(k \neq 0)$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$ 的通解,求满足初始条件 $x|_{t=0} = 2$, $x'|_{t=0} = 0$ 的特解.

7.2　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0 \tag{7.2.1}$$

如果从式(7.2.1)中能解出 y'，则一阶微分方程可表示为

$$y'=f(x,y) \tag{7.2.2}$$

一阶微分方程有时也可以写成如下的形式

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{7.2.3}$$

如果一阶微分方程为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$或 $\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$，则只需等式两边积分即得

$$y=\int f(x)\mathrm{d}x+C$$

但并非一阶微分方程都可以如此求解，比如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^3y$就不能用上面所述的求法，因为方程右端含有未知函数，积分$\int x^3y\mathrm{d}x$求不出来. 为了解决这个问题，在方程的两端同乘以$\frac{\mathrm{d}x}{y}$，使方程变为$\frac{\mathrm{d}y}{y}=x^3\mathrm{d}x$. 这样，变量 y 与 x **被分离在等式的两端**，然后两端积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int x^3\mathrm{d}x+C\Rightarrow \ln|y|=\frac{1}{4}x^4+C$$

如此得到的函数是原微分方程的解吗？(读者自己验证).

本节中将介绍几种特殊类型的一阶微分方程及其解法.

1. 可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{7.2.4}$$

的一阶微分方程称为**可分离变量的微分方程**.

其求解步骤如下：

首先分离变量，即把 $f(x)$，$\mathrm{d}x$ 与 $g(y)$，$\mathrm{d}y$ 分别移到方程的两端：

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$$

再对两端分别求积分即可求得微分方程的通解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C$$

其中 C 是任意常数.

注意:(1) 在移项时只有 $g(y)\neq 0$ 才可以进行;如果 $g(y)=0$,则不妨设 $y=y_0$ 是 $g(y)=0$ 的零点,即 $g(y_0)=0$,并代入原方程可知常数函数 $y=y_0$ 显然是方程(7.2.4)的一个特解.

(2) 在上述通解表示式中,$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ 与 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示的是一个原函数,而不是不定积分;两个不定积分中出现的任意常数归并在一起记为 C.

例 7.2.1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2(1+y^2)$ 的通解.

解 分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=3x^2\mathrm{d}x$$

对两端分别求积分得到通解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int 3x^2\mathrm{d}x+C,\quad 即\ \arctan y=x^3+C$$

其中 C 是任意常数.通解也可写为 $y=\tan(x^3+C)$,其中 C 是任意常数.

例 7.2.2 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解 $y\neq 0$ 时,分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$$

对两端分别求积分得到通解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x+C_1,\quad 即\quad \ln|y|=x^2+C_1$$

即

$$|y|=\mathrm{e}^{x^2+C_1}$$

于是得到原方程的通解 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$,其中 C 是任意常数.

显然,$y=0$ 包含在通解中(只要 C 取零即可).

注意:(1) 在运算时,可根据需要将任意常数写成 $\ln C$,以简化计算过程.

(2) 为了方便,在求 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$ 时,可将 $\ln|y|$ 直接写成 $\ln y$,只要记住最后得到的任意常数可正可负.这种简洁的写法与严格的写法在结果上是一致的,故得到认可.采用这种写法时最后要去掉对数符号.

例 7.2.3 求微分方程 $4x\mathrm{d}x-3y\mathrm{d}y=3x^2y\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}x$ 的通解.

解 合并同类项得

$$x(4-y^2)\mathrm{d}x=3y(1+x^2)\mathrm{d}y$$

如果 $4-y^2\neq 0$,分离变量得

$$\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{3y}{4-y^2}\mathrm{d}y$$

对两端积分得

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=-\frac{3}{2}\ln|4-y^2|+C_1$$

其中 C_1 是任意常数. 去对数得方程的通解为

$$1+x^2=C(4-y^2)^{-3}$$

其中 C 是一个正的任意常数($C=e^{2C_1}$).

注意:该方程的通解是以隐函数形式给出的,可以不必将它化为显函数. 另外,$y=\pm 2$显然是方程的解,但它不能通过 C 的取值来将它表示出来,这种解称为**奇解**. 在高等数学课程里我们不讨论奇解,今后在分离变量时可以不讨论分母是否为零的情形.

例 7.2.4　设一曲线经过点(2,3),它在两坐标轴间的任一切线段被切点所平分,求这一曲线的方程.

解　设所求的曲线方程为 $y=y(x)$,则曲线上任一点(x,y)处的切线与两坐标轴的交点分别为$(2x,0)$,$(0,2y)$. 故得

$$\frac{0-2y}{2x-0}=y'$$

即得到所求曲线应满足的微分方程及初始条件为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}\\ y|_{x=2}=3\end{cases}$$

此方程为可分离变量的微分方程,易求得其通解为

$$xy=C$$

又因 $y|_{x=2}=3$,所以 $C=6$,故所求的曲线为 $xy=6$.

2. 齐次方程

如果一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

中的函数 $f(x,y)$可以变为$\frac{y}{x}$的函数,即微分方程为$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$的形式,则习惯上称这样的微分方程为**齐次方程**. 例如方程

$$(xy^2-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$$

就是齐次方程,因为我们可以把此方程化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$$

要求出齐次方程的通解,我们可以用变量代换的方法.

设齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.2.5}$$

假设 $u=\frac{y}{x}$,则可以把齐次方程(7.2.5)化为可分离变量的微分方程.因为 $u=\frac{y}{x}$,则 $y=ux,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入方程(7.2.5)可把原方程变为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=g(u)$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=g(u)-u$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

等式两端积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+C$$

记 $G(u)$为$\frac{1}{g(u)-u}$的一个原函数,再把 $u=\frac{y}{x}$代入,则可得方程(7.2.5)的通解为 $G\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C$,$C$ 为任意常数.

例 7.2.5 解方程 $y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 原方程可变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}$$

显然是齐次方程.故令 $u=\frac{y}{x}$,则

$$y=ux,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

于是原方程变为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1}$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{u-1}$$

再分离变量，得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两端积分，得

$$u-\ln|u|+C=\ln|x|$$

即 $\ln|ux|=u+C$，以$\frac{y}{x}$代换上式中的 u 便得到原方程的通解为

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+C$$

注意：齐次方程的求解实质是通过变量替换，将方程转化为可分离变量的方程. 变量替换法在解微分方程中有着特殊的作用，但困难之处是如何选择适宜的变量. 一般来说，变量替换的选择并无一定之规，往往要根据所考虑的微分方程的特点来构造. 对于初学者，不妨多试一试，尝试几个直接了当的变量替换.

例 7.2.6　求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+2xy+y^2$ 的通解.

解　令 $u=x+y$，则

$$y=u-x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$$

原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=u^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\mathrm{d}x$$

两端积分，得

$$\arctan u=x+C$$

把 u 用 $x+y$ 换回，得原方程的通解为

$$x+y=\tan(x+C)$$

例 7.2.7　求微分方程 $y'=\frac{y}{2(x-1)}+\frac{3(x-1)}{2y}$的通解.

解　令 $u=\frac{y}{x-1}$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+(x-1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入原方程并整理，得

$$\frac{2u}{3-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

两边积分得

$$\ln(u^2-3)=-\ln x+\ln C$$

变量 u 换回原变量得所求通解为

$$\frac{y^2}{(x-1)^2}-3=\frac{C}{x}$$

3. 一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{7.2.6}$$

的微分方程称为一阶线性微分方程，因为它对于未知函数 y 及其导数是一次方程. 如果方程(7.2.6)中的 $Q(x)\equiv 0$，则方程(7.2.6)称为齐次的；如果 $Q(x)$ 不恒等于零，则方程(7.2.6)称为非齐次的.

设方程(7.2.6)是非齐次的微分方程，为求出其通解，我们首先讨论方程(7.2.6)所对应的齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{7.2.7}$$

的通解问题. 显然这是一个可分离变量的方程，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$$

两端积分，得

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1$$

或

$$y=C\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \quad (\text{其中 } C=\pm\mathrm{e}^{C_1})$$

这是方程(7.2.6)对应的齐次线性微分方程(7.2.7)的通解.

现在我们使用所谓的常数变易法来求非齐次线性方程(7.2.6)的通解. 此方法是将方程(7.2.7)的通解中的常数 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$，即作变换

$$y=u\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{7.2.8}$$

假设方程(7.2.8)是非齐次线性方程(7.2.6)的解，则如果能求得 $u(x)$，那么问题也就解决了. 为此两边求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-uP(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{7.2.9}$$

将方程(7.2.8)和方程(7.2.9)代入方程(7.2.6)，得

$$u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-uP(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)u\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

即
$$u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

于是有
$$u'=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},\quad u=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

将上式代入方程(7.2.8)得到非齐次线性微分方程(7.2.6)的通解为