统计学与数据科学系列教材

# 概率论简明教程

张立卓 周 珂 刘立新 徐 云 编

对外经济贸易大学出版社
University of International Business and Economics Press

统计学与数据科学系列教材

# 概率论简明教程

张立卓　周　珂　刘立新　徐　云　编

对外经济贸易大学出版社
中国·北京

**图书在版编目（CIP）数据**

概率论简明教程 / 张立卓等编. —北京：对外经济贸易大学出版社，2019.3

统计学与数据科学系列教材

ISBN 978-7-5663-2037-7

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①概率论–高等学校–教材 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 066740 号



# 概率论简明教程

# Gailülun Jianming Jiaocheng

张立卓 周 珂 刘立新 徐 云 编

**责任编辑**：汪 洋

---

对外经济贸易大学出版社

北京市朝阳区惠新东街 10 号 邮政编码：100029

邮购电话：010－64492338 发行部电话：010－64492342

网址：http://www.uibep.com E-mail：uibep@126.com

---

北京九州迅驰传媒文化有限公司印装 新华书店经销

成品尺寸：185mm×260mm 16.25 印张 375 千字

2019 年 8 月北京第 1 版 2019 年 8 月第 1 次印刷

---

ISBN 978-7-5663-2037-7

定价：40.00 元

# 内 容 提 要

本书为对外经济贸易大学本科生的《概率论》教材。内容包括：随机事件与概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，数字特征，极限定理等。本书体系完整，内容充实，通俗易懂，便于施教。

本书可作为财经类院校统计学、金融数学、金融工程学、保险精算学等本科相关专业概率论课程的教材，同时也可作为对概率论课程有更高要求的经济学类本科专业概率论课程的教材或教学参考书。在一定的取舍下，也可作为概率论与数理统计课程的参考教材。

# 统计学与数据科学系列教材指导委员会

**顾问** 施建军

**主任** 刘立新

**成员**（依姓氏笔画排序）

陈全润 邵志超 徐 云 秦 磊

郭 伟 唐晓彬 熊 巍

# 总　　序

伴随知识经济和数据时代的到来，统计学科经历了日新月异的变化。如今数字经济、人工智能、大数据的蓬勃发展，对深化统计改革、完善统计体系、创新统计方法提出了新的要求，统计学与数据科学、生命科学、信息技术、经济、金融、保险、管理和人文科学等众多学科的融合，涌现出许多新的学科分支，如生物统计、风险管理、数量金融、保险精算、大数据技术，等等。信息技术的快速发展，云计算、物联网高科技的高速革新也使得统计学科面临更多机遇与挑战，大数据时代改变了传统数据的意义，传统统计学的结构化数据的局限性已逐渐显现。在此背景下，我们一直在思考如何设置课程、建设教材、创新教学模式使学生更好地适应社会发展需要。在不断尝试与教学科研实践中，我们深感统计教育必须要改革教材才能适应高速发展的社会趋势。

对外经济贸易大学统计学院自 2012 年 10 月建院以来，始终坚持着统计理论与应用相结合的办学方向，以培养具有全球视野的统计精英为己任，以国际化、信息化、前沿化的人才培养模式为导向，学院具有统计学本科、硕士研究生和博士研究生培养体系，充分吸收国内外统计学人才培养经验，建立和完善符合学术型和应用型人才成长规律的良性培养机制，在经济统计学、数据科学、数量金融与风险管理等领域进行为各级政府部门、金融机构和企业、高校及研究机构培养高素质复合型人才。

为拥抱新时代，适应经济发展新常态，推动统计学、数据科学等相关学科的发展，统计学院决定编写一套面向高校本科生，特别是财经类院校的统计学与数据科学系列教材，不仅注重教学内容的基础，更要体现现代统计学和数据科学的思想和原理；不仅强调运用统计和大数据软件的动手能力，更要体现结合财经类问题突出统计方法的灵活应用；不仅广泛吸收国内外优秀教材成果，引用符合时代特征的前沿案例，更要体现服务于提高本科生的应用统计及数据科学素质教育，适应数据时代发展的高要求。

感谢对外经济贸易大学出版社的同志们，经过反复修改论证，使这套教材得以出版。感谢参与这套教材编写的统计学院教师们。编写统计学与数据科学系列教材是建院以来的首次尝试，恳请兄弟院校专家、使用这套教材的师生和读者多提宝贵意见，使教材不断完善。

统计学与数据科学系列教材指导委员会

**2019 年 5 月 1 日于惠园**

# 前　言

概率论是研究随机现象中数量规律的一门数学学科，它是透过表面的偶然性探究内部隐藏着的规律。随着人类社会的进步，作为科学探索的理论基础和重要工具与方法，概率论在众多领域发挥着越来越重要的作用，比如统计学、金融学、数据科学、人工智能等。

作为为财经类院校本科生编写的《概率论简明教程》，既要对概率论的基本概念和理论给予严密的论述，又要让学生明确它们的实际应用背景。为此本书在编写过程中尽量做到详实而不失条理，直观而不失严谨。本书的例题由浅入深，既是对理论部分的诠释，又是理论部分的综合运用，习题丰富，书末附有习题答案与提示。

本书成稿后，曾在对外经济贸易大学本科生的教学中使用过两届。遵照刘立新教授的建议，结合多年的教学体会，本书做了多次修改和补充。写作中，作者参考了多部《概率论》教材或《概率论与数理统计》教材，从中受到很多启发和教益，同时对外经济贸易大学出版社的编辑对本书的成稿提出了许多宝贵意见，在此谨向这些教材的作者和编辑致以诚挚的谢意。

本书第一章由徐云编写，第二章和第三章由张立卓编写，第四章由周珂编写，第五章由刘立新编写。因作者水平有限，本书难免有误。恳请广大读者提出宝贵意见，感激万分。

编　者

**2019 年 7 月 1 日**

# 目　　录

第 1 章　随机事件与概率 …… 1
§1.1　随机试验、样本空间与随机事件 …… 1
1.1.1　随机试验 …… 1
1.1.2　样本空间 …… 1
1.1.3　随机事件 …… 2
1.1.4　事件的关系及运算 …… 2
习题 1－1 …… 4
§1.2　频率与统计概率 …… 5
1.2.1　频率与频率的稳定性 …… 5
1.2.2　统计概率的定义 …… 7
1.2.3　统计概率的基本性质 …… 7
习题 1－2 …… 7
§1.3　古典概型 …… 8
1.3.1　古典概率的定义 …… 8
1.3.2　古典概率的基本性质 …… 9
习题 1－3 …… 12
§1.4　几何概型 …… 12
1.4.1　几何概率的定义 …… 12
1.4.2　几何概率的基本性质 …… 15
习题 1－4 …… 16
§1.5　概率的公理化定义及概率的性质 …… 16
1.5.1　事件域 …… 16
1.5.2　概率与概率空间 …… 17
1.5.3　概率的性质 …… 17
习题 1－5 …… 20
§1.6　条件概率 …… 21
1.6.1　条件概率的定义 …… 21
1.6.2　乘法公式 …… 22
1.6.3　全概率公式 …… 23
1.6.4　贝叶斯公式 …… 24
习题 1－6 …… 26
§1.7　事件的独立性 …… 27

1.7.1 两个事件的独立性 …… 27
1.7.2 多个事件的独立性 …… 28
1.7.3 独立事件之并的概率计算公式 …… 29
1.7.4 条件独立 …… 30
习题 1－7 …… 30
§1.8 伯努利试验 …… 30
1.8.1 $n$ 重伯努利试验 …… 30
1.8.2 二项概率计算公式 …… 31
习题 1－8 …… 32
**第 2 章 随机变量及其分布** …… 33
§2.1 随机变量及其分布函数 …… 33
2.1.1 随机变量 …… 33
2.1.2 随机变量的分布函数 …… 35
习题 2－1 …… 38
§2.2 离散型随机变量及其分布 …… 38
2.2.1 离散型随机变量及其概率分布 …… 38
2.2.2 常见的离散型分布 …… 41
习题 2－2 …… 47
§2.3 连续型随机变量及其分布 …… 48
2.3.1 连续型随机变量及其概率密度函数 …… 48
2.3.2 常见的连续型分布 …… 50
习题 2－3 …… 58
§2.4 随机变量函数的分布 …… 58
2.4.1 离散型随机变量函数的分布 …… 58
2.4.2 连续型随机变量函数的分布 …… 60
2.4.3 其他 …… 63
习题 2－4 …… 65
**第 3 章 多维随机变量及其分布** …… 67
§3.1 多维随机变量及其分布函数 …… 67
3.1.1 二维随机变量及其分布函数 …… 67
3.1.2 $n$ 维随机变量及其分布函数 …… 70
习题 3－1 …… 70
§3.2 多维离散型随机变量及其分布 …… 70
3.2.1 二维离散型随机变量及其概率分布 …… 70
3.2.2 $n$ 维离散型随机变量及其概率分布 …… 73
习题 3－2 …… 73
§3.3 多维连续型随机变量及其分布 …… 74
3.3.1 二维连续型随机变量及其概率密度函数 …… 74

3.3.2 $n$ 维连续型随机变量及其概率密度函数 …… 77
习题 3－3 …… 77
§3.4 边缘分布 …… 77
3.4.1 边缘分布函数 …… 77
3.4.2 边缘概率分布 …… 78
3.4.3 边缘概率密度函数 …… 81
习题 3－4 …… 84
§3.5 条件分布 …… 85
3.5.1 条件分布函数 …… 85
3.5.2 条件概率分布 …… 85
3.5.3 条件概率密度函数 …… 87
习题 3－5 …… 91
§3.6 随机变量的独立性 …… 92
3.6.1 两个随机变量相互独立的定义 …… 93
3.6.2 两个离散型随机变量相互独立的充分必要条件 …… 93
3.6.3 两个连续型随机变量相互独立的充分必要条件 …… 96
3.6.4 $n$ 个随机变量相互独立的定义 …… 99
习题 3－6 …… 100
§3.7 多维随机变量函数的分布 …… 101
3.7.1 二维离散型随机变量函数的分布 …… 101
3.7.2 二维连续型随机变量函数的分布 …… 104
3.7.3 其他 …… 111
习题 3－7 …… 112
§3.8 $n$ 个独立随机变量的最大（小）值的分布 …… 113
习题 3－8 …… 116
§3.9 二维随机变量变换的分布 …… 116
习题 3－9 …… 118
**第 4 章 数字特征** …… 119
§4.1 随机变量的数学期望 …… 119
4.1.1 离散型随机变量的数学期望 …… 120
4.1.2 连续型随机变量的数学期望 …… 122
习题 4－1 …… 123
§4.2 随机变量函数的数学期望与数学期望的基本性质 …… 124
4.2.1 一个随机变量函数的数学期望 …… 125
4.2.2 两个随机变量函数的数学期望 …… 128
4.2.3 数学期望的基本性质 …… 130
习题 4－2 …… 132
§4.3 随机变量的方差 …… 133

4.3.1 方差的概念与计算公式……134
4.3.2 几种常用分布的方差……135
4.3.3 方差的性质……138
4.3.4 切比雪夫不等式……140
习题 4－3 ……141
§4.4 协方差、相关系数与矩……142
4.4.1 协方差与协方差矩阵……142
4.4.2 相关系数……145
4.4.3 矩……150
习题 4－4 ……151
§4.5 条件数学期望……152
4.5.1 离散型随机变量的条件数学期望与条件方差……152
4.5.2 连续型随机变量的条件数学期望与条件方差……152
4.5.3 全数学期望公式……153
习题 4－5 ……155
**第 5 章 极限定理**……157
§5.1 特征函数……157
5.1.1 特征函数的概念……157
5.1.2 几种常用分布的特征函数……158
5.1.3 特征函数的性质……160
5.1.4 逆转公式与唯一性定理……163
*5.1.5 多维随机变量的特征函数……164
习题 5－1 ……165
§5.2 收敛性……166
5.2.1 依概率收敛……166
5.2.2 依分布收敛……167
5.2.3 特征函数的连续性定理……170
*5.2.4 几乎处处收敛与 $r$ 阶平均收敛……171
习题 5－2 ……173
§5.3 大数定律……174
5.3.1 弱大数定律的定义……174
5.3.2 四种弱大数定律……176
*5.3.3 强大数定律……179
习题 5－3 ……179
§5.4 中心极限定理……180
5.4.1 独立同分布情形的中心极限定理……181
*5.4.2 独立非同分布情形的中心极限定理……184
习题 5－4 ……186

§5.5　多维正态分布 …… 187
5.5.1　多维正态分布的概念 …… 187
5.5.2　多维正态分布的基本性质 …… 188
习题 5－5 …… 191
**习题答案与提示** …… 193
**附录** …… 234
数学期望的一般讨论 …… 234
附表 1　常用分布一览表 …… 237
附表 2　泊松分布表 …… 240
附表 3　标准正态分布表 …… 242
**参考文献** …… 244

# 第 1 章　随机事件与概率

## § 1.1　随机试验、样本空间与随机事件

### 1.1.1　随机试验

在一定的条件下，并不总是出现相同结果的现象称为随机现象. 人们是通过试验去研究随机现象的，为对随机现象加以研究所进行的观察或实验，称为试验. 若一个试验具有下列三个特点：

（1）可以在相同的条件下重复地进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确试验所有可能出现的结果；

（3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则称这一试验为**随机试验**，记为 $E$.

下面举一些随机试验的例子.

$E_1$：抛一枚硬币，观察正面 $H$ 和反面 $T$ 出现的情况.

$E_2$：将一枚硬币抛三次，观察正面 $H$，反面 $T$ 出现的情况.

$E_3$：将一枚硬币抛三次，观察正面出现的次数.

$E_4$：抛一枚骰子，观察出现的点数.

$E_5$：在单位圆内任取一点，记录其坐标.

本书中以后提到的试验都是指随机试验.

### 1.1.2　样本空间

我们感兴趣的是试验的结果. 随机试验的所有可能结果在试验之前就知道，而试验之后才能确定试验中出现的结果是所有可能结果之一. 这样，可以用集合描述它们.

称随机试验 $E$ 的所有结果组成的集合称为**样本空间**，记为 $\Omega$. 样本空间的元素即 $E$ 的每个结果称为**样本点**，用 $\omega$ 表示. 在具体问题中，给定样本空间是描述随机现象的第一步. 下面写出前面提到的试验 $E_k(k=1, 2, 3, 4, 5)$的样本空间：

$$\Omega_1:\{H,T\}.$$

$$\Omega_2:\{HHH,HHT,THH,HTH,THT,HTT,TTH,TTT\}.$$

$$\Omega_3:\{1,2,3\}.$$

$$\Omega_4:\{1,2,3,4,5,6\}.$$

$$\Omega_5:\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\right\}.$$

### 1.1.3 随机事件

在实际中，当进行随机试验时，人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 比如掷一枚骰子，考察出现的点，虽然知道了样本空间. 但对赌徒而言，关心的是出现小点还是大点，即出现 1，2，3 中某一点，还是出现 4，5，6 中某一点. 即人们关心样本空间的某子集中的样本点是否会在试验中出现.

随机试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 的某些子集称为 $E$ 的**随机事件**，简称**事件**，通常用大写字母 $A$，$B$，$C$…表示. 注意，这里对随机事件的定义并不完全，将在§1.5 给出其严格的数学定义. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**. 例如，在掷骰子的试验中，可以用 $A$ 表示“出现点数为偶数”这个事件，若试验结果是“出现 6 点”，就称事件 $A$ 发生.

由于随机事件是样本空间的子集，故 $\Omega$ 本身也可以当作一个事件，而在任何一次试验中，总有 $\Omega$ 的某一样本点出现，即 $\Omega$ 总会发生，所以 $\Omega$ 称为**必然事件**. 在每次试验中不可能发生的事件称为不可能事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不可能发生，故它就是一个**不可能事件**. 因而不可能事件我们也用 $\varnothing$ 表示. 特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**.

下面举几个事件的例子.

**例 1.1.1** 在 $E_2$ 中事件 $A_1$ 表示“第一次出现的是 $H$”，即

$$A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}.$$

事件 $A_2$ 表示“三次出现同一面”，即

$$A_2 = \{HHH, TTT\}.$$

在 $E_5$ 中，事件 $A_3$：“半径小于 0.5”，即

$$A_3 = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 0.5^2\right\}.$$

### 1.1.4 事件的关系及运算

一个样本空间 $\Omega$，可以有很多的随机事件. 概率论的任务之一就是研究随机事件的规律，通过对较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律. 为此，需要研究事件之间的关系和事件之间的一些运算. 我们可以根据集合论的知识来讨论事件间的关系及运算，这些关系与运算有概率论的意义.

在下面的讨论中，均认为样本空间 $\Omega$ 已给定.

（1）如果事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称**事件 $A$ 包含于事件 $B$**（或称**事件 $B$ 包含事件 $A$**），记作 $A \subset B$（或 $B \supset A$）.

$A \subset B$ 的一个等价说法是，如果事件 $B$ 不发生，则事件 $A$ 必然不发生.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 **$A$ 与 $B$ 相等**（或等价），记为 $A=B$.

为了方便起见，规定对于任一事件 $A$，有 $\varnothing \subset A$. 显然，对于任一事件 $A$，有 $A \subset \Omega$.

（2）“事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一个发生”的事件称为 **$A$ 与 $B$ 的和**（或**并**），记为 $A \cup B$. 由事件并的定义，立即可得，对任一事件 $A$，有

$$A \cup \Omega = \Omega; \quad A \cup \varnothing = A.$$

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示“事件 $A_1,A_2,\ \cdots,A_n$ 中至少有一个发生”这一事件.

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示“事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生”这一事件.

（3）“$A$ 与 $B$ 同时发生”的事件称为 **$A$ 与 $B$ 的积**（或交），记为 $A\cap B$ 或 $AB$. 由事件交的定义，立即得到：

对任一事件 $A$，有

$$A\bigcap\Omega=A;\quad A\bigcap\varnothing=\varnothing.$$

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$ 表示“事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 同时发生”这一事件.

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i$ 表示“事件 $B_1,B_2,\cdots$ 同时发生”这一事件.

（4）“$A$ 发生而 $B$ 不发生”的事件称为 **$A$ 与 $B$ 的差**，记为 $A-B$. 由事件差的定义，立即得到：

对任一事件 $A$，有

$$A-A=\varnothing;\quad A-\varnothing=A;\quad A-\Omega=\varnothing.$$

（5）如果两个事件 $A$ 与 $B$ 不可能同时发生，则称事件 **$A$ 与 $B$ 不相容**（或**互斥**），记作 $A\cap B=\varnothing$.

基本事件是两两互不相容的.

（6）若 $A\bigcup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称 **$A$ 与 $B$ 对立**. $A$ 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 是由所有不属于 $A$ 的样本点组成的事件，它表示“$A$ 不发生”这样一个事件. 显然 $\overline{A}=\Omega-A$.

在一次试验中，若 $A$ 发生，则 $\overline{A}$ 必不发生（反之亦然），即在一次试验中，$A$ 与 $\overline{A}$ 二者只能发生其中之一，并且也必然发生其中之一. 显然有 $\overline{\overline{A}}=A$.

对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容事件未必为对立事件.

以上事件之间的关系及运算可以用文氏图来直观地描述. 若用平面上一个矩形表示样本空间 $\Omega$，矩形内的点表示样本点，圆 $A$ 与圆 $B$ 分别表示事件 $A$ 与事件 $B$，则 $A$ 与 $B$ 的各种关系及运算如下列各图所示（见图 1–1～图 1–6）.

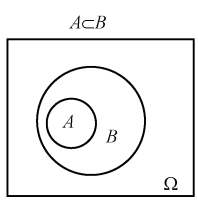


**图 1–1**

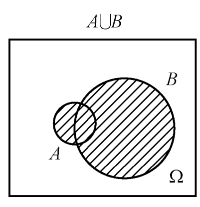


**图 1–2**

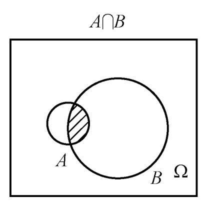


**图 1–3**

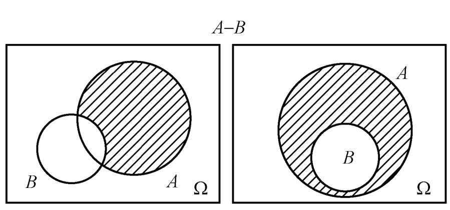


**图 1–4**

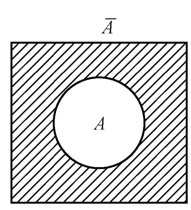


**图 1–5**

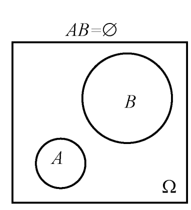


**图 1–6**

可以验证一般事件的运算满足如下规律：

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

（3）分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

分配律可以推广到有限或可列无穷多个事件的情形，即

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i),\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i),$$

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i),\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup A_i).$$

（4）德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

德·摩根律可以推广到有限或可列无穷多个事件的情形，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i};$$

**例 1.1.2**　在例 1.1.1 中有

$$A_1\cup A_2=\{HHH,HHT,HTH,HTT,TTT\};$$
$$A_1\cap A_2=\{HHH\};$$
$$A_2-A_1=\{TTT\};$$
$$\overline{A_1\cup A_2}=\{THT,TTH,THH\}.$$

## 习题 1–1

1. 设 $A$，$B$，$C$ 为三个事件，用 $A$，$B$，$C$ 的运算关系表示下列各事件：

（1）$A$ 发生，$B$ 与 $C$ 不发生.

（2）$A$ 与 $B$ 都发生，而 $C$ 不发生.

（3）$A$，$B$，$C$ 中至少有一个发生.

（4）$A$，$B$，$C$ 都发生.

（5）$A$，$B$，$C$ 都不发生.

（6）$A$，$B$，$C$ 中不多于一个发生.

（7）$A$，$B$，$C$ 中不多于两个发生.

（8）$A$，$B$，$C$ 中至少有两个发生.

2. 设某人向靶子射击 3 次，用 $A_i$ 表示“第 $i$ 次射击击中靶子”（$i$=1，2，3），试用语言描述下列事件：

（1）$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$；

（2）$\overline{A_1\cup A_2}$；

（3）$\left(A_1A_2\overline{A_3}\right)\cup\left(\overline{A_1}A_2A_3\right)$.