



普通高等院校“十三五”创新型规划教材  
公共基础课系列

# 高等数学

## GAODENG SHUXUE



主编 多布杰 小巴桑次仁



电子科技大学出版社  
University of Electronic Science and Technology of China Press

# 高等数学

主 编 多布杰 小巴桑次仁

 电子科技大学出版社

· 成都 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 多布杰, 小巴桑次仁主编. —成都:  
电子科技大学出版社, 2019. 8  
ISBN 978 - 7 - 5647 - 7261 - 1

I. ①高… II. ①多… ②小… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 149993 号

## 内 容 简 介

本书是根据普通高等学校理工类专业高等数学课程的教学大纲及基本要求, 结合不同层次学生的特点, 贯彻“以应用为目的, 以够用为度, 不削弱理论学习”的指导思想编写而成的。全书共 11 章, 主要包括函数、极限与连续, 导数与微分, 微分中值定理与导数的应用, 不定积分, 定积分及其应用, 常微分方程, 空间解析几何与向量代数, 多元函数微分学, 重积分, 曲线积分与曲面积分, 无穷级数等内容, 每章均配有简单的数学实验和总习题, 书末附有习题答案与提示。

本书可供普通高等院校理工类各专业学生使用, 也可作为其他相关专业教师和学生的参考书。

## 高等数学

### Gaodeng Shuxue

多布杰 小巴桑次仁 主编

策划编辑 高小红

责任编辑 高小红

出版发行 电子科技大学出版社

成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼 邮编 610051

主 页 [www.uestp.com.cn](http://www.uestp.com.cn)

服务电话 028 - 83203399

邮购电话 028 - 83201495

印 刷 湖北鄂南新华印刷包装股份有限公司

成品尺寸 185mm × 260mm

印 张 30

字 数 630 千字

版 次 2019 年 8 月第一版

印 次 2019 年 8 月第一次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5647 - 7261 - 1

定 价 59.80 元

版权所有 侵权必究

# 前 言

高等数学是普通高等院校理工类、经济类和管理类等各专业的重要基础课、必修课。长期以来，由于区域的差别，现有的高等数学教材不能很好地适应西藏地区的理工类各专业的需求，而且也与西藏地区学生的实际能力有一定的差距。

本教学团队以 20 多年在西藏地区讲授高等数学之经验，并以普通高等学校理工类专业高等数学课程的教学大纲为依据，结合西藏地区理工类专业的培养目标及学生的实际能力，让学生掌握学习理工类专业所需的高等数学基本知识、基本技能；让学生初步掌握数学建模思想；具有初步运用数学软件和专业实践中应用数学知识解决问题的能力；进而使学生形成以“数学的思维方式”思考问题、解决问题的能力。我们以现有的高等数学教材为基础，编写了本教材。

本书的主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数等 11 章内容。

在内容的编排上，本书的主要特色体现在四个方面。一是依据普通高等学校理工类专业高等数学课程的教学基本要求，贯彻“以应用为目的，以够用为度，不削弱理论学习”的原则，在尽可能保持高等数学内容完整性的基础上，结合西藏地区实际，对内容进行了适当精简和合并，对于超过基本要求的内容和指明为某些相关专业选用的内容以 \* 标出，以满足分层次教学的需要。二是力求概念的自然导入和从实际背景入手，内容循序渐进、由浅入深，定理和重要结论尽可能给出几何意义等直观说明。三是在例题和习题的难度配置上遵循循序渐进的原则，并为了满足不同层次读者的需求，在每节课后的习题分为基本要求类习题（在符号“\*\*\*\*\*”之前）与提高类习题（在符号“\*\*\*\*\*”之后）。四是将数学软件 Matlab 的运用融入到教学内容中，每章附有 Matlab 的基本命令和相关数学实验，培养学生运用数学软件分析和解决数学问题和实际问题的能力。

本书的编写框架由多布杰拟定，多布杰、小巴桑次仁任主编，吉律、常亮任副主编。全书由多布杰和小巴桑次仁完成最后的统稿与定稿。

本书的编写得到了西藏大学教务处和理学院有关领导的大力支持和同仁们的帮助，并

得到电子科技大学出版社的支持和帮助，在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，编写时间也比较仓促，以及对高等数学课程改革的探索不够深入，因此书中一定存在疏漏与不妥之处，恳请广大专家、同仁和读者给予批评指正，并提出宝贵意见和建议。

编 者  
2019年3月于西藏大学

<b>第 1 章 函数、极限与连续</b> .....	1
§ 1.1 函数 .....	1
§ 1.2 数列的极限 .....	13
§ 1.3 函数的极限 .....	18
§ 1.4 无穷小与无穷大 .....	24
§ 1.5 极限的运算法则 .....	27
§ 1.6 极限存在准则两个重要极限 .....	32
§ 1.7 无穷小的比较 .....	37
§ 1.8 函数的连续性与间断点 .....	39
§ 1.9 连续函数的性质 .....	43
实验一 函数作图与求极限 .....	48
总习题一 .....	52
<b>第 2 章 导数与微分</b> .....	54
§ 2.1 导数的概念 .....	54
§ 2.2 函数的求导法则 .....	61
§ 2.3 高阶导数 .....	68
§ 2.4 隐函数与参数方程的求导法则 .....	72
§ 2.5 函数的微分 .....	77
实验二 用 Matlab 求一元函数的导数 .....	85
总习题二 .....	87
<b>第 3 章 微分中值定理与导数的应用</b> .....	90
§ 3.1 微分中值定理 .....	90
§ 3.2 洛必达法则 .....	94
* § 3.3 泰勒 (Taylor) 公式 .....	99



§ 3.4 函数的单调性与极值 .....	105
§ 3.5 曲线的凸性与拐点 .....	112
§ 3.6 函数图形的描绘 .....	115
实验三 应用 Matlab 求函数的极值 .....	119
总习题三 .....	122
<b>第 4 章 不定积分 .....</b>	<b>124</b>
§ 4.1 不定积分的概念与性质 .....	124
§ 4.2 换元积分法 .....	129
§ 4.3 分部积分法 .....	136
§ 4.4 几种特殊类型函数的积分 .....	140
实验四 应用 Matlab 求不定积分 .....	147
总习题四 .....	148
<b>第 5 章 定积分及其应用 .....</b>	<b>150</b>
§ 5.1 定积分的概念及其性质 .....	150
§ 5.2 微积分基本定理 .....	157
§ 5.3 定积分的计算 .....	161
§ 5.4 反常积分 .....	169
§ 5.5 定积分的几何应用 .....	176
§ 5.6 定积分的物理应用 .....	184
实验五 用 Matlab 计算定积分 .....	186
总习题五 .....	188
<b>第 6 章 常微分方程 .....</b>	<b>191</b>
§ 6.1 微分方程的基本概念 .....	191
§ 6.2 一阶常微分方程 .....	194
§ 6.3 可降阶的高阶微分方程 .....	201
§ 6.4 二阶常系数线性微分方程 .....	205
§ 6.5 微分方程的应用 .....	213
实验六 应用 Matlab 求解常微分方程 .....	217
总习题六 .....	220

<b>第 7 章 空间解析几何与向量代数</b> .....	<b>222</b>
§ 7.1 空间直角坐标系 .....	222
§ 7.2 向量及其运算 .....	224
§ 7.3 向量的数量积与向量积 .....	231
§ 7.4 平面及其方程 .....	237
§ 7.5 空间直线及其方程 .....	243
§ 7.6 二次曲面与空间曲线 .....	249
实验七 应用 Matlab 绘制空间曲面和曲线图 .....	256
总习题七 .....	260
<b>第 8 章 多元函数微分学</b> .....	<b>262</b>
§ 8.1 多元函数的概念 .....	262
§ 8.2 偏导数 .....	269
§ 8.3 全微分及其应用 .....	274
§ 8.4 多元复合函数的求导法则 .....	279
§ 8.5 隐函数微分法 .....	284
§ 8.6 多元微分学的几何应用 .....	288
§ 8.7 多元函数的极值 .....	293
实验八 应用 Matlab 求多元函数的偏导数与极值 .....	301
总习题八 .....	304
<b>第 9 章 重积分</b> .....	<b>306</b>
§ 9.1 二重积分的概念与性质 .....	306
§ 9.2 二重积分的计算 .....	311
* § 9.3 三重积分 .....	318
§ 9.4 重积分的应用 .....	323
实验九 用 Matlab 计算重积分 .....	329
总习题九 .....	330
<b>* 第 10 章 曲线积分与曲面积分</b> .....	<b>332</b>
§ 10.1 对弧长的曲线积分 .....	332
§ 10.2 对坐标的曲线积分 .....	336
§ 10.3 格林公式及其应用 .....	342



* § 10.4 第一类曲面积分 .....	346
§ 10.5 第二类曲面积分 .....	349
实验十 用 Matlab 计算曲线积分和曲面积分 .....	354
总习题十 .....	356
<b>第 11 章 无穷级数 .....</b>	<b>357</b>
§ 11.1 常数项级数的概念和性质 .....	357
§ 11.2 正项级数 .....	362
§ 11.3 任意项级数 .....	368
§ 11.4 幂级数 .....	372
§ 11.5 函数的幂级数展开式 .....	379
* § 11.6 幂级数的应用举例 .....	385
§ 11.7 傅里叶级数 .....	389
实验十一 用 Matlab 作级数运算 .....	401
总习题十一 .....	403
习题答案与提示 .....	405
参考文献 .....	454

# 第1章 函数、极限与连续

在自然科学、工程技术,甚至在某些社会科学中,函数是被广泛应用的数学概念之一,其重要意义远远超出了数学范围.高等数学的主要内容是微积分,微积分的主要研究对象是函数,极限方法是研究函数的一种基本方法.本章将介绍函数的概念、函数的极限和函数连续性的基本概念以及它们的一些性质.

## § 1.1 函 数

### 一、函数

在一个自然现象或技术过程中,往往有几个不同的量同时变化,而这几个量的变化不是孤立的,而是遵循着一定的变化规律而互相联系、互相依赖的,这种相依的关系就是数学上所谓的函数关系.

#### 1. 函数的概念

**定义** 设  $D$  为非空实数集合,若存在一个对应法则  $f$ ,使得对  $D$  中的任意实数  $x$  ( $\forall x \in D$ ),按照对应法则  $f$ ,存在唯一一个实数  $y$  与之对应,则称  $f$  是定义在  $D$  上的函数,记作

$$f: D \rightarrow R \quad \text{或} \quad f: x \rightarrow y$$

通常简记为  $y = f(x), x \in D$ .

其中,  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量,数集  $D$  称为函数  $f(x)$  的定义域,记作  $D_f$ ,即  $D_f = D$ . 对于  $x \in D$ ,称  $f(x)$  为函数  $f$  在点  $x$  处的函数值,函数值  $f(x)$  的全体所构成的集合称为函数  $f$  的值域,记作  $R_f$  或  $f(D)$ ,即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

关于函数概念的几点说明。

(1) 按照上述定义,记号  $f$  和  $f(x)$  的含义是有区别的:前者表示自变量  $x$  和因变量  $y$  之间的对应法则,而后者表示与自变量  $x$  对应的函数值. 但为了叙述方便,本书中约定,用记号“ $y = f(x), x \in D$ ”来表示“ $f$  是定义在数集  $D$  上的函数”. 当不需要指明函数的定义域时,又可简写为“ $y = f(x)$ ”.

(2) 表示函数的记号是可以任意选取的,除了常用的  $f$  外,还可以用其他英文字母或希腊字母,如“ $g$ ”“ $F$ ”和“ $\varphi$ ”等. 相应地,函数可记作  $y = g(x), y = F(x), y = \varphi(x)$  等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数,即把函数记作  $y = y(x)$ .



(3) 从定义可见,构成函数的两个要素是:定义域  $D_f$  及对应法则  $f$ . 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数是相同的,否则就是不同的.

(4) 函数的定义域通常按以下两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,据实际背景中变量的实际意义确定.

例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为  $t$ ,落下的距离为  $s$ ,假定开始下落的时刻  $t=0$ ,则变量  $s$  与  $t$  之间的函数关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

其中,  $g$  是重力加速度. 这个函数的定义域就是区间  $[0, T]$ .

另一种是抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域为函数的自然定义域. 例如,函数  $y = \sqrt{1-x^2}$  的定义域为  $[-1, 1]$ , 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  的定义域为  $(-1, 1)$ .

函数的定义域常用区间来表示,各种区间列表如表 1-1 所示.

表 1-1 区间列表

记号	等价集合	名称	数轴上的表示
$(a, b)$	$\{x \mid a < x < b\}$	开区间	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	闭区间	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	半开区间	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	半开区间	
$(a, +\infty)$	$\{x \mid x > a\}$	无限区间	
$[a, +\infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	无限区间	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	无限区间	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	无限区间	
$(-\infty, +\infty)$	$\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$	无限区间	

其中  $a, b$  为两个实数,且  $a < b$ ,符号  $-\infty$  和  $+\infty$  分别读作负无穷大和正无穷大.

例 1  $y = \arccos(2+x^2)$  是否构成函数关系.

解 因为要使  $\arccos(2+x^2)$  有意义, 只有  $|2+x^2| \leq 1$   
而  $|2+x^2| \leq 1$  的解集是空集, 即此函数的定义域是空集, 所以

$$y = \arccos(2+x^2)$$

不能构成函数关系.

例2 研究函数  $y = \lg x$  与函数  $y = \frac{1}{2} \lg x^2$  是否为同一个函数.

解 因为函数  $y = \lg x$  的定义域是  $x > 0$ , 而函数  $y = \frac{1}{2} \lg x^2$  的定义域是  $x \neq 0$ , 即两函数的定义域不相同, 所以函数  $y = \lg x$  与函数  $y = \frac{1}{2} \lg x^2$  不是相同的函数.

例3 求函数  $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{5} + \sqrt{25-x^2}$  的定义域, 并求  $f(0)$  与  $f(1)$ .

解 要使算式有意义, 必须

$$\left| \frac{x-1}{5} \right| \leq 1 \quad \text{且} \quad 25-x^2 \geq 0$$

即  $|x-1| \leq 5$  且  $|x| \leq 5$ , 也就是  $-4 \leq x \leq 6$  且  $-5 \leq x \leq 5$

因此有  $-4 \leq x \leq 5$ , 于是函数的定义域为  $[-4, 5]$ .

因为  $0 \in [-4, 5]$ ,  $1 \in [-4, 5]$ , 所以  $f(0) = -\arcsin \frac{1}{5} + 5$ ,  $f(1) = 2\sqrt{6}$ .

若  $\forall x \in D$ , 通过法则  $f$ , 存在唯一一个实数  $y$  与  $x$  对应, 则称  $y = f(x)$  是  $x$  的单值函数, 否则称为多值函数. 例2、例3中的函数都是单值函数.

本书中若无特别声明, 所指的函数都是单值函数.

## 2. 函数的表示法

常用的函数表示法有解析法(公式法)、表格法和图形法.

## 3. 函数的图像

设函数  $y = f(x)$  定义在数集  $D$ , 坐标平面上的点集

$$\{P(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数  $y = f(x)$ ,  $x \in D$  的图像, 如图 1-1 所示.

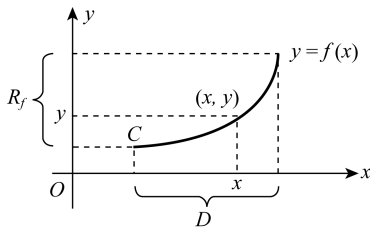


图 1-1



下面举几个函数的例子.

#### 例4 函数

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R_f = [0, +\infty)$ , 此函数称为绝对值函数.

#### 例5 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 它的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R_f = \{-1, 0, 1\}$ , 对于任何实数  $x$ , 下列关系成立:  $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$ .

**例6** 设  $x$  为任一实数, 不超过  $x$  的最大整数称为  $x$  的整数部分, 记作  $[x]$ .

例如,  $[5.67] = 5$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[-3.5] = -4$ ,  $[\frac{2}{3}] = 0$ ,  $[-2] = -2$  等.

对任一实数  $x$ , 函数  $y = [x]$  称为取整函数, 它的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R_f = Z$ .

在例4和例5中看到, 有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围内, 对应法则用不同的式子来表示的函数, 通常称为分段函数.

#### 例7 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1+x, & x > 1. \end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域  $D = [0, +\infty)$ . 当  $x \in [0, 1]$  时, 对应的函数值  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ; 当  $x \in (1, +\infty)$  时, 对应的函数值  $f(x) = 1+x$ . 例如,  $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ ,  $f(3) = 1+3 = 4$ .

应特别注意, 分段函数是用几个式子来表示一个函数, 而不是表示几个函数, 其定义域是每个式子自变量取值范围的并集.

## 二、函数的几种特性

### 1. 函数的有界性

设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 数集  $X \subset D$ , 如果存在正数  $M$ , 使得对任一  $x \in X$ , 恒有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有界, 或称  $f(x)$  是  $X$  上的有界函数, 如图 1-2 所示; 若这样的正数  $M$  不存在, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上无界, 或称  $f(x)$  是  $X$  上的无界函数, 如图 1-3 所示.

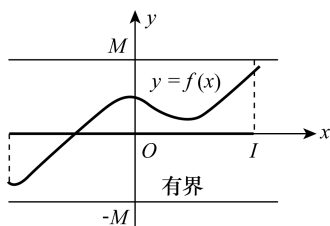


图 1-2

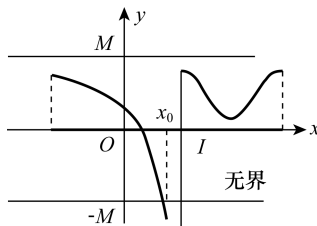


图 1-3

例如, 函数  $y = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界. 事实上, 对任一实数  $x$  都有不等式  $|\sin x| \leq 1$  成立. 这里  $M = 1$  [当然也可以取大于 1 的任何数作为  $M$  而使  $|f(x)| \leq M$  成立].

又如函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在开区间  $(0, 1)$  内是无界的, 因为不存在这样的正数  $M$ , 使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq M$  对于  $(0, 1)$  内的一切  $x$  都成立. 但是  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $[1, +\infty)$  内是有界的, 例如可取  $M = 1$  而使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$  对于一切  $x \in [1, +\infty)$  都成立.

## 2. 函数的单调性

设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subset D$ , 如果  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

则称  $f(x)$  在区间  $I$  上是单调递增函数, 如图 1-4 所示; 如果  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

则称  $f(x)$  在区间  $I$  上是单调递减函数, 如图 1-5 所示. 单调递增函数与单调递减函数统称为单调函数.

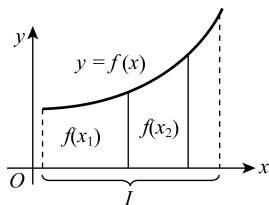


图 1-4

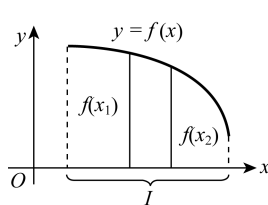


图 1-5

例如, 函数  $f(x) = x^2$  在区间  $[0, +\infty)$  上是单调递增的, 在区间  $(-\infty, 0]$  上是单调递减的; 而在区间  $(-\infty, +\infty)$  内函数  $f(x) = x^2$  不是单调的, 如图 1-6 所示.

## 3. 函数的奇偶性

设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称, 如果对于任一  $x \in D$ , 恒有

$$f(-x) = f(x),$$



则称函数  $f(x)$  为偶函数. 如果对于任一  $x \in D$ , 恒有

$$f(-x) = f(x),$$

则称函数  $f(x)$  为奇函数.

例如, 函数  $f(x) = x^2$  是偶函数, 因为  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ . 又如,  $f(x) = x^3$  是奇函数, 因为  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ . 同样, 函数  $y = \sin x$  是奇函数, 函数  $y = \cos x$  是偶函数. 函数  $y = \sin x + \cos x$  既非奇函数, 也非偶函数.

偶函数的图形关于  $y$  轴对称, 如图 1-6 所示, 奇函数的图形关于原点对称, 如图 1-7 所示.

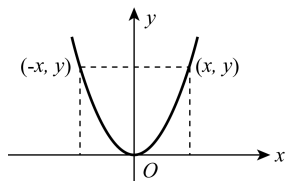


图 1-6

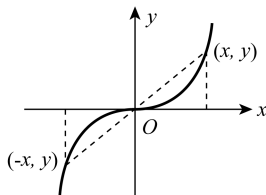


图 1-7

#### 4. 函数的周期性

设函数  $f(x)$  的定义域是  $D$ , 若存在正常数  $T$ , 使得对于任一  $x \in D$  有  $(x \pm T) \in D$ , 且

$$f(x + T) = f(x)$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为周期函数, 其中  $T$  称为  $f(x)$  的一个周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数  $y = \sin x, y = \cos x$  都是以  $2\pi$  为周期的周期函数; 函数  $\tan x$  是以  $\pi$  为周期的周期函数.

并非每个周期函数都有最小正周期. 下面的函数就属于这种情形.

**例 8** 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \in Q^c. \end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数, 任何正有理数  $r$  都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数, 所以它没有最小正周期.

周期函数在其定义域的每个长度为  $T$  的区间内具有相同的图像. 因此, 只要作出一个周期内的图像, 将其沿  $x$  轴的正负两方向平移, 就可以得到函数在其他周期内的图像.

### 三、初等函数

#### 1. 反函数

在给定的函数  $y = f(x), x \in D$  中, 若将  $y$  看成自变量,  $x$  看成因变量, 这样所确定的函数

$x = \varphi(y)$  称为函数  $y = f(x)$  的**反函数**, 记作  $x = f^{-1}(y)$  或  $y = f^{-1}(x)$ .

**定理** 严格单调函数一定存在反函数.

## 2. 复合函数

设  $y$  是  $u$  的函数  $y = f(u)$ , 其定义域为  $D_f$ , 而  $u$  是  $x$  的函数  $u = g(x)$ , 其值域为  $R_g$ , 若  $D_f \cap R_g \neq \emptyset$ , 则函数  $y = f(g(x))$  称为由函数  $u = g(x)$  和  $y = f(u)$  构成的**复合函数**. 其中  $u$  称为**中间变量**.

例如, 函数  $y = \sqrt{1-x^2}$  可看作由  $y = \sqrt{u}$  与  $u = 1-x^2$  复合而成.

函数  $g$  与  $f$  构成的复合函数, 即按“先  $g$  后  $f$ ”的次序复合的函数, 通常记为  $f \circ \varphi$ , 即  $(f \circ \varphi)(x) = f[g(x)]$ .

必须注意, 并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数, 例如  $y = f(u) = \arcsin u$  与  $u = g(x) = 2+x^2$  就不可能复合成为一个复合函数, 这是因为  $y = \arcsin u$  的定义域  $[-1, 1]$  与  $u = 2+x^2$  的值域  $[2, +\infty)$  的交集为空集.

复合函数也可以由两个以上的函数复合构成, 只要它们顺次满足构成复合函数的条件.

例如, 函数  $y = \sqrt{u}$ ,  $u = \cot v$ ,  $v = \frac{x}{2}$  可构成复合函数  $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$ , 其中  $u, v$  都是中间变量.

## 3. 函数的四则运算

给定两个函数  $f(x)$ ,  $x \in D_f$  和  $g(x)$ ,  $x \in D_g$ , 且  $D = D_f \cap D_g \neq \emptyset$ . 则我们可以定义  $f$  与  $g$  在  $D$  上的以下运算.

和(差)  $f \pm g$ :  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ ,  $x \in D$ ;

积  $f \cdot g$ :  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ,  $x \in D$ ;

商  $\frac{f}{g}$ :  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ,  $x \in D$ , 且  $g(x) \neq 0$ .

## 4. 初等函数

在数学的发展过程中, 形成了最简单、最常用的六类函数, 即常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数, 这六类函数统称为**基本初等函数**.

(1) 常数函数:  $y = c$  或  $f(x) = c$

$y = c$  或  $f(x) = c$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 其中  $c$  是常数. 它的图像是通过点  $(0, c)$ , 且平行于  $x$  轴的直线.

(2) 幂函数:  $y = x^\alpha$

形如  $y = x^\alpha$  的函数是幂函数, 其中  $\alpha$  是实数. 它的定义域与实数  $\alpha$  有关, 例如, 当  $\alpha = \frac{1}{3}$  时, 其定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 而当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时, 它的定义域为  $[0, +\infty)$ . 但不论  $\alpha$  何值, 它在  $(0, +\infty)$  内总有定义, 并且图像总经过点  $(1, 1)$ , 如图 1-8 所示.

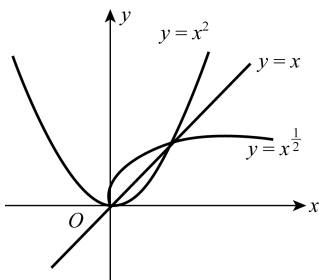


图 1-8

(3) 指数函数:  $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )

它的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 值域为  $(0, +\infty)$ , 其图像总在  $x$  轴上方, 且通过点  $(0, 1)$ . 当  $a > 1$  时, 函数单调递增, 如图 1-9 所示; 当  $0 < a < 1$  时, 函数单调递减, 如图 1-10 所示.

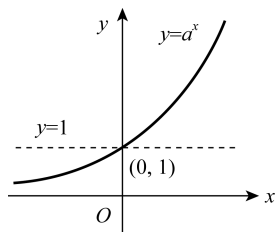


图 1-9

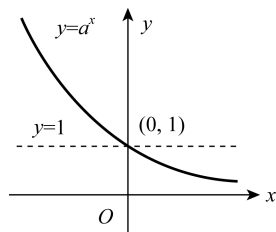


图 1-10

(4) 对数函数:  $y = \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )

它的定义域为  $(0, +\infty)$ , 值域为  $(-\infty, +\infty)$ , 其图像总通过点  $(1, 0)$ . 当  $a > 1$  时, 函数单调递增, 如图 1-11 所示; 当  $0 < a < 1$  时, 函数单调递减, 如图 1-12 所示. 对数函数与指数函数互为反函数.

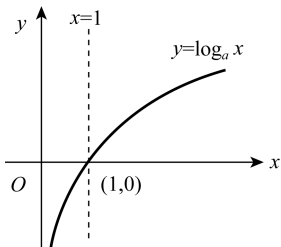


图 1-11

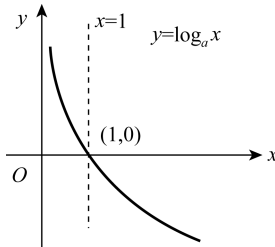


图 1-12

特别地, 当  $a = e$  时, 记为  $y = \ln x$ , 称为自然对数函数.

(5) 三角函数: 常用的三角函数有正弦函数、余弦函数、正切函数和余切函数, 如表 1-2 所示.