



高等院校电子信息类规划教材

电磁场与电磁波简明教程

(第2版)

主 编 刘文楷
副主编 董小伟 牛长流



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

前 言

“电磁场理论”是高等工科院校电类专业的一门专业基础课,同时也是一些交叉学科和新兴边缘学科发展的基础。电类专业的学生必须具备相关的知识,才能适应社会对高素质人才的需求。

由于目前很多电磁场理论教学用书内容过于复杂,学生普遍感到概念抽象、难学难懂。为了适应当前高等教育改革的特点,作者在总结多年教学经验的基础上,编写了《电磁场与电磁波简明教程》第1版,力求加强基础,注重物理概念,拓展实际问题,以激发学生对这门课程的兴趣,培养学生对基础知识的牢固掌握和灵活运用能力。

《电磁场与电磁波简明教程》第1版于2013年出版,作为高等工科院校电类专业本科生学习“电磁场理论”的一本简明教学用书,迄今已7年。根据使用本书的师生和读者的宝贵意见,我们在第1版的基础上进行了内容修订和扩充,编写过程中有意识地加强对基本规律、基本概念和基本分析方法的讲述,力求由特殊到一般、由简单到复杂循序渐进地加强读者对电磁模型的建立和定性分析能力。

本书的主要特点如下:

(1) 以矢量分析作为第1章,使学生掌握分析“场”的数学工具,为后续描述电磁场基本特征打下数学基础;

(2) 以基本电磁现象为起点,引出“静电场”和“恒定磁场”的概念,以基本方程为主线,结合边值问题,提出静电场和恒定磁场的分析方法,突出知识点的联系和区别;

(3) 以麦克斯韦方程为基础,引出时变电磁场的基本特征和平面波的传播规律,注重知识的概念性和延续性。

本书共分为6章,内容包括矢量分析、静电场、恒定电场、稳恒磁场、时变电磁场、平面电磁波的传播。各章后均附小结,突出重点;选编难易结合的习题,以便不同层次的读者可根据自身情况巩固对知识点的理解。附录给出了常用的物理量及单位,便于查阅。

由于作者水平有限,对于书中不妥和错误之处,欢迎使用本书的师生和其他读者批评指正。

目 录

第 1 章 矢量分析	1
1.1 标量和矢量	1
1.1.1 标量	1
1.1.2 矢量	1
1.1.3 单位矢量	1
1.1.4 矢量的分量	2
1.1.5 矢量的运算	2
1.2 三种坐标系	4
1.2.1 直角坐标系	4
1.2.2 圆柱坐标系	5
1.2.3 球坐标系	6
1.2.4 三种坐标系中的微分元	7
1.3 标量场的梯度	9
1.4 矢量场的通量和散度	11
1.4.1 矢量场的通量	11
1.4.2 矢量场的散度	11
1.4.3 散度定理	12
1.5 矢量的环量和旋度	12
1.5.1 矢量的环量	12
1.5.2 矢量的旋度	12
1.6 矢量场的若干定理和场的分类	14
1.6.1 格林定理	14
1.6.2 唯一性定理	15
1.6.3 亥姆霍兹定理	16
1.6.4 场的分类	16
1.7 矢量恒等式	17

本章小结	17
习题 1	18
第 2 章 静电场	22
2.1 库仑定律	22
2.2 电场强度	24
2.3 真空中的高斯定理	28
2.3.1 电场线	28
2.3.2 电场通量	29
2.3.3 真空中的高斯定理	29
2.3.4 高斯定理的应用	31
2.4 电位及其梯度	32
2.4.1 静电场力做功	32
2.4.2 电位及其梯度	34
2.4.3 电位的计算	35
2.5 介质中的静电场	36
2.5.1 介质的极化	36
2.5.2 介质中静电场的基本方程	39
2.6 边界衔接条件	41
2.6.1 电场强度满足的衔接条件	41
2.6.2 电位移满足的衔接条件	42
2.6.3 静电场的折射定理	43
2.6.4 导体和介质的分界面上场量满足的衔接条件	43
2.6.5 位函数的衔接条件	44
2.7 静电场的边值问题	45
2.7.1 电位满足的方程	46
2.7.2 边界条件	46
2.8 镜像法	51
2.8.1 点电荷与无限大的导体平面	51
2.8.2 点电荷与接地导体球面	52
2.8.3 点电荷与无限大的介质平面	54
2.9 直角坐标系中的分量变量法	56
2.10 静电场的能量	60
2.10.1 静电场的储能	60
2.10.2 静电场能量的分布	62
本章小结	63
习题 2	65
第 3 章 恒定电场	71
3.1 电流及其密度	71
3.1.1 电流	71

3.1.2 电流密度	72
3.1.3 电荷守恒定律和电流连续性方程	73
3.2 电源及其电动势	74
3.2.1 导电媒质的损耗	74
3.2.2 电源及其电动势	75
3.3 恒定电场的基本方程 分界面上的衔接条件	76
3.3.1 恒定电场的基本方程	76
3.3.2 分界面上的衔接条件	77
3.4 恒定电场的边值问题	77
本章小结	79
习题3	80
第4章 稳恒磁场	84
4.1 磁感应强度	84
4.1.1 毕奥-萨伐尔定律	84
4.1.2 磁通连续性原理	87
4.1.3 安培力定律	88
4.2 安培环路定理	89
4.2.1 真空中的安培环路定理	89
4.2.2 媒质的磁化	89
4.2.3 媒质中的安培环路定理	91
4.3 磁矢位和磁标位	93
4.3.1 磁矢位	93
4.3.2 磁标位	95
4.4 恒定磁场的基本方程 分界面上的衔接条件	95
4.4.1 恒定磁场的基本方程	95
4.4.2 不同媒质分界面上的衔接条件	96
4.5 恒定磁场的边值问题	99
4.5.1 位函数满足的微分方程	99
4.5.2 恒定磁场的边值问题	100
4.6 镜像法	101
4.7 电感	104
4.7.1 自感	104
4.7.2 互感	104
4.8 磁场的能量	106
本章小结	108
习题4	110
第5章 时变电磁场	116
5.1 麦克斯韦方程	116
5.1.1 麦克斯韦第一方程——修正的安培环路定理和全电流连续性方程	116

5.1.2	麦克斯韦第二方程——电磁感应定律的广义化	118
5.1.3	麦克斯韦第三方程和第四方程	120
5.1.4	辅助方程	122
5.2	时变电磁场的边界条件	122
5.2.1	一般情况	122
5.2.2	特殊情况	123
5.3	时变电磁场的能量关系	125
5.4	时变场的动态位	129
5.4.1	动态位	129
5.4.2	动态位的微分方程	129
5.5	时变电磁场的复数形式	131
5.5.1	正弦电磁场的复数表示法	131
5.5.2	麦克斯韦方程的复数形式	132
5.5.3	坡印廷定理的复数形式	133
5.5.4	动态位的复数形式	134
5.6*	麦克斯韦方程的数值计算	136
	本章小结	139
	习题 5	140
第 6 章	平面电磁波的传播	146
6.1	电磁波动方程	146
6.1.1	自由空间电磁波动方程	146
6.1.2	平面电磁波及基本性质	147
6.2	理想介质中的均匀平面电磁波	149
6.2.1	一维波动方程的解及其物理意义	149
6.2.2	理想介质中的正弦均匀平面波	151
6.2.3	计算举例	153
6.3	导电媒质中的均匀平面电磁波	155
6.3.1	导电媒质中正弦均匀平面波的传播	155
6.3.2	低损耗介质中的正弦均匀平面波	158
6.3.3	良导体中的正弦均匀平面波	158
6.3.4	计算举例	159
6.4	均匀平面电磁波的反射与透射	161
6.4.1	反射定律与透射定律	161
6.4.2	反射系数与透射系数	162
6.4.3	垂直入射电磁波的反射与透射	165
	本章小结	169
	习题 6	171
	参考文献	176
	附录 常用的物理量及单位	178

第 1 章 矢量分析

电磁场理论着重于研究电磁现象及电磁场与电磁波的基本规律,其中所涉及的一些物理量,如电场强度、磁场强度等都具有确切的物理意义。当这些物理量的描述与空间坐标或方向有关时,通常需要采用矢量的方法进行描述,这些矢量在空间的分布就构成了所谓的矢量场。为了方便后续各章的学习,本章首先介绍一些基本的矢量分析和场的相关知识。

1.1 标量和矢量

1.1.1 标量

只有大小的物理量称为标量,例如,温度、质量、功等。

1.1.2 矢量

既有大小又有方向的物理量称为矢量,例如,力、速度、加速度、电场强度等。本书中统一用字母上面加“ \rightarrow ”来表示矢量。矢量 \vec{A} 和 \vec{B} 只有在大小相等、方向相同时,才能称这两个矢量相等,即 $\vec{A} = \vec{B}$ 。在坐标系中,矢量用有方向的线段来表示,有向线段的长度表示矢量的大小,有向线段的指向表示矢量的方向。

1.1.3 单位矢量

模为 1 的矢量称为单位矢量,单位矢量的方向与矢量的方向一致。本书中单位矢量以 \hat{e} 来表示,即 $\hat{e}_A = \vec{A} / |\vec{A}|$,因此 $\vec{A} = A\hat{e}_A$,

其中 $A = |\vec{A}|$ 。

1.1.4 矢量的分量

坐标系中的一个矢量可以用三个方向上的分量来表示。例如,在直角坐标系中,矢量 \vec{A} 可以表示为

$$\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z \quad (1-1)$$

式中, A_x 、 A_y 、 A_z 分别为 x 、 y 、 z 三个坐标轴上的分量, \hat{e}_x 、 \hat{e}_y 、 \hat{e}_z 分别为三个坐标轴方向上的单位矢量。

在直角坐标系中, \hat{e}_A 可以表示为

$$\hat{e}_A = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \hat{e}_x + \frac{A_y}{|\vec{A}|} \hat{e}_y + \frac{A_z}{|\vec{A}|} \hat{e}_z \quad (1-2)$$

1.1.5 矢量的运算

1. 矢量的加法

矢量的加法运算满足平行四边形法则,如图 1-1 所示。

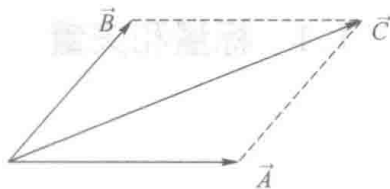


图 1-1 平行四边形法则

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} \quad (1-3)$$

矢量的加法满足交换律,即

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (1-4)$$

同时,矢量的加法也满足结合律,即

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \quad (1-5)$$

两个矢量相加就是对应坐标轴上的分量相加。例如,在直角坐标系中,若矢量 $\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z$, 矢量 $\vec{B} = B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z$, 则 $\vec{A} + \vec{B}$ 在三个坐标轴上的分量分别为 $A_x + B_x$ 、 $A_y + B_y$ 、 $A_z + B_z$ 。

2. 矢量与标量的乘积

一个矢量乘以一个标量的结果仍然是一个矢量。例如, $\vec{C} = b\vec{A}$,

矢量 \vec{C} 的大小是矢量 \vec{A} 的 $|b|$ 倍, 当 $b > 0$ 时, 矢量 \vec{C} 与矢量 \vec{A} 的方向一致; 当 $b < 0$ 时, 矢量 \vec{C} 与矢量 \vec{A} 的方向相反。

3. 矢量的点积和叉积

(1) 矢量的点积

矢量的点积又称为矢量的内积, 以“ \cdot ”表示, 即

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad (1-6)$$

式中, θ 为矢量 \vec{A} 和 \vec{B} 的夹角, 如图 1-2 所示。

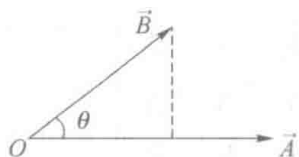


图 1-2 矢量的点积

显然

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{cases} 0 & \vec{A} \perp \vec{B} \\ |\vec{A}| |\vec{B}| & \vec{A} // \vec{B} \end{cases} \quad (1-7)$$

在直角坐标系中, 如果矢量 \vec{A} 和矢量 \vec{B} 在三个坐标轴上的分量分别为 A_x, A_y, A_z 和 B_x, B_y, B_z , 则两个矢量的点积为

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-8)$$

即两个矢量的点积是一个标量, 数值上等于两个矢量对应坐标轴上各分量之积的和。两个矢量之间的点积满足:

$$\text{① 交换律: } \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (1-9)$$

$$\text{② 分配律: } \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (1-10)$$

(2) 矢量的叉积

矢量的叉积又称矢量的外积或矢积, 以“ \times ”来表示。

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \quad (1-11)$$

式中, θ 为矢量 \vec{A} 和 \vec{B} 的夹角。如图 1-3 所示, 矢量 $\vec{A} \times \vec{B}$ 与矢量 \vec{A} 和矢量 \vec{B} 构成右手螺旋关系。即两个矢量的矢积的方向垂直于矢量 \vec{A} 和矢量 \vec{B} 所构成的平面。

在直角坐标系中, 如果两个矢量 \vec{A} 和 \vec{B} 分别为

$$\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z$$

$$\vec{B} = B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z$$

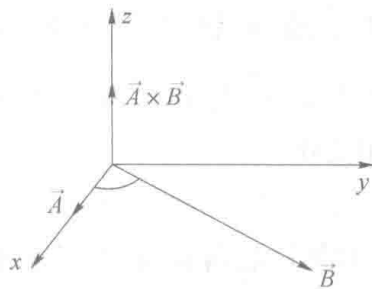


图 1-3 矢量的叉积

则

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \\ &\quad \hat{e}_z (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \quad (1-12)$$

1.2 三种坐标系

1.2.1 直角坐标系

直角坐标系由三个相互正交的直线构成,这三条直线分别称为 x 轴、 y 轴、 z 轴,三轴的交点称为坐标原点 O 。直角坐标系中,空间任意一点 P 的位置由其在三个坐标轴上的投影确定,如图 1-4 所示,位置矢量是由原点指向 P 点的矢量,可表示为

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \quad (1-13)$$

式中, x, y, z 是 P 在三个坐标轴上的投影。

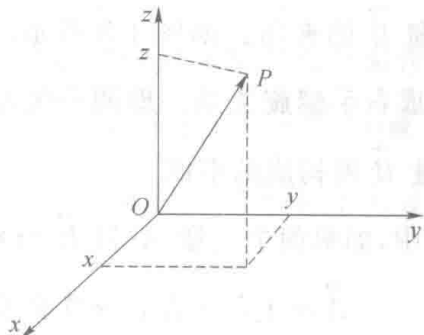


图 1-4 直角坐标系

在直角坐标系中,三个方向上的单位矢量 \hat{e}_x 、 \hat{e}_y 、 \hat{e}_z 满足以下关系:

$$\begin{aligned}\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x &= \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1 \\ \hat{e}_x \cdot \hat{e}_y &= \hat{e}_y \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_x \cdot \hat{e}_z = 0 \\ \hat{e}_x \times \hat{e}_y &= \hat{e}_z, \hat{e}_y \times \hat{e}_z = \hat{e}_x, \hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y\end{aligned}\quad (1-14)$$

1.2.2 圆柱坐标系

如图 1-5 所示,在圆柱坐标系中,三个方向上的单位矢量分别为 \hat{e}_ρ 、 \hat{e}_ϕ 、 \hat{e}_z ,任意一点的位置可由 ρ 、 ϕ 、 z 确定,其中 ρ 为原点 O 到 P 点的距离在 xy 平面上的投影长度, ϕ 为此投影与 x 轴的夹角,通常称为方位角,取值范围为 $[0, 2\pi]$, z 与直角坐标相同。直角坐标系和圆柱坐标系的各个分量之间的关系为

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \\ r^2 &= \rho^2 + z^2\end{aligned}\quad (1-15)$$

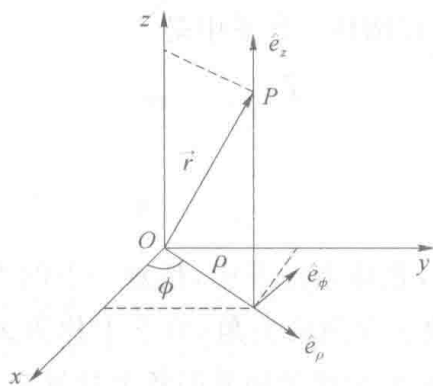


图 1-5 圆柱坐标系

圆柱坐标系中单位矢量的点积和叉积满足如下关系:

$$\begin{aligned}\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho &= \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1 \\ \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi &= \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\phi = 0 \\ \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi &= \hat{e}_z, \hat{e}_\phi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho, \hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi\end{aligned}\quad (1-16)$$

两种坐标系单位矢量之间的变换关系写成矩阵的形式为

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix}\quad (1-17)$$

若矢量 \vec{A} 在直角坐标系中表示为 $\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z$, 而在圆柱坐标系中表示为 $\vec{A} = A_\rho \hat{e}_\rho + A_\phi \hat{e}_\phi + A_z \hat{e}_z$, 其中 A_ρ, A_ϕ, A_z 分别为圆柱坐标系中的分量, 则两种坐标系中各分量的变换关系为

$$\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1-18)$$

例 1-1 写出空间任意一点在直角坐标系的位置矢量的表示式。然后将此位置矢量变换成在圆柱坐标系中的一个矢量。

解: 空间任意一点 $P(x, y, z)$ 的位置矢量是

$$\vec{A} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

利用式(1-18)中的变换矩阵, 得

$$A_\rho = x \cos \phi + y \sin \phi$$

$$A_\phi = -x \sin \phi + y \cos \phi$$

$$A_z = z$$

代入 $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$ 得到

$$A_\rho = \rho, A_\phi = 0, A_z = z$$

于是, 位置矢量 \vec{A} 在圆柱坐标系中是

$$\vec{A} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$$

1.2.3 球坐标系

如图 1-6 所示, 在球坐标系中, 任意一点的坐标可用 r, θ, ϕ 确定, θ 为矢量与 z 轴正方向的夹角(数学上称为天顶角), 取值范围为 $[0, \pi]$ 。直角坐标系与球坐标系的各个分量之间的关系为

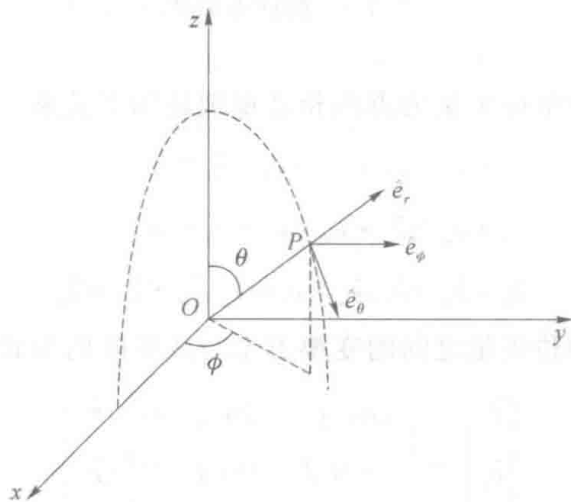


图 1-6 球坐标系

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \phi \\
 y &= r \sin \theta \sin \phi \\
 z &= r \cos \theta \\
 r^2 &= x^2 + y^2 + z^2
 \end{aligned} \tag{1-19}$$

在球坐标系中,单位矢量满足点积和叉积的关系为

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r &= \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = 1 \\
 \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi &= \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = 0 \\
 \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi &= \hat{e}_r, \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta, \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi
 \end{aligned} \tag{1-20}$$

两种坐标系单位矢量之间的变换关系写成矩阵的形式为

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} \tag{1-21}$$

若矢量 \vec{A} 在直角坐标系表示为 $\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z$, 而在球坐标系中表示为 $\vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\theta \hat{e}_\theta + A_\phi \hat{e}_\phi$, 其中 A_r, A_θ, A_ϕ 分别为球坐标系中的分量。两种坐标系中各分量的变换关系为

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} \tag{1-22}$$

1.2.4 三种坐标系中的微分元

在电磁场中常常需要完成线、面、体积分,因此需要关注三种微分元在不同坐标系中的表达形式。

1. 直角坐标系中的微分元

直角坐标系中,有向长度的微小变化 $d\vec{l}$ 可以用三个方向的微小变化的矢量和表示为

$$d\vec{l} = \hat{e}_x dx + \hat{e}_y dy + \hat{e}_z dz \tag{1-23}$$

有向曲面的微小增量 $d\vec{S}$ 可分解为在三个坐标平面上的投影,如图 1-7 所示。

$$d\vec{S}_x = \hat{e}_x dydz, \quad d\vec{S}_y = \hat{e}_y dxdz, \quad d\vec{S}_z = \hat{e}_z dxdy \tag{1-24}$$

体积微分元 dV 可表示为沿三个坐标轴方向微小增量之积,即

$$dV = dxdydz \tag{1-25}$$

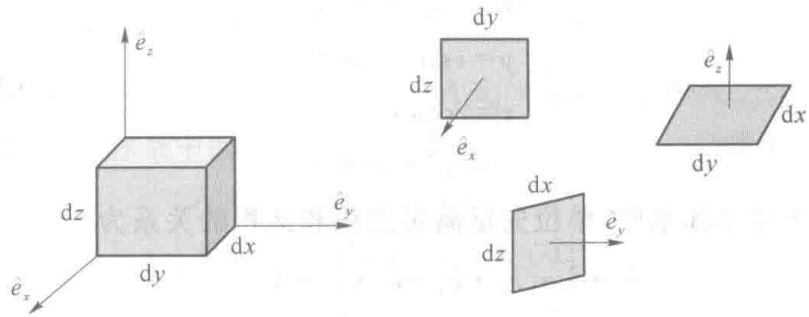


图 1-7 直角坐标系中的微分元

2. 圆柱坐标系中的微分元

如图 1-8 所示,圆柱坐标系中长度、面积、体积微分元的表示分别为

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= \hat{e}_\rho d\rho + \hat{e}_\phi \rho d\phi + \hat{e}_z dz \\ d\vec{S}_\rho &= \hat{e}_\rho \rho d\phi dz, d\vec{S}_\phi = \hat{e}_\phi d\rho dz, d\vec{S}_z = \hat{e}_z \rho d\rho d\phi \\ dV &= \rho d\rho d\phi dz \end{aligned} \quad (1-26)$$

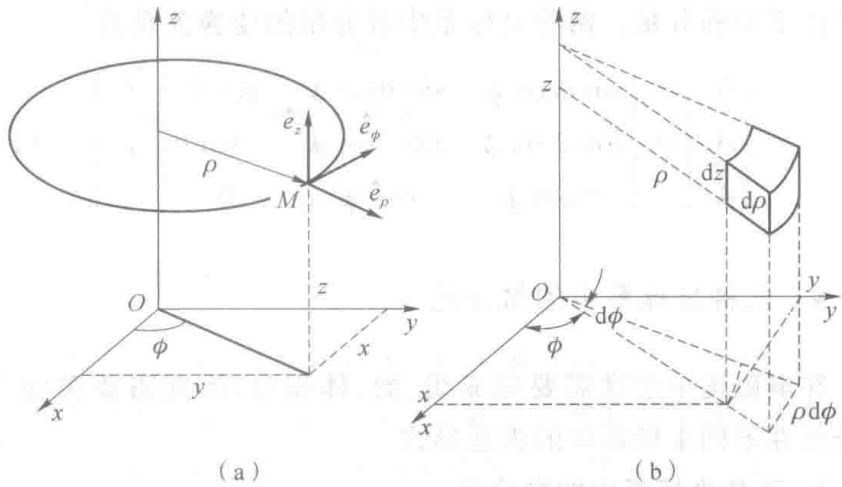


图 1-8 圆柱坐标系中的微分元

3. 球坐标系中的微分元

如图 1-9 所示,球坐标系中,长度、面积、体积的微分元分别表示为

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= \hat{e}_r dr + \hat{e}_\theta r d\theta + \hat{e}_\phi r \sin \theta d\phi \\ d\vec{S}_r &= \hat{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi, d\vec{S}_\theta = \hat{e}_\theta r \sin \theta dr d\phi, d\vec{S}_\phi = \hat{e}_\phi r dr d\theta \\ dV &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \end{aligned} \quad (1-27)$$

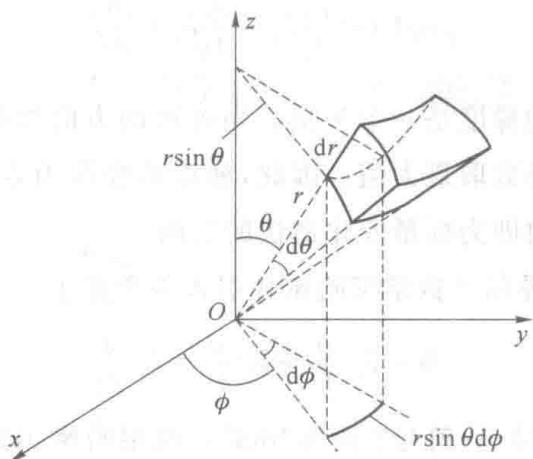


图 1-9 球坐标系中的微分元

1.3 标量场的梯度

所谓场,就是一个函数,这个函数描述物理量在一定空间区域的分布情况。因为物理量有标量和矢量之分,所以场就分为标量场和矢量场。

对于一个标量场来说,因为场中各点标量的大小可能不同,同时标量沿各个方向的变化率也不尽相同,通常用方向导数描述场的这种特性,标量场 f 在空间某一点沿某一方向上的变化率称为标量场的方向导数。

在直角坐标系中,标量场 f 沿矢量 \vec{l} (其单位矢量为 $\hat{e}_l = \hat{e}_x \cos \alpha + \hat{e}_y \cos \beta + \hat{e}_z \cos \gamma$, 其中 α, β, γ 为矢量 \vec{l} 与三个坐标轴的夹角) 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-28)$$

令

$$\vec{g} = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

则方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{g} \cdot \hat{e}_l$$

称矢量 \vec{g} 为标量场 f 的梯度,用 $\text{grad } f$ 表示,即

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \quad (1-29)$$

可见,标量场的梯度是一个矢量。当梯度的方向与矢量 \vec{l} 的方向一致时,方向导数取最大值。因此,梯度的模即为方向导数的最大值,梯度的方向即为标量变化最快的方向。

1846年,爱尔兰数学家哈密顿引入一个算子

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-30)$$

被称为哈密顿算子,符号 ∇ 读作“del”。利用哈密顿算子,梯度可表示为

$$\text{grad } f = \nabla f = \hat{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1-31)$$

本书中将大量使用哈密顿算子,现对其进行说明。

(1) 哈密顿算子是一个矢量运算符号,它是微分算符与矢量的结合。

(2) 哈密顿算子仅仅是一个运算符号,其本身没有意义,它只对右边的量产生作用。

(3) 哈密顿算子在不同坐标系中的表达形式不同。例如,在圆柱坐标系和球坐标系中,其表达形式分别为

$$\nabla = \hat{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1-32)$$

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

定义 $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ 为拉普拉斯算子,在直角坐标系中拉普拉斯算子表示为

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-33)$$

拉普拉斯算子对标量函数 f 的作用在圆柱坐标系和球坐标系中写为

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (1-34)$$

1.4 矢量场的通量和散度

1.4.1 矢量场的通量

在矢量场 \vec{A} 中,取一个有向曲面 \vec{S} , \vec{A} 在有向曲面上的面积分称为矢量在曲面 \vec{S} 上的通量,即

$$\Psi = \int \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int \vec{A} \cdot \hat{e}_n dS = \int A \cos \theta dS \quad (1-35)$$

式中, \hat{e}_n 为面积元 $d\vec{S}$ 的法线方向,与面积元边界曲线的环绕方向遵循右手螺旋关系, θ 为矢量 \vec{A} 与面积元法线的夹角。由式(1-35)可以看出,通量是一个标量。

如果所取的曲面 \vec{S} 为闭合曲面,则用

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{e}_n dS = \oint_S A \cos \theta dS \quad (1-36)$$

表示矢量穿过闭合曲面的通量,通常规定闭合曲面的外法线方向为有向曲面的方向。矢量穿过闭合曲面的通量描述场源的性质,当穿过闭合曲面的通量 $\Psi > 0$ 时,认为闭合曲面中存在产生该矢量场的正源;当穿过闭合曲面的通量 $\Psi < 0$ 时,认为曲面中存在汇聚该矢量场的负源(或洞)。

1.4.2 矢量场的散度

上述通量的概念仅能描述闭合曲面中源的总量,不能说明闭合曲面内每一点源的分布特性。如果令包围某点的闭合曲面向该点无限收缩,则穿过这个无限小闭合曲面的通量即可表示该点附近源的分布特性。因此,曲面 \vec{S} 向某点无限收缩时,矢量 \vec{A} 穿过该闭合曲面的通量与该闭合曲面所包围的体积之比,定义为矢量 \vec{A} 在该点的散度,以 $\text{div } \vec{A}$ 表示,即

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (1-37)$$

式中, ΔV 为闭合曲面 \vec{S} 包围的体积。式(1-37)表明,散度是标量,可理解为通量密度。