

从宇宙的深奥谜题，到科技的发明创造，再到日常的衣食住行，
微积分的力量无处不在

微积分的力量

[美] 史蒂夫·斯托加茨 著 任烨 译
(Steven Strogatz)

infinite
powers

How Calculus Reveals the Secrets of the Universe

中信出版集团

微积分的力量

[美] 史蒂夫·斯托加茨 著 任烨 译
(Steven Strogatz)

infinite
powers

How Calculus Reveals the Secrets of the Universe

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分的力量 / (美) 史蒂夫·斯托加茨著; 任焯译. —北京: 中信出版社, 2021.1 (2021.4重印)
书名原文: Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe
ISBN 978-7-5217-2329-8

I. ①微… II. ①史… ②任… III. ①微积分-普及读物 IV. ①O172-49

中国版本图书馆CIP数据核字 (2020) 第195920号

Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe by Steven Strogatz

Copyright © 2019 by Steven Strogatz

Illustrations © 2019 by Margaret C. Nelson

Simplified Chinese translation copyright © 2021 by CITIC Press Corporation

All rights reserved

本书简体中文版权限中国大陆地区发行销售

微积分的力量

著者: [美] 史蒂夫·斯托加茨

译者: 任焯

出版发行: 中信出版集团股份有限公司

(北京市朝阳区惠新东街甲4号富盛大厦2座 邮编 100029)

承印者: 北京盛通印刷股份有限公司

开本: 787mm × 1092mm 1/16

印张: 23.75

字数: 260千字

版次: 2021年1月第1版

印次: 2021年4月第7次印刷

京权图字: 01-2020-6710

书号: ISBN 978-7-5217-2329-8

定价: 69.00元

版权所有·侵权必究

如有印刷、装订问题, 本公司负责调换。

服务热线: 400-600-8099

投稿邮箱: author@citicpub.com

目录

引言 // 001

写给每个人的微积分读物	// 002
由微积分主宰的世界	// 004
微积分不只是一种语言	// 006
不合理的有效性	// 007
无穷原则	// 008
石巨人与无穷	// 010
曲线、运动和变化	// 011

第 1 章 无穷的故事 // 019

作为桥梁的无穷	// 023
比萨证明	// 024
极限与墙之谜	// 028
0.333... 的故事	// 030
无穷多边形的故事	// 032
无穷的魅力和危险	// 033
除数为 0 的禁忌	// 034
实无穷之罪	// 036

	芝诺悖论	// 037
	芝诺悖论走向数字化	// 040
	当芝诺悖论遇上量子力学	// 042
第 2 章	驾驭无穷的勇士	// 047
	夹逼法与圆周率	// 051
	圆周率之道	// 055
	立体主义与微积分	// 057
	奶酪论证	// 062
	阿基米德方法	// 065
	从计算机动画到面部手术	// 074
	探索运动之谜	// 079
第 3 章	运动定律的探索之旅	// 081
	亚里士多德的世界观	// 084
	伽利略出场	// 088
	下落、滚动与奇数定律	// 090
	科学极简主义的艺术	// 093
	从摆动的吊灯到 GPS	// 095
	开普勒与行星运动之谜	// 102
	开普勒第一定律：椭圆轨道	// 105
	开普勒第二定律：相等的时间，相等的面积	// 107
	开普勒第三定律：行星的公转周期	// 109
	开普勒与伽利略的异同点	// 110
	阴云密布	// 112

第 4 章	微分学的黎明	// 115	
			代数在东方的崛起 // 118
			代数的兴起与几何学的衰落 // 119
			代数与几何学的邂逅 // 121
			方程与曲线 // 124
			在一起,会更好 // 126
			费马 vs 笛卡儿 // 126
			寻找失传已久的发现方法——分析 // 129
			行李箱的优化问题 // 131
			费马如何帮助了美国联邦调查局? // 135
			最短时间原理 // 142
			关于切线的争论 // 146
			近在眼前的应许之地 // 149
第 5 章	微积分的十字路口	// 151	
			函数的作用 // 155
			幂函数 // 156
			指数函数 // 157
			10 的次方 // 158
			对数 // 161
			自然对数及其指数函数 // 164
			指数增长与指数式衰减的机制 // 167
第 6 章	变化率和导数	// 171	
			微积分的三大核心问题 // 175

	线性函数及其恒定的变化率	// 178
	非线性函数及其不断变化的变化率	// 182
	作为昼长变化率的导数	// 186
	作为瞬时速度的导数	// 191
第 7 章	隐秘的源泉	// 199
	面积、积分和基本定理	// 202
	运动使基本定理更直观	// 203
	恒定的加速度	// 206
	用油漆滚筒证明基本定理	// 210
	基本定理的意义	// 213
	积分学的圣杯	// 214
	局部 vs 整体	// 219
	一个孤寂的男孩	// 221
	玩转幂级数	// 223
	混搭大师	// 228
	私密的微积分	// 229
第 8 章	思维的虚构产物	// 233
	眨眼之间	// 237
	无穷小量	// 238
	2.001 的立方	// 240
	微分	// 242
	微分求导法	// 243
	通过微分推导出基本定理	// 245

	莱布尼茨是如何发现微分和基本定理的?	// 248
	在微积分的帮助下对抗 HIV	// 255
第 9 章	宇宙的逻辑	// 263
	自然的逻辑	// 267
	二体问题	// 272
	牛顿力学与《隐藏人物》	// 275
	牛顿微积分与《独立宣言》	// 276
	连续体与离散集	// 278
	常微分方程与偏微分方程	// 279
	偏微分方程与波音 787 客机	// 282
	无处不在的偏微分方程	// 285
第 10 章	波、微波炉和脑成像	// 287
	弦理论	// 292
	为什么是正弦波?	// 296
	振动模态的可视化: 克拉德尼图形	// 299
	最值得尊崇的勇气	// 301
	微波炉	// 302
	为什么微波炉最初被称作雷达灶?	// 303
	CT 与脑成像	// 304
第 11 章	微积分的未来	// 311
	DNA 的缠绕数	// 315
	决定论及其局限性	// 318

	非线性	// 320
	混沌	// 322
	庞加莱图	// 324
	走上战场的非线性	// 326
	微积分与计算机联盟	// 327
	复杂系统与高维诅咒	// 328
	计算机、人工智能和洞察力之谜	// 332
结语	// 337	
	小数点后 8 位	// 337
	发现正电子	// 339
	可以理解的宇宙	// 341
致谢	// 345	
注释	// 349	

引言

没有微积分，我们就不会拥有手机、计算机和微波炉，也不会拥有收音机、电视、为孕妇做的超声检查，以及为迷路的旅行者导航的GPS（全球定位系统）。我们更无法分裂原子、破解人类基因组或者将宇航员送上月球，甚至有可能无缘于《独立宣言》。

有一种罕见而有趣的历史观点认为，世界被一个神秘的数学分支彻底改变了。一个最初与形状相关的理论，最终又如何重塑了文明？

我们可以从物理学家理查德·费曼的一句妙语中洞见这个问题的答案，这句话是他在与小说家赫尔曼·沃克讨论曼哈顿计划时说的。当时沃克正在为他计划写作的一部关于“二战”的长篇小说做调研，他去加州理工学院采访了参与过原子弹研发的物理学家，费曼就是其中之一。采访结束临别之际，费曼问沃克是否了解微积分。沃克坦承他并不了解，于是费曼说道：“你最好学学微积分，它是上帝的语言。”¹

宇宙是高度数学化的，²但原因尚无人知晓。这或许是包含我们在内的宇宙的唯一可行的存在方式，因为非数学化的宇宙无法庇护能够提出这个问题的智慧生命。无论如何，一个神秘且不可思议的事实是，我们的宇宙遵循的自然律最终总能用微积分的语言和微分方程的形式表达出来。这类方程能描述某个事物在这一刻和在下一刻之间的差异，或者某个事物在这一点和在与该点无限接近的下一个点之间的差异。尽管细节

会随着我们探讨的具体内容而有所不同，但自然律的结构总是相同的。这个令人惊叹的说法也可以表述为，似乎存在着某种类似宇宙密码的东西，即一个能让万物时时处处不断变化的操作系统。微积分利用了这种规则，并将其表述出来。

艾萨克·牛顿是最早瞥见这一宇宙奥秘的人。他发现行星的轨道、潮汐的韵律和炮弹的弹道都可以用一组微分方程来描述、解释和预测。如今，我们把这些方程称为牛顿运动定律和万有引力定律。自牛顿以来，每当有新的宇宙奥秘被揭开，我们就会发现同样的模式一直有效。从古老的土、空气、火和水元素到新近的电子、夸克、黑洞和超弦，宇宙中所有无生命的东西都遵从微分方程的规则。我敢打赌，这就是费曼说“微积分是上帝的语言”时想要表达的意思。如果有什么东西称得上宇宙的奥秘，那么非微积分莫属。

人类在不经意间发现了这种奇怪的语言（先是在几何学的隐秘角落里，后来是在宇宙密码中），然后学会熟练地运用它，并破译了它的习语和微妙之处，最终利用它的预测能力去重构世界。

这是本书的中心论点。

如果这个论点是正确的，那么它意味着关于生命、宇宙和万物的终极问题的答案³并不是42，为此我要向道格拉斯·亚当斯和《银河系漫游指南》的粉丝致歉。但“深思”（《银河系漫游指南》中的一台超级计算机）的解题思路是正确的，因为宇宙的奥秘确实是一系列数学问题。

写给每个人的微积分读物

费曼的那句妙语“微积分是上帝的语言”，引出了许多深奥的问题。什么是微积分？人类如何断定它是上帝的语言（或者说，宇宙基于这种

语言在运转)？什么是微分方程？在牛顿的时代和我们的时代，微分方程为世界带来了什么？最后，这些故事和观点如何能被有趣且清楚易懂地传达给像赫尔曼·沃克那样的友善读者呢，他们勤于思考、充满好奇心、知识渊博但几乎没有学过高等数学？

沃克在他与费曼邂逅故事的结尾部分写道，他在14年里始终没有抽出时间学习微积分。他的关于“二战”的长篇小说从原计划的一部变成了两部——《战争风云》和《战争与回忆》，每部都长达1000页左右。在完成这两部小说后，他试图通过阅读像《微积分一点通》这样的书自学微积分，但效果并不好。他翻阅了几本教科书，用他自己的话说，就是希望“遇到一本合适的书，它可以帮助像我这样对数学几乎一窍不通的人。⁴我在青少年时期产生了探寻存在之意义的渴求，大学期间就只学习了文学与哲学等人文学科，所以我并不知道别人口中艰涩、无趣、毫无用处的微积分竟然是上帝的语言”。在发现自己看不懂教科书之后，他聘请了一位以色列的数学家教，希望能跟着他学点儿微积分，顺便提升一下希伯来语口语水平，但这两个愿望都落空了。最后，绝望的他旁听了高中的微积分课程，但因为进度落后太多，几个月后他不得不放弃。在他走出教室时，孩子们一起为他鼓掌，他说这就像对一场可怜的表演报以同情的掌声。

我之所以写作本书，就是为了让每个人都能了解关于微积分的最精彩思想和故事。我们没必要采用赫尔曼·沃克的方法去学习人类历史上这个具有里程碑意义的学科，尽管微积分是人类最具启迪性的集体成就之一。我们不必为了理解微积分的重要性而学习如何做运算，就像我们不必为了享用美食而学习如何做佳肴一样。我将借助图片、隐喻和趣闻逸事等，尝试解释我们需要了解的一切。我也会给你们介绍有史以来最精致的一些方程和证明，就像我们在参观画廊的时候不会错过其中的代

表作一样。至于赫尔曼·沃克，在我写作本书的时候，他已经103岁了。我不知道他有没有学会微积分，如果还没有，这本书就很适合沃克先生。

由微积分主宰的世界

现在你应该很清楚，我将从应用数学家的角度讲述微积分的故事和重要性。而数学史家则会选择不同的角度，⁵纯粹数学家亦然。作为一名应用数学家，真正吸引我的是我们周围的现实世界和我们头脑中的理想世界之间的相互作用。外界的现象引导着我们提出数学问题；反过来，我们的数学想象有时也会预言现实世界中的事情。当这一切真正发生时，将会产生不可思议的效果。

要想成为一位应用数学家，⁶既要有外向型思维，又要有广博的知识。对我们这个领域的人来说，数学并不是一个由自我附和的定理和证明构成的原始、封闭的世界。⁷我们会欣然接受各种各样的学科：哲学，政治学，科学，历史，医学，等等。所以，我想给大家讲述的故事是：由微积分主宰的世界。

这是一种比以往更宽泛的微积分观，包含了数学和相邻学科中的许多分支，它们要么是微积分的“表兄弟”，要么是微积分的“副产品”。因为这种“大帐篷”观是非常规的，所以我要确保它不会造成任何混淆。比如，我在前文中说过，如果没有微积分，我们就不会拥有电脑和手机等，我的意思当然不是说微积分本身创造了所有这些奇迹。事实远非如此，科学和技术是必不可少的搭档，或者可以说是这出大戏的主角。我只想，尽管微积分往往扮演的是配角，但也为塑造我们今天的世界做出了重要贡献。

以无线通信的发展史为例。它开始于迈克尔·法拉第和安德烈·玛

丽·安培等科学家发现的电磁定律⁸，如果没有他们的观察和反复修正，那些关于磁体、电流及其不可见力场的重要事实将仍不为人所知，无线通信的可能性也永远无法实现。所以，实验物理学在这里显然起到了不可或缺的作用。

但是，微积分同样很重要。19世纪60年代，一位名叫詹姆斯·克拉克·麦克斯韦的苏格兰数学物理学家，将电磁场的基本实验定律改写为一种可进行微积分运算的符号形式。经过一番变换，他得到了一个毫无意义的方程，显然有某种东西缺失了。麦克斯韦怀疑安培定律是罪魁祸首，并尝试修正它，于是他在自己的方程中加入了一个新项——可以化解矛盾的假想电流，然后又利用微积分做了一番运算。这次他得到了一个合理的结果——一个简洁的波动方程⁹，它与描述池塘中涟漪扩散的方程很像。只不过麦克斯韦方程还预言了一种新波的存在，这种波是由相互作用的电场和磁场产生的。一个变化的电场会产生一个变化的磁场，一个变化的磁场又会产生一个变化的电场，以此类推，每个场都会引导另一个场向前运动，一起以行波的形式向外传递能量。当麦克斯韦计算这种波的速度时，他发现它是以光速运动的，这绝对是历史上最令人惊喜的时刻之一。因此，他不仅利用微积分预测出电磁波的存在，还解开了一个古老的谜题：光的性质是什么？他意识到，光就是一种电磁波。

麦克斯韦的电磁波预测促使海因里希·赫兹在1887年做了一项实验，从而证明了电磁波的存在。10年后，尼古拉·特斯拉建造了第一个无线电通信系统；又过了5年，伽利尔摩·马可尼发送了第一份跨越大西洋的无线电报。接下来，电视、手机和其他设备也陆续出现了。

显然，微积分不可能独立做到这一切。但同样显而易见的是，如果没有微积分，这一切就不会发生。或者更准确地说，即时有可能，也要很久之后才会实现。

微积分不只是一种语言

麦克斯韦的故事展现了一个我们将会反复看到的主题。人们常说数学是科学的语言，这是非常有道理的。在电磁波的例子中，对麦克斯韦而言，将他在实验中发现的定律转化为用微积分语言表述的方程，这是至关重要的第一步。

但是，用语言来类比微积分的做法并不全面。微积分和其他数学形式一样，不仅是一种语言，还是一个非常强大的推理系统。依据某些规则进行各种符号运算，微积分可以帮助我们实现方程之间的转换。这些规则有扎实的逻辑根基，尽管看上去我们只是在随机变换符号的位置，但实际上我们是在构建逻辑推理的长链。随机变换符号的位置是有效的简化手段，也是构建人脑无法处理的复杂论证过程的简便方式。

如果我们足够幸运和娴熟，能以正确的方式进行方程变换，就可以揭示这些方程的隐藏含义。对数学家来说，这个过程几乎是易于察觉的，就好像我们在操控着方程，给它们做按摩，竭力让它们放松下来，最后洞悉它们的秘密。我们希望它们能敞开心扉，跟我们交谈。

这个过程离不开创造力，因为我们通常不清楚应该进行哪些操作。在麦克斯韦的例子中，他可以选择的方程变换方式有无数种，尽管所有方式都合乎逻辑，但其中只有一部分能揭示出科学真相。因为麦克斯韦根本不知道自己要寻找什么，除了毫无逻辑的语言（或者符号）之外，他从方程中很可能什么结果也得不到。但幸运的是，这些方程的确含有待揭示的秘密。在适当的刺激下，它们“吐露出”波动方程。

此时，微积分的语言功能再次掌控了主导权。当麦克斯韦将他的抽象符号转换回现实时，它们做出了预测：作为一种不可见的行波，电和磁能一起以光速传播。在接下来的几十年里，这一发现改变了世界。

不合理的有效性

微积分竟然能如此出色地模拟大自然，这实在是太奇怪了，毕竟它们属于两个不同的领域。微积分是一个由符号和逻辑构成的想象领域，大自然则是一个由力和现象构成的现实领域。但不知为何，如果从现实到符号的转换足够巧妙，微积分的逻辑就可以利用现实世界的一个真理生成另一个真理，即输入一个真理，然后输出另一个真理。我们先要有一个被经验证明为真和用符号表述（就像麦克斯韦对电磁定律的改写一样）的真理，然后进行正确的逻辑操作，最后得出另一个经验真理，这个真理有可能是新的，是从没有人知道的关于宇宙的事实（比如电磁波的存在）。就这样，微积分让我们放眼未来，预测未知。正因为如此，它成了强大的科技工具。

但是，为什么宇宙要遵循各种逻辑，甚至包括渺小的人类也能发现的那种逻辑呢？当爱因斯坦写下“世界的永恒之谜¹⁰在于它的可理解性”时，让他惊叹不已的正是这个问题；当尤金·维格纳在论文《论数学在自然科学中的不合理的有效性》¹¹中写下“数学语言在表述物理定律方面的适当性是一个奇迹，是一份我们既不理解也不配拥有的奇妙礼物”时，他想要表达的也是这个意思。

这种敬畏感可追溯至数学形成时期。相传公元前550年左右，当毕达哥拉斯¹²及其信徒发现音乐由整数比支配时，他就产生了这种感觉。想象一下，你在弹拨一根吉他弦，当弦振动时，它会发出某个音调。现在，把你的手指放在恰好位于弦中间的品格上，再拨一次弦。这时弦的振动部分只有最初长度的一半，即 $1/2$ ，而它发出的音调恰好比最初的音调高八度（指在 *do-re-mi-fa-sol-la-ti-do* 的音阶中，从一个 *do* 到下一个 *do* 的音程）。如果弦的振动部分是最初长度的 $2/3$ ，那么它发出的音调会比

最初的音调高五度（从 *do* 到 *sol* 的音程，比如《星球大战》主题曲的前两个音调）。如果弦的振动部分是最初长度的 $\frac{3}{4}$ ，那么它发出的音调会比最初的音调高四度（《婚礼进行曲》的前两个音调之间的音程）。古希腊音乐家了解八度、四度和五度的旋律概念，并且认为它们很美妙。音乐（现实世界的和谐）与数字（想象世界的和谐）之间的这种出人意料的联系，引领毕达哥拉斯学派¹³形成了“万物皆数”的神秘信念。据说他们始终认为，即使是在轨道上运行的行星也会演奏音乐——天体之音。

此后，历史上许多伟大的数学家和科学家都染上了“毕达哥拉斯热”。天文学家约翰尼斯·开普勒尤为严重，物理学家保罗·狄拉克亦然。我们将会看到，“万物皆数”的信念驱使他们去探寻、想象和追求宇宙的和谐，并最终推动他们取得了改变世界的发现。

无穷原则

为了帮助你理解我们讨论的方向，我先说一下什么是微积分，它想要什么，以及它与其他数学学科的区别。幸运的是，有一个宏大而美丽的理念将贯穿这个话题的始终。一旦我们了解了这个理念，微积分的结构就可以被看作统一主题之下的变体。

遗憾的是，大多数微积分课程都将这个主题埋藏在大量的公式、步骤和计算技巧之中。仔细想来，尽管它是微积分文化的一部分，而且几乎每位专家都知道它，但我从未见过它在哪里被阐明。我们不妨把它叫作“无穷原则”，无论是在概念上还是历史上，它都会像引导微积分本身的发展那样指引我们的讨论过程。虽然此时此刻它听起来好像胡言乱语，但通过我们一步步地探索微积分想要什么及其如何实现所想，理解无穷原则将变得越来越容易。