

基于算子理论的 非线性控制系统设计

王瑗琿 著



中国纺织出版社有限公司

国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

基于算子理论的非线性 控制系统设计

王瑗琿 著

内 容 提 要

随着工业生产过程、智能制造终端、特殊装备和机器人等一些特殊控制对象变得越来越复杂，对非线性控制系统的研究正逐渐成为热点。本书以机器人、半导体制冷系统、水位系统为研究对象，详细介绍了基于算子理论的非线性控制系统设计与分析，包括算子的定义、系统建模、控制器设计、特性分析等主要内容，对鲁棒稳定和跟踪控制等关键问题进行了系统详细的探讨。本书可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材使用，也可供从事自动化、电气、控制理论等相关领域的研究人员和技术人员阅读参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

基于算子理论的非线性控制系统设计/王瑗琤著.

--北京:中国纺织出版社有限公司,2020.10

ISBN 978-7-5180-7913-1

I. ①基… II. ①王… III. ①非线性控制系统—系统设计 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020) 第 179922 号

责任编辑: 亢莹莹 责任校对: 楼旭红 责任印制: 何 建

中国纺织出版社有限公司出版发行

地址: 北京市朝阳区百子湾东里 A407 号楼 邮政编码: 100124

销售电话: 010—67004422 传真: 010—87155801

<http://www.c-textilep.com>

中国纺织出版社天猫旗舰店

官方微博 <http://weibo.com/2119887771>

三河市宏盛印务有限公司印刷 各地新华书店经销

2020 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 9

字数: 160 千字 定价: 68.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社图书营销中心调换

前 言

随着工业生产过程、智能制造终端、特殊装备等控制对象复杂性和集成度的提高，实际的控制过程变得越来越复杂，且多数是非线性系统，因而对非线性系统的研究正逐渐成为控制工程的热点和难点。自动控制理论至今已经过了四代的发展：经典控制、现代控制、大系统控制和智能控制。对非线性系统的研究基本可以划分为三个阶段：第一个阶段是古典理论阶段，其主要方法有相平面法、谐波平衡法等，这些理论针对性比较强，但不能普遍应用；第二个阶段是综合应用阶段，其主要方法有自适应控制、滑模控制、PID 控制、神经网络控制、Lyapunov 方法等；第三个阶段是非线性理论新发展阶段，例如非线性算子控制。非线性算子是定义在扩展的 Banach 空间上相较一般的 Lipschitz 算子，能够更好地处理算子的逆、因果性、稳定性问题。算子可以是线性的也可以是非线性的，可以是有限维的也可以是无限维的，可以是频域也可以是时域的，因其应用范围广等优势，越来越多学者投身对它的研究。因此，本书主要介绍基于算子理论的非线性控制系统设计及其在一些过程控制系统中的应用。

全书共分 7 章。第 1 章为非线性控制理论基础，介绍了自动控制系统相关概念、非线性系统理论基础、非线性鲁棒控制研究现状和发展情况。第 2 章为基于算子理论的控制系统设计，介绍了算子的相关定义、右互质分解方法，进而介绍了基于鲁棒右互质分解的控制器设计。第 3 章为基于鲁棒右互质分解和 PI 控制的鲁棒跟踪控制，详细介绍了机器人系统和人工肌肉系统的鲁棒跟踪控制系统设计和分析过程。第 4 章为基于鲁棒右互质分解和滑模控制的鲁棒跟踪控制，基于鲁棒右互质分解和滑模控制技术，研究了非线性机器人鲁棒跟踪控制设计过程。第 5 章为基于鲁棒右互质分解与算子理论观测器的精确跟踪控制，研究了基于算子观测器和算子控制器的非线性机器人、半导体制冷系统的鲁棒精确跟踪控制设计

过程。第6章为基于算子理论的液位系统控制，详细介绍了液位系统的建模、具体设计、仿真与实现过程。第7章为基于算子理论的故障诊断与优化控制，对故障诊断观测器设计和故障的分类进行了分析，进而讨论了基于算子理论的优化控制在半导体制冷系统和液位系统故障状态下的应用。

本书由王瑗琿担任主编，负责大纲制订、书稿修改及统稿、定稿工作。温盛军担任校稿工作。本书在编写过程中得到了参与项目的许多合作者和引用论文的作者的帮助，例如温盛军、王东云、邓明聪、毕淑慧、王海泉、喻俊等，在此表示感谢！同时，本书还是闫同斌、付怡雯、郑敏、张强、张蕾、齐小敏、李峰光、刘萍、李琳、胡宁宁、张帅帅等多位研究生辛勤劳动的成果，在此深表感谢！由于编者水平有限，书中难免出现疏漏和不妥之处，敬请广大读者不吝指正。

本书的大部分内容都是作者和合作者最新的研究成果。本书的研究成果受到国家自然科学基金重点项目（U1813201）、国家自然科学基金青年基金（61304115）、河南省高等学校科技创新团队（14IRTSTHN024）、河南省自然科学基金项目（162300410345）、河南省科技攻关项目（202102210097）和河南省高等学校青年骨干教师培养计划（2017GGJS117）等项目资助，在此表示感谢！

著 者

2020年7月

目 录

第 1 章 非线性控制理论基础	001
1.1 自动控制理论概论	001
1.2 非线性控制理论基础	007
1.3 鲁棒控制理论基础	012
1.4 非线性鲁棒控制研究现状	013
1.5 本章小结	016
参考文献	016
第 2 章 基于算子理论的控制系统设计	019
2.1 算子理论	019
2.2 基于算子理论的右互质分解技术	022
2.3 基于算子理论的鲁棒右互质分解技术	025
2.4 本章小结	028
参考文献	028
第 3 章 基于鲁棒右互质分解和 PI 控制的鲁棒跟踪控制	031
3.1 基于鲁棒右互质分解和 PI 控制的鲁棒跟踪控制技术	031
3.2 基于鲁棒右互质分解和 PI 控制的机器人鲁棒跟踪控制	032
3.3 基于鲁棒右互质分解和 PI 控制的 IPMC 鲁棒跟踪控制	039
3.4 本章小结	056
参考文献	056
第 4 章 基于鲁棒右互质分解和滑模控制的鲁棒跟踪控制	059
4.1 滑模控制理论	059
4.2 滑模控制的机器人鲁棒跟踪控制	061

4.3	趋近律设计	063
4.4	稳定性分析	064
4.5	仿真与结果分析	065
4.6	本章小结	068
	参考文献	068
第5章	基于鲁棒右互质分解和算子理论观测器的精确跟踪控制	071
5.1	基于算子观测器的鲁棒精确跟踪控制	071
5.2	机器人手臂鲁棒非线性精确跟踪控制	071
5.3	半导体制冷装置鲁棒精确跟踪控制	078
5.4	本章小结	086
	参考文献	087
第6章	基于算子理论的液位系统控制	090
6.1	液位过程控制系统介绍	090
6.2	液位系统数学建模	094
6.3	基于鲁棒右互质分解的控制器设计	095
6.4	系统仿真与实验	097
6.5	本章小结	104
	参考文献	105
第7章	基于算子理论的故障诊断与优化控制	107
7.1	基于算子理论的故障诊断观测器设计	107
7.2	执行器故障检测	108
7.3	半导体制冷系统故障的优化控制	110
7.4	基于支持向量机的故障分类器设计	114
7.5	液位系统故障的优化控制	130
7.6	本章小结	135
	参考文献	135

第 1 章 非线性控制理论基础

1.1 自动控制理论概论

自动控制理论是自动控制科学的核心，也是研究自动控制共同规律的科学技术。它是相对人工控制概念而言的，指的是在没人参与的情况下，利用控制装置使被控对象或过程自动地按预定规律运行。自动控制技术的研究有利于将人类从复杂、危险、繁琐的劳动环境中解放出来并大大提高控制效率。自动控制理论至今已经过了四代的发展：经典控制、现代控制、大系统控制和智能控制。

1.1.1 经典控制理论

经典控制理论是以传递函数为基础的一种控制理论，控制系统的分析与设计是建立在某种近似和（或）试探的基础上的，控制对象一般是单输入单输出系统、线性定常系统^[1,2]。经典控制理论可以追溯到 1788 年瓦特（J. Watt）发明的飞锤调速器。最终形成完整的自动控制理论体系是在 20 世纪 40 年代末。最先使用反馈控制装置的是希腊人在公元前 300 年使用的浮子调节器，凯特斯比斯（Kitesibbios）在油灯中使用了浮子调节器以保持油面高度稳定。19 世纪 60 年代期间是控制系统高速发展的时期，1868 年麦克斯韦尔（J. C. Maxwell）基于微分方程描述从理论上给出了它的稳定性条件。1877 年劳斯（E. J. Routh），1895 年霍尔维茨（A. Hurwitz）分别独立给出了高阶线性系统的稳定性判据。1892 年，李雅普诺夫（A. M. Lyapunov）给出了非线性系统的稳定性判据。在同一时期，维什哥热斯基（I. A. Vyshnegreskii）也用一种正规的数学理论描述了这种理论。1922 年米罗斯基（N. Minorsky）给出了位置控制系统的分析，并对 PID 三作用控制给出了控制规律公式。1942 年，齐格勒（J. G. Ziegler）和尼科尔斯（N. B. Nichols）又给出了 PID 控制器的最优参数整定法。1932 年奈奎斯特（Nyquist）提出了负反馈系统的频率域稳定性判据，这种方法只需利用频率响应的实验数据。1940 年，波德（H. Bode）进一步研究通信系统频域方法，提出了频域响应的对数坐标图描述方法。1943 年，霍尔（A. C. Hall）利用传递函数（复数域模型）和方框图，把通信工程的频域响应方法和机械工程的时域方法统一起来，人们称此方法为复数域方法。

频域分析法主要用于描述反馈放大器的带宽和其他频域指标。第二次世界大战结束时，经典控制技术和理论基本建立。1948年伊文斯（W. Evans）又进一步提出了属于经典方法的根轨迹设计法，它给出了系统参数变换与时域性能变化之间的关系。至此，复数域与频率域的方法进一步完善。

1.1.2 现代控制理论

现代控制理论是在20世纪50年代中期迅速兴起的空间技术的推动下发展起来的^[3,4]。空间技术的发展迫切要求建立新的控制原理，以解决诸如把宇宙火箭和人造卫星用最少燃料或最短时间准确地发射到预定轨道一类的控制问题。这类控制问题十分复杂，采用经典控制理论难以解决。1958年，苏联科学家庞特里亚金提出了名为极大值原理的综合控制系统的新方法。在这之前，美国学者贝尔曼于1954年创立了动态规划，并在1956年应用于控制过程。他们的研究成果解决了空间技术中出现的复杂控制问题，并开拓了控制理论中最优控制理论这一新的领域。1960—1961年，美国学者卡尔曼和布什建立了卡尔曼—布什滤波理论，因而有可能有效地考虑控制问题中所存在的随机噪声的影响，把控制理论的研究范围扩大，包括了更为复杂的控制问题。几乎在同一时期内，贝尔曼、卡尔曼等人把状态空间法系统地引入控制理论中。状态空间法对揭示和认识控制系统的许多重要特性具有关键的作用。其中能控性和能观测性尤为重要，成为控制理论两个最基本的概念。

到20世纪60年代初，一套以状态空间法、极大值原理、动态规划、卡尔曼—布什滤波为基础的分析与设计控制系统的新的原理和方法已经确立，这标志着现代控制理论的形成。

1.1.3 大系统控制理论

20世纪70年代开始，出现了一些新的控制方法和理论，简称“大系统控制理论阶段”。例如，现代频域方法，该方法以传递函数矩阵为数学模型，研究线性定常多变量系统；自适应控制理论和方法，该方法以系统辨识和参数估计为基础，处理被控对象不确定和缓时变，在实时辨识基础上在线确定最优控制规律；鲁棒控制方法，该方法在保证系统稳定性和其他性能基础上，设计不变的鲁棒控制器，以处理数学模型的不确定性；预测控制方法，该方法为一种计算机控制算法，在预测模型的基础上采用滚动优化和反馈校正，可以处理多变量系统。

大系统理论是研究规模庞大、结构复杂、目标多样、功能综合、因素众多的工程与非工程大系统的自动化和有效控制的理论。大系统指在结构上和维数上都具有某种复杂性的系统。具有多目标、多属性、多层次、多变量等特点。例如经济计划管理系统、信息分级处理系统、交通运输管理和控制系统、生态环境保护系统以及水源的分配管理系统等。大系统理论是20

世纪70年代以来,在生产规模日益扩大、系统日益复杂的情况下发展起来的一个新领域。它的主要研究课题有大系统结构方案,稳定性、最优化以及模型简化等。大系统理论是以控制论、信息论、微电子学、社会经济学、生物生态学、运筹学和系统工程等学科为理论基础,以控制技术、信息与通信技术、电子计算机技术为基本条件而发展起来的。

1.1.4 智能控制理论

智能控制的指导思想是依据人的思维方式和处理问题的技巧,解决那些目前需要人的智能才能解决的复杂的控制问题^[5,6]。被控对象的复杂性体现为模型的不确定性、高度非线性、分布式的传感器和执行器、动态突变、多时间标度、复杂的信息模式、庞大的数据量以及严格的特性指标等。而环境的复杂性则表现为变化的不确定性和难以辨识。试图用传统的控制理论和方法去解决复杂的对象,复杂的环境和复杂的任务是不可能的。智能控制的方法包括模糊控制、神经网络控制、专家控制等方法。目前,自动控制理论还在继续发展,正向以控制论、信息论、仿生学、人工智能为基础的智能控制理论深入。

为了实现各种复杂的控制任务,首先要将被控制对象和控制装置按照一定的方式连接起来,组成一个有机的整体,这就是自动控制系统。在自动控制系统中,被控对象的输出量即被控量是要求严格加以控制的物理量,它可以要求保持为某一恒定值,例如,温度、压力或飞行轨迹等;而控制装置则是对被控对象施加控制作用的相关机构的总体,它可以采用不同的原理和方式对被控对象进行控制,但最基本的一种是基于反馈控制原理的反馈控制系统。在反馈控制系统中,控制装置对被控装置施加的控制作用,是取自被控量的反馈信息,用来不断修正被控量和控制量之间的偏差从而实现对被控量进行控制的任务,这就是反馈控制的原理。

1.1.5 中国工业自动控制系统

经过20多年的发展,中国工业自动控制系统装置制造行业取得了长足的发展,尤其是20世纪90年代以来,中国工业自动控制系统装置制造行业的产量一直保持在年增长20%以上。2011年,中国工业自动控制系统装置制造行业取得了令人瞩目的成绩。全年完成工业总产值2056.04亿元;产品销售收入1996.73亿元,同比增长24.66%;实现利润总额202.84亿元,同比增长28.74%。国产自动控制系统相继在火电、化肥、炼油领域取得了突破。中国的工业自动化市场主体主要由软硬件制造商、系统集成商、产品分销商等组成。在软硬件产品领域,中高端市场几乎全部由国外著名品牌产品垄断,并将仍维持此种局面;在系统集成领域,跨国公司占据制造业的高端,具有深厚行业背景的公司的相关行业系统集成业务中占据主动,具有丰富应用经验的系统集成公司充满竞争力。在工业自动化市场,供应和需求之

间存在错位。客户需要的是完整的能满足自身制造工艺的电气控制系统，而供应商提供的是各种标准化器件产品。行业不同，电气控制的差异非常大，甚至同一行业客户因各自工艺的不同导致需求也有很大差异。这种供需之间的矛盾为工业自动化行业创造了发展空间。中国拥有世界最大的工业自动控制系统装置市场，传统工业技术改造、工厂自动化、企业信息化需要大量的工业自动化系统，市场前景广阔。工业控制自动化技术正在向智能化、网络化和集成化方向发展。基于工业自动化控制较好的发展前景，预计 2015 年工业自动控制系统装置制造行业市场规模将超过 3500 亿元。随着工业自动控制系统装置制造行业竞争的不断加剧，大型工业自动控制系统装置制造企业间并购整合与资本运作日趋频繁，国内优秀的工业自动控制系统装置制造企业越来越重视对行业市场的研究，特别是对产业发展环境和产品购买者的深入研究。

1.1.6 控制系统

控制理论主要是为控制系统设计服务的。按控制原理的不同，自动控制系统分为开环控制系统和闭环控制系统。开环控制系统中，系统输出只受输入的控制，控制精度和抑制干扰的性能都比较差。开环控制系统中，基于按时序进行逻辑控制的称为顺序控制系统；由顺序控制装置、检测元件、执行机构和被控工业对象所组成。主要应用于机械、化工、物料装卸运输等过程的控制以及机械手和生产自动线。闭环控制系统是建立在反馈原理基础之上的，利用输出量同期望值的偏差对系统进行控制，可获得比较好的控制性能。闭环控制系统又称反馈控制系统。按给定信号分类，自动控制系统可分为恒值控制系统、随动控制系统和程序控制系统。恒值控制系统即给定值不变，要求系统输出量以一定的精度接近给定希望值的系统。如生产过程中的温度、压力、流量、液位高度、电动机转速等自动控制系统属于恒值系统。随动控制系统是指给定值按未知时间函数变化，要求输出跟随给定值的变化，如跟随卫星的雷达天线系统。程序控制系统是指给定值按一定时间函数变化。

控制系统是指由控制主体、控制客体和控制媒体组成的具有自身目标和功能的管理系统。控制系统意味着通过它可以按照所希望的方式保持和改变机器、机构或其他设备内任何感兴趣的可变的量。控制系统同时是为了使被控制对象达到预定的理想状态而实施的。控制系统使被控制对象趋于某种需要的稳定状态。

自动控制系统由被控对象和控制装置两大部分组成，根据其功能，后者又是由具有不同职能的基本元部件组成的。典型的控制系统主要包括以下基本单元：

(1) 被控对象，一般是指生产过程中需要进行控制的工作机械、装置或生产过程。描述被控对象工作状态的、需要进行控制的物理量就是被控量。

(2) 测量元件，用于对输出量进行测量，并将其反馈至输入端。如果测出的物理量属于

非电量，大多情况下要把它转化成电量，以便利用电的手段加以处理。如测速发电机，就是将电动机轴的速度检测出来并转换成电压。

(3) 给定元件，职能是给出与期望的输出相对应的系统输入量，是一类产生系统控制指令的装置。

(4) 比较元件，是对实际输出值与给定元件给出的输入值进行比较，求出它们之间的偏差。常用的电量比较元件有差动放大器、电桥电路等。

(5) 放大元件，是将过于微弱的偏差信号加以放大，以足够的功率来推动执行机构或被控对象。当然，放大倍数越大，系统的反应越敏感。一般情况下，只要系统稳定，放大倍数应适当大些。

(6) 执行元件，功能是根据放大元件放大后的偏差信号，推动执行元件去控制被控对象，使其被控量按照设定的要求变化。通常，电动机、液压马达等都可作为执行元件。

(7) 校正元件，又称补偿元件，用于改善系统的性能，通常以串联或反馈的方式连接在系统中。是为改善或提高系统的性能，在系统基本结构基础上附加参数可灵活调整的元件。

1.1.7 计算机控制系统

由计算机参与并作为核心环节的自动控制系统，被称为计算机控制系统。一个典型计算机控制系统结构如图 1-1 所示^[7]。

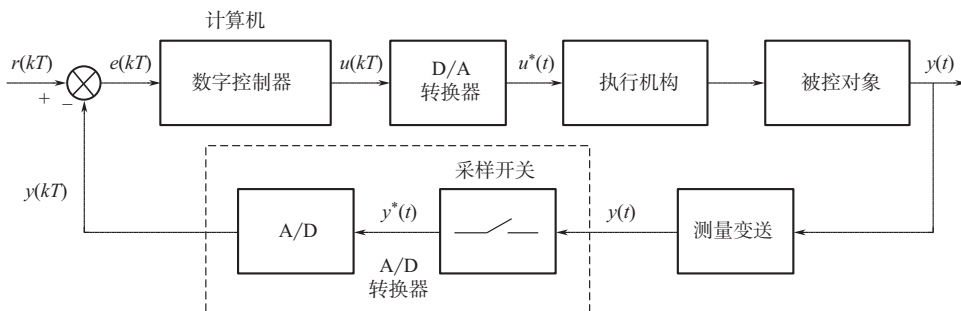


图 1-1 计算机控制系统典型结构

图 1-1 中包括四种信号，数字信号： $r(kT)$ —— 给定输入， $y(kT)$ —— 经 A/D 转换后的系统输出， $u(kT)$ —— 由控制器计算的控制信号， $e(kT) = r(kT) - y(kT)$ —— 偏差信号；模拟信号： $y(t)$ —— 系统输出（被控制量）；离散模拟信号： $y^*(t)$ —— 经过采样开关的被控量信号（时间上离散，幅值上连续）；量化模拟信号： $u^*(t)$ —— 经 D/A 转换后的模拟控制信号（时间上连续、幅值上量化）。

从图 1-1 可以看出，典型的计算机控制系统是连续——离散混合系统，其特点是：模

拟、数字和离散模拟信号同在；输入输出均为模拟量的连续环节（被控对象、传感器）、输入和输出均为数字量的数字环节（数字控制器、偏差计算）、输入输出为两类不同量的离散模拟环节（A/D 和 D/A）共存。

如果忽略量化效应等因素，常将数字信号和离散模拟信号统称为离散信号，将量化模拟信号称为模拟信号，而模拟信号也可称为连续信号。模拟控制系统可称为连续控制系统，而计算机控制系统常称为数字控制系统，有时也简称为离散控制系统。

1.1.8 计算机控制系统的优点

计算机控制系统与常规连续（模拟）控制系统相比，通常具有如下优点：

(1) 设计和控制灵活。计算机控制系统中，数字控制器的控制算法是通过编程的方法来实现的，所以很容易实现多种控制算法，修改控制算法的参数也比较方便。还可以通过软件的标准化和模块化，这些控制软件可以反复、多次调用。

(2) 能实现集中监视和操作。采用计算机控制时，由于计算机具有分时操作功能，可以监视几个或成十上百个的控制量，把生产过程的各个被控对象都管理起来，组成一个统一的控制系统，便于集中监视、集中操作管理。

(3) 能实现综合控制。计算机控制不仅能实现常规的控制规律，而且由于计算机的记忆、逻辑功能和判断功能，可以综合生产的各方面情况，在环境与参数变化时，能及时进行判断、选择最合适的方案进行控制，必要时可以通过人机对话等方式进行人工干预，这些都是传统模拟控制无法胜任的。

(4) 可靠性高，抗干扰能力强。在计算机控制系统中，可以利用程序实现故障的自诊断、自修复功能，使计算机控制系统具有很强的可维护性。另外，计算机控制系统的控制算法是通过软件的方式来实现的，程序代码存储于计算机中，一般情况下不会因外部干扰而改变，因此计算机控制系统的抗干扰能力较强。

1.1.9 设计一个实际的控制系统的要求

(1) 可靠性高，计算机控制系统通常用于控制不间断的生产过程，在运行期间不允许停机检测，一旦发生故障将会导致质量事故，甚至生产事故。因此要求计算机控制系统具有很高的可靠性。

(2) 实时性好，计算机控制系统对生产过程进行实时控制与监测，因此要求它必须实时地响应控制对象各种参数的变化。当过程的状态参数出现偏差或故障时，系统要能及时响应，并能实时地进行报警和处理。

(3) 环境适应性强，有的工业现场环境复杂，存在电磁干扰，因此要求计算机控制系统

具有很强的环境适应能力，如对温度、湿度变化范围要求高；要具有防尘、防腐蚀、防振动冲击的能力等。

(4) 过程输入和输出配套较好，计算机系统要具有丰富的多种功能的过程输入和输出配套模板，如模拟量、开关量、脉冲量、频率量等输入输出模板；具有多种类型的信号调理功能，如隔离型和非隔离型信号调理等。

(5) 系统扩充性好，随着工厂自动化水平的提高，控制规模也在不断扩大，因此要求计算机系统具有灵活的扩充性。

(6) 系统开放性，要求计算机控制系统具有开放性体系结构，也就是说在主系统接口、网络通信、软件兼容及升级等方面遵守开放性原则，以便于系统扩充、异机种连接、软件的可移植和互换。

(7) 控制软件包功能强，计算机控制系统应用软件包应具备丰富的控制算法，同时还应具有人机交互方便、画面丰富、实时性好等性能。

1.1.10 控制系统设计的主要步骤

- (1) 控制系统设计目标的设定。
- (2) 对被控对象的分析及建立数学模型。
- (3) 控制系统设计方案的决定。
- (4) Simulink 仿真。
- (5) 编写控制代码。
- (6) 控制器硬件实现。

1.2 非线性控制理论基础

控制理论可以分为两种：线性控制理论和非线性控制理论。

线性控制理论可适用于元件均满足叠加原理的系统（线性系统），其统御方程是线性的微分方程，线性系统中若其参数不会随时间而改变，则称为线性时不变（LTI）系统，这类系统可以用强大的频域数学技巧加以分析，例如，拉普拉斯变换、傅里叶变换、Z 变换、波特图、根轨迹图及奈奎斯特稳定判据。

非线性控制理论则是针对不符合叠加原理的系统（非线性系统），适用于较多的真实世界系统。众所周知，理想的线性系统在实际的工业生产过程中是不存在的。由于系统元器件本身的非线性及参数的变化，以及系统外界或内部因素的影响，使得系统具有非常复杂的非

线性特性，所以一般的线性系统的控制方法就在一定应用程度上受到限制。对于非线性系统的控制，大多数研究者都会采用将非线性系统近似线性化，然后采用线性系统的控制策略对非线性系统进行控制系统设计和控制。但是这种方法对于非线性特性不明显的系统的控制可能会有效，对于非线性特性十分强且系统控制精度要求高的非线性系统来说，很难采用一般的线性系统的控制方法来对其进行控制系统设计和控制。所以如何采用新的控制策略对非线性系统进行控制系统设计和控制受到了越来越多的研究人员的关注。如果系统至少包含一个非线性环节或单元，系统的运动规律将由非线性微分方程或非线性算子来描述，那么就称该系统为非线性系统。非线性系统是不满足叠加定理的，在对非线性系统的分析求解过程中，它的解不一定是唯一存在的，而且非线性系统具有自治系统自激振荡、系统频率响应跳变、系统解的分叉及类似于随机系统出现的混沌等特殊现象。

对于非线性控制系统来说，通常可以采用下面的公式对其进行数学描述：

$$f\left(\frac{d^n y}{dt}, \frac{d^{n-1} y}{dt}, \dots, \frac{dy}{dt}, y, u\right) = 0 \quad (1-1)$$

式中： f 是一种非线性函数； y 是系统的输出量； u 是控制量。式（1-1）也可以转化成一个一阶非线性方程组，如式（1-2）所示：

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r; t) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r; t) \\ \frac{dy_3}{dt} = f_3(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r; t) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r; t) \end{cases} \quad (1-2)$$

式中： $u_i (i = 1, 2, 3, \dots, r)$ 、 $y_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 是状态变量、应用向量的表达方式，上式也可以写为如下的形式：

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u, t) \quad (1-3)$$

式中： $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_r)$ 是系统的控制向量； $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ 是系统的状态向量； $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$ 是速度向量。由该式描述的非线性控制系统，我们所希望的结果是对于每一个输入都可以满足下面的情况：一是至少存在一个解，也就是所谓的解的存在性；二是只存在一个解，也就是所谓的解的唯一性；三是对于时间半轴 $[0, +\infty)$ ，式（1-3）只存在一个解；四是在 $[0, +\infty)$ 上，式（1-3）只存在一个解，并且此解与初始值 $y(0)$

存在连续变化的关系。然而这些条件对于非线性系统来说是非常苛刻的，而且只有函数 f 满足严格的要求才会实现。一般来说式子 (1-3) 的解很难找到，即使存在也不能表达成解析形式，也只能对它进行数值计算或者近似估计。由此我们可以知道，与线性系统的控制相比，对于非线性系统的控制就没有那么容易了。

目前非线性系统的分析及控制方法主要包括：描述函数法、相平面法、李雅普诺夫稳定性分析、奇异摄动法、针对绝对稳定性的波夫判据及圆判据、中心流形定理、小增益定理、无源性分析、增益规划、非线性阻尼、反演控制、滑动模式控制等。

描述函数 (Describing Function) 是控制系统中用近似方式处理非线性系统的方法，由 Nikolay Mitrofanovich Krylov 及尼古拉·博戈柳博夫在 1930 年代提出，后来由 Ralph Kochenburger 延伸。描述函数是以准线性为基础，是用依输入波形振幅而变化的线性时不变传递函数来近似非线性系统的做法。依照定义，真正线性时不变系统的传递函数不会随输入函数的振幅而变化 (因为是线性系统)。因此，其和振幅的相依性就会产生一群线性系统，这些系统结合起来的目的是概括近似非线性系统的特性。描述函数是少数广为应用来设计非线性系统的方法，描述函数是在分析闭回路控制器 (例如，工业过程控制、伺服机构、电子振荡器) 的极限环时，常见的数学工具。

相平面 (Phase Plane) 是在应用数学 (特别是非线性系统) 中，视觉化的展示特定微分方程特征的方式。相平面是一个由两个状态变数为坐标轴组成的平面，例如说 (x, y) 或 (q, p) 等。相平面是多维度相空间在二维空间中的例子。相平面法 (Phase Plane Method) 是指用绘图的方式，来确认微分方程的解中是否存在极限环。微分方程的解可以形成函数族。用绘图的方式，可以画在二维的相平面上，类似二维的向量场。向量会表示某一点对应特定参数 (例如时间) 的导数，也就是 $(dx/dt, dy/dt)$ ，会绘制在对应的点上，以箭头表示。若有够多的点，就可以分析此区域内的系统行为，若有极限环，也可以识别出来。整个场即可形成相图，在流线上的特定路径 (一个永远和向量相切的路径) 即为相路径 (phase path)。向量场上的相表示微分方程所说明的系统随时间的演化。相平面可以用来解析物理系统的行为，特别是振荡系统，如猎食者—猎物模型 (可参考洛特卡—沃尔泰拉方程)。这些模型中的相路径可能是向内旋转，慢慢趋近 0，也可能是向外旋转，慢慢趋近无限大，或是接近中性的平衡位置。路径可能是圆形、椭圆或是其他形状。在判断其系统是否稳定时很有用。

在数学和自动控制领域中，李雅普诺夫稳定性 (Lyapunov Stability) 或称作李亚普诺夫稳定性，可用来描述一个动力系统的稳定性。李雅普诺夫稳定性可用在线性及非线性的系统中。不过线性系统的稳定性可由其他方式求得，因此李雅普诺夫稳定性多半用来分析非线性系统的稳定性。李亚普诺夫稳定性的概念可以延伸到无限维的流形，即为结构稳定性，是考虑微分方程中一群不同但“接近”的解的行为。输入—状态稳定性 (ISS) 则是将李雅普诺夫稳

定性应用在有输入的系统。

奇异摄动问题是指数学上一个含有小参数的问题，但不能直接把小参数设为零来求所有近似解的问题。在描述奇异摄动问题的方程里，小参数作为系数出现在含有最高阶次方或导数项里，如果按照常规摄动法把小参数设为零，将会导致方程降阶从而不能得到所有的近似解。奇异摄动的来源是这类问题里存在多个尺度。为了求得在每个尺度上的有效近似解，需要将方程用不同尺度规范化以得到新的方程。而新的方程则可以用常规摄动法来求近似解。

波夫判据 (Popov Criterion) 是非线性控制以及稳定性理论中的稳定性判据，由 Vasile M. Popov 所提出，是针对非线性特性满足开区间条件 (Open-Sector Condition) 非线性系统的绝对稳定性。波夫判据只适用于非时变的非线性系统，而圆判据可以用在时变的非线性系统。圆判据 (Circle Criterion) 是非线性控制及稳定性理论中，针对非线性时变系统的稳定性判据。可以视为是针对线性时不变系统 (LTI) 的奈奎斯特稳定判据之扩展版本。

反推控制 (Backstepping) 也称为反演控制或反步法，是一种控制理论的技术，在大约 1990 年时由 Petar V. Kokotovic 等人提出，针对特殊形式的非线性动力系统设计可以稳定系统的控制器。此系统是由许多子系统一层一层组成，最内层的子系统不可再简化，可以由其他方式稳定最内层的系统。由于此系统的递归结构，设计者可以以最内层可稳定的系统为起始点，反推新的控制器来稳定较外层的子系统，此程序会一直进行到处理到最外层的外部控制命令为止。因此此方式称为是“反推控制”。

滑动模式控制 (Sliding Mode Control) 简称 SMC，是一种非线性控制的技术，利用不连续的控制信号来调整非线性系统的特性，强迫系统在两个系统的正常状态之间滑动，最后进入稳态^[14-17]。其状态—反馈控制律不是时间的连续函数。相反的，控制律会依目前在状态空间中的位置不同，可能从一个连续的控制系统切换到另一个连续的控制系统。因此滑动模型控制属于变结构控制。已针对滑动模型控制设计了许多控制结构，目的是让相空间图中的轨迹可以前往和另一个控制结构之间相邻的区域，因此最终的轨迹不会完全脱离某个控制结构。相反的，轨迹会在控制结构的边界上“滑动”。这种沿着控制结构之间边界滑动的行为称为“滑动模式”，而包括边界在内的几何轨迹称为滑动曲面 (Sliding surface)。在现代控制理论的范围中，任何变结构系统 (如滑动模式控制) 都可以视为是并合系统的特例，因为系统有些时候会在连续的状态空间中移动，有时也会在几个离散的控制模式中切换。

与线性系统相比，非线性系统区别于它的一个最主要的特征是，叠加原理不再适用于非线性系统。由于这个性质，就导致了非线性系统在学习和研究上的复杂性。也因为非线性系统的复杂性，致使其理论的发展与线性系统理论相比，显得稚嫩和零散。非线性系统本身的复杂性及其数学处理上的一些困难，造成了到现在为止仍然没有一种普遍的方法可以用来处理所有类型的非线性系统。