概率论与数理统计

学习指导与精练

曹金亮 张野芳◎主编

PROBABILITY
AND STATISTICS

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计学习指导与精练

主　编　曹金亮　张野芳
副主编　王小双　鲍吉锋

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是为概率论与数理统计课程的学习而编写的指导性教材，本书总结归纳了概率论与数理统计课程的基本概念、基本理论与基本方法．通过对类型与数量众多的例题的解析，使读者能够较好地掌握概率论与数理统计的思想方法与解题技巧．本书对历年硕士研究生入学考试中概率统计部分的常考点及试题做了详细分析．此外，本书每节后面还配备了常规练习题，在附录中提供了四套综合测试题供读者选用．

本书可作为高等学校理工科、农林医、经济、管理等各专业概率论与数理统计课程的配套教材，也是相关专业研究生入学考试复习备考很好的参考教材．

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导与精练／曹金亮，张野芳主编．—北京：北京理工大学出版社，2020.9

ISBN 978-7-5682-8994-8

Ⅰ．①概…　Ⅱ．①曹…②张…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 166160 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
　　　　　（010）82562903（教材售后服务热线）
　　　　　（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／17.5
字　　数／411 千字
版　　次／2020 年 9 月第 1 版　2020 年 9 月第 1 次印刷
定　　价／49.80 元

责任编辑／孟祥雪
文案编辑／孟祥雪
责任校对／周瑞红
责任印制／李志强

前言

概率论与数理统计是高等院校理工科、农林医、经济、管理等各专业的一门重要的基础课程，也是全国硕士研究生相关专业入学考试数学科目的重要组成部分.

为了帮助读者更好地学习这门课程，我们根据多年的教学经验编写了本书. 本书旨在帮助广大读者理解基本概念，掌握基本知识点，学会解题方法，掌握解题技巧，提高分析问题与解决问题的能力，为后续课程的学习和将来的硕士研究生入学考试打下良好的数学基础.

本书共分八章，与一般的《概率论与数理统计》教材前八章相对应，为了配合教学过程，内容编排与教材基本一致，分章节展开，使读者在使用上更加方便. 内容的选取充分参考了硕士研究生入学考试大纲，使之能够覆盖考研大纲对概率统计部分所要求的全部知识点. 在每节的例题解析部分对大部分题目都给出了解题分析，帮助读者分析解题思路. 此外，本书还对历年硕士研究生入学考试中概率统计部分的试题及考点进行了分析，为考生备考提供了复习依据.

掌握数学概念与方法的最好途径就是做题，为此，本书每节都配备了常规练习题. 在使用本书时，学生应尽力多做一些练习题，通过练习真正掌握每章的内容. 对于本书提供的例题，读者应先对题目进行独立思考，然后再查阅解答过程，最好能够提出不同于书中的解题方法. 在书的最后附有 4 套综合测试题，读者可以通过这些测试题进行自我测试检查，测试对本课程的掌握程度.

本书由曹金亮、张野芳担任主编，王小双、鲍吉锋担任副主编. 在本书的编写过程中，浙江海洋大学信息工程学院领导及数学系的各位同人给予了热情的关怀与帮助. 在编写中我们参考了大量同类教材、学习指导书和网络资料，在此不一一列出，谨对这些参考书及资料的原作者表示衷心的感谢！

感谢浙江海洋大学教务处对本教材在立项及出版等各方面的大力支持与帮助.

编　者

目 录

第 1 章　随机事件及其概率 ……………………………………………… (1)
1.1　随机事件及其运算 ……………………………………………… (1)
1.1.1　知识要点 ……………………………………………… (1)
1.1.2　典型例题 ……………………………………………… (3)
常规训练 ……………………………………………… (4)
1.2　频率与概率 ……………………………………………… (6)
1.2.1　知识要点 ……………………………………………… (6)
1.2.2　典型例题 ……………………………………………… (7)
常规训练 ……………………………………………… (8)
1.3　古典概型 ……………………………………………… (10)
1.3.1　知识要点 ……………………………………………… (10)
1.3.2　典型例题 ……………………………………………… (11)
常规训练 ……………………………………………… (14)
1.4　条件概率 ……………………………………………… (16)
1.4.1　知识要点 ……………………………………………… (16)
1.4.2　典型例题 ……………………………………………… (17)
常规训练 ……………………………………………… (19)
1.5　独立性 ……………………………………………… (21)
1.5.1　知识要点 ……………………………………………… (21)
1.5.2　典型例题 ……………………………………………… (22)
常规训练 ……………………………………………… (24)
1.6　考研指导与训练 ……………………………………………… (26)
考研训练 ……………………………………………… (30)
第 2 章　随机变量及其分布 ……………………………………………… (33)
2.1　随机变量 ……………………………………………… (34)

2.1.1 知识要点 …… (34)
2.1.2 典型例题 …… (34)
常规训练 …… (34)
2.2 离散型随机变量及其分布律 …… (35)
2.2.1 知识要点 …… (35)
2.2.2 典型例题 …… (36)
常规训练 …… (38)
2.3 随机变量的分布函数 …… (41)
2.3.1 知识要点 …… (41)
2.3.2 典型例题 …… (41)
常规训练 …… (43)
2.4 连续型随机变量及其概率密度 …… (47)
2.4.1 知识要点 …… (47)
2.4.2 典型例题 …… (48)
常规训练 …… (50)
2.5 随机变量函数的分布 …… (53)
2.5.1 知识要点 …… (53)
2.5.2 典型例题 …… (53)
常规训练 …… (55)
2.6 考研指导与训练 …… (57)
考研训练 …… (62)
第3章 多维随机变量及其分布 …… (65)
3.1 二维随机变量 …… (66)
3.1.1 知识要点 …… (66)
3.1.2 典型例题 …… (68)
常规训练 …… (75)
3.2 条件分布 …… (78)
3.2.1 知识要点 …… (78)
3.2.2 典型例题 …… (78)
常规训练 …… (82)
3.3 相互独立的随机变量 …… (85)
3.3.1 知识要点 …… (85)
3.3.2 典型例题 …… (85)
常规训练 …… (88)
3.4 两个随机变量函数的分布 …… (91)

3.4.1　知识要点 …………………………………………………………………… (91)
3.4.2　典型例题 …………………………………………………………………… (92)
常规训练 ………………………………………………………………………… (96)
3.5　考研指导与训练 ……………………………………………………………… (99)
考研训练 ……………………………………………………………………… (106)
第4章　随机变量的数字特征 ………………………………………………… (108)
4.1　数学期望 …………………………………………………………………… (109)
4.1.1　知识要点 ………………………………………………………………… (109)
4.1.2　典型例题 ………………………………………………………………… (110)
常规训练 ……………………………………………………………………… (115)
4.2　方差 ………………………………………………………………………… (117)
4.2.1　知识要点 ………………………………………………………………… (117)
4.2.2　典型例题 ………………………………………………………………… (118)
常规训练 ……………………………………………………………………… (120)
4.3　协方差与相关系数 ………………………………………………………… (122)
4.3.1　知识要点 ………………………………………………………………… (122)
4.3.2　典型例题 ………………………………………………………………… (123)
常规训练 ……………………………………………………………………… (126)
4.4　考研指导与训练 …………………………………………………………… (128)
考研训练 ……………………………………………………………………… (137)
第5章　大数定律及中心极限定理 …………………………………………… (141)
5.1　大数定律 …………………………………………………………………… (141)
5.1.1　知识要点 ………………………………………………………………… (141)
5.1.2　典型例题 ………………………………………………………………… (142)
常规训练 ……………………………………………………………………… (143)
5.2　中心极限定理 ……………………………………………………………… (145)
5.2.1　知识要点 ………………………………………………………………… (145)
5.2.2　典型例题 ………………………………………………………………… (146)
常规训练 ……………………………………………………………………… (148)
5.3　考研指导与训练 …………………………………………………………… (150)
考研训练 ……………………………………………………………………… (153)
第6章　样本及抽样分布 ……………………………………………………… (155)
6.1　总体与样本 ………………………………………………………………… (155)
6.1.1　知识要点 ………………………………………………………………… (155)
6.1.2　典型例题 ………………………………………………………………… (156)

常规训练 …… (157)
6.2 抽样分布 …… (158)
6.2.1 知识要点 …… (158)
6.2.2 典型例题 …… (160)
常规训练 …… (162)
6.3 考研指导与训练 …… (165)
考研训练 …… (168)
第7章 参数估计 …… (170)
7.1 矩估计 …… (170)
7.1.1 知识要点 …… (170)
7.1.2 典型例题 …… (171)
常规训练 …… (173)
7.2 极大似然估计 …… (174)
7.2.1 知识要点 …… (174)
7.2.2 典型例题 …… (176)
常规训练 …… (178)
7.3 估计量的评选标准 …… (180)
7.3.1 知识要点 …… (180)
7.3.2 典型例题 …… (180)
常规训练 …… (185)
7.4 区间估计 …… (186)
7.4.1 知识要点 …… (186)
7.4.2 典型例题 …… (188)
常规训练 …… (191)
7.5 考研指导与训练 …… (194)
考研训练 …… (200)
第8章 假设检验 …… (204)
8.1 假设检验 …… (204)
8.1.1 知识要点 …… (204)
8.1.2 典型例题 …… (206)
常规训练 …… (208)
8.2 正态总体均值的假设检验 …… (209)
8.2.1 知识要点 …… (209)
8.2.2 典型例题 …… (210)
常规训练 …… (215)

8.3 正态总体方差的假设检验 …… (216)
8.3.1 知识要点 …… (216)
8.3.2 典型例题 …… (217)
常规训练 …… (223)
8.4 考研指导与训练 …… (225)
考研训练 …… (226)
附录1 综合测试题 …… (228)
附录2 参考答案 …… (244)
综合测试题参考答案 …… (264)
参考文献 …… (268)

第 1 章

随机事件及其概率

基本要求

（1）了解样本空间（基本事件空间）的概念，掌握事件的关系及运算.

（2）理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯（Bayes）公式.

（3）理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算的方法；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

重点与难点

本章重点

（1）随机事件及事件间的运算关系.

（2）概率的公理化定义及概率的基本性质的应用.

（3）乘法公式及条件概率公式.

（4）事件的独立性及其应用.

本章难点

（1）概率的公理化定义及概率的基本性质的应用.

（2）古典概率的计算及条件概率、全概率公式和贝叶斯（Bayes）公式的应用.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　知识要点

1. 随机试验的概念

具有以下三个特征的试验称为随机试验，用字母 E 表示：（1）试验可以在相同的条件下

重复进行；（2）每次试验的结果不止一个，并事先能明确试验的所有可能的结果；（3）试验前不能确定哪一个结果会发生.

2. **样本空间、随机事件、基本事件、不可能事件、必然事件的概念**

随机试验 E 中的所有可能的结果组成的集合称为样本空间 Ω（每一个结果称为样本点）；样本空间的子集（由某些样本点组成）称为随机事件；每一个样本点（即每一个结果）称为基本事件；一定不发生的事件叫作不可能事件，记作 $\varnothing$；一定发生的事件叫作必然事件，即 Ω.

3. **事件间的关系和运算**

熟练掌握事件的运算关系是正确计算随机事件概率的基础. 以下列出事件之间的关系及运算规律：

（1）包含关系：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 中的样本点都属于 B，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

（2）相等关系：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等（或等价），记为 $A = B$.

（3）并（或和）的事件：事件 A 和事件 B 至少有一个发生，记为 $A \cup B$，称为 A 与 B 的并（或和）. 它是由 A 与 B 中的所有样本点构成的集合.

一般地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，它表示事件 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生. 可列个事件 A_1，A_2，…的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，它表示事件序列 A_1，A_2，…中至少有一个事件发生.

对于任意事件 A，有 $A \cup \varnothing = A$，$A \cup A = A$，$A \cup \Omega = \Omega$. 若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$.

（4）积（或交）的事件：事件 A 和 B 同时发生，记为 $A \cap B$，也简记为 AB，称为事件 A 与 B 的积（交），它是由事件 A 和 B 中共同的样本点构成的集合.

一般地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，它表示事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生. 可列个事件 A_1，A_2，…的积事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，它表示事件序列 A_1，A_2，…的事件同时发生.

由积事件的定义可知，对于任意事件 A，有 $A \cap A = A$，$A \cap \Omega = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$.

（5）差的事件：事件 A 发生而事件 B 不发生，记为 $A - B$，称为事件 A 和 B 的差. 它是由集合 A 中去掉属于 B 的元素后剩余的点组成的集合.

（6）互不相容（互斥）事件：若事件 A 和 B 不能同时发生，则称事件 A 和 B 为互不相容事件或互斥事件. 记作 $A \cap B = \varnothing$.

两个事件互斥的基本特征是它们无共性，即它们不含有相同的样本点.

（7）互逆（对立）事件：设事件 A 和 B 互不相容，且 $A \cup B = \Omega$，则称事件 A 和 B 为对立事件，也称事件 A 和 B 为互逆事件. 这时 B 称为 A 的逆事件，记为 $\overline{A}$.

由差事件与逆事件的定义，对于任意事件 A 与 B，有 $\overline{A} = \Omega - A$，$\overline{\overline{A}} = A$，$A \cap \overline{A} = \varnothing$，

$A \cup \overline{A} = \Omega$，$A - B = A - AB = A\overline{B}$.

（8）完备事件组：设 Ω 是试验 E 的样本空间，A_1，A_2，…，A_n 是 E 的一组事件，若 $A_iA_j = \varnothing$，$i \neq j$，i，$j = 1$，2，…，n；且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$，则称 A_1，A_2，…，A_n 为 Ω 的一个完备事件组.

（9）事件间的运算律：

①交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

②结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

③分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

④德·摩根律（对偶原理）：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

德·摩根律可以推广到任意多个事件的情形，即对于任意多个事件，有

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$$

1.1.2　典型例题

例 1.1.1　甲、乙、丙三人各射一次靶，记 A = “甲中靶”，B = “乙中靶”，C = “丙中靶”，则用上述三个事件的运算分别表示下列事件.

（1）“甲未中靶”；（2）“甲中靶而乙未中靶”；（3）“三人中只有丙未中靶”；（4）“三人中恰有一人中靶”；（5）“三人中至少有一人中靶”；（6）“三人中至少有一人未中靶”；（7）“三人中至少两人中靶”；（8）“三人均未中靶”；（9）“三人中至多一人中靶”；（10）“三人中至多两人中靶”；（11）恰有两人中靶.

分析　事件之间的关系运算，要与一些概率语言“至少”“恰有”“同时”等联系起来，并熟悉其运算规律.

解　利用事件的运算规律，有

（1）$\overline{A}$；（2）$A\overline{B}$；（3）$AB\overline{C}$；（4）$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$；（5）$A \cup B \cup C$；（6）$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$；（7）$AB \cup AC \cup BC$；（8）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；（9）$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；（10）$\overline{ABC}$ 或 $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$；（11）$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$.

例 1.1.2　指出下列各等式命题是否成立，并说明理由.

（1）$A \cup B = (A\overline{B}) \cup B$；（2）$\overline{A}B = A \cup B$；（3）$\overline{A \cup B} \cap C = \overline{ABC}$；（4）$(AB)(A\overline{B}) = \varnothing$.

分析　在考虑等式成立时，运用逆事件与事件之间的相互关系及对偶等运算规律，来了解其内在关系.

解　（1）成立.
$$\begin{aligned}(A\overline{B}) \cup B &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) \quad \text{（分配律）}\\ &= (A \cup B) \cap \Omega \\ &= A \cup B.\end{aligned}$$

（2）不成立. 若 A 发生，则必有 $A \cup B$ 发生，但由于 A 发生，必有 $\overline{A}$ 不发生，从而 $\overline{A}B$ 不发生，故 $\overline{A}B = A \cup B$ 不成立.

(3) 不成立. 若 $\overline{A \cup B} \cap C$ 发生，则 C 发生，且 $\overline{A \cup B}$ 发生，即 C 必然发生，故 $\overline{C}$ 必然不发生，从而 $\overline{ABC}$ 不发生，故（3）不成立.

（4）成立. $(AB)(A\overline{B}) = (AB)(\overline{B}A) = A(B\overline{B})A = (A\phi)A = \phi A = \phi$.

常规训练

1. 是非题.

（1）互不相容事件一定是对立事件.　　（　　）

（2）事件 $A - B$ 可表示为 $A\overline{B}$ 的事件.　　（　　）

2. （1）设 A，B 为任意两个随机事件，则事件 $(A \cup B)(\Omega - AB)$ 表示（　　）.

A. 必然事件　　B. A 与 B 恰有一个发生

C. 不可能事件　　D. A 与 B 不同时发生

（2）设 A，B， C 为三事件，则 $\overline{(A \cup C)B}$ 表示（　　）.

A. ABC　　B. $(\overline{AC}) \cup \overline{B}$

C. $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup C$　　D. $(\overline{A} \cup \overline{C}) \cup \overline{B}$

3. （1）设事件 A 和 B 及 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 各互不相容，则 A 和 B 为________________________.

（2）根据对偶原理，任意三事件 A，B，C 有 $\overline{A \cup B \cup C} =$ ________________________.

（3）设 E 为观察舟山地区 10 月份的平均气温. 则试验的样本空间为______________. 用 A 表示 10 月平均气温小于 20℃，则 A 为______________________.

4. 将一枚均匀的硬币抛两次，事件 A，B，C 分别表示“第一次出现正面”“两次出现同一面”“至少有一次出现正面”，试写出样本空间及事件 A，B，C 中的样本点.

5. 掷一颗骰子的试验，观察其出现的点数，事件 A =“偶数点”，B =“奇数点”，C =“点数小于 5”，D =“点数为小于 5 的偶数”，讨论上述事件间的关系.

6. 设某人向靶子射击 3 次，用 A_i 表示“第 i 次击中靶子”（$i=1，2，3$），试用语言描述下列事件：

（1）$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$；（2）$\overline{A_1\cup A_2}$；（3）$(A_1A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2A_3)$.

7. 化简 $\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}$.

8. 设 A 和 B 是任意两事件，化简下列二式：

（1）$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$；（2）$AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}$.

9. 证明：$(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}=A-B$.

1.2　频率与概率

1.2.1　知识要点

1. 频率的定义及性质

在 n 次重复试验中，若事件 A 发生了 n_A 次，则称 n_A 为事件 A 发生的频数，称比值 n_A/n 为事件 A 发生的频率，并记成 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=n_A/n$.

依照频率的定义易知，频率具有下列基本性质：

（1）非负性：对任意事件 A，$f_n(A)\geqslant 0$；

（2）规范性：$f_n(\Omega)=1$；

（3）有限可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 互不相容，则有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

注： 频率在一定程度上反映了事件 A 发生可能性大小，但在一定条件下做重复试验，其结果可能是不一样的，因此不能用频率代替概率.

2. 概率的统计定义及性质

在一定条件下重复进行试验，如果随着试验次数 n 的增加，事件 A 在 n 次试验中出现的频率 $f_n(A)$ 稳定于某一数值 p（或稳定地在某一数值 p 附近波动），则称数值 p 为事件 A 在这一定条件下发生的概率，记作

$$P(A)=p$$

上述概率的定义是由频率引进的，与频率类似，它也具备下述性质：

（1）非负性：对任意事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

（2）规范性：$P(\Omega)=1$；

（3）有限可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 互不相容，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)$$

3. 概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间. 对 Ω 中的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，如果这个集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列三个条件，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率：

（1）非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

（2）规范性：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

（3）可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容的事件序列，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，$i, j=1, 2, \cdots$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

4. 概率的基本性质

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

性质 2　设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，即对于 $i \neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，$i, j=1, 2, \cdots, n$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \text{（有限可加性）}$$

性质 3　对于任一事件 A，有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

性质 4　设 A，B 是两个事件，若 $B \subset A$，则有

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

推论 1　若 $A \supset B$，则有 $P(A) \geqslant P(B)$；对于任意事件 A，有 $P(A) \leqslant 1$.

性质 5　（加法公式）对于任意两事件 A，B，有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推论 2　对于任意的事件 A，B，有 $P(A \cup B) \leqslant P(A)+P(B)$.

推论 3　对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质 6　可以推广到任意有限多个事件的情形. 对于任意多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

特别地，对于三个事件 A_1, A_2, A_3，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

1.2.2　典型例题

例 1.2.1　已知事件 A，B 同时发生时事件 C 发生，证明 $P(C) \geqslant P(A)+P(B)-1$.

解　由事件的运算关系知，此时 $AB \subset C$，从而有 $P(C) \geqslant P(AB)$. 又由加法公式及 $0 \leqslant P(A \cup B) \leqslant 1$，可得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A \cup B) \geqslant P(A)+P(B)-1$$

由此可得

$$P(C) \geqslant P(A)+P(B)-1$$

例 1.2.2　设 $P(\bar{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\bar{B})=0.5$，求 $P(\bar{A} \cup \bar{B})$；$P(\bar{A}B)$；$P(A \cup \bar{B})$；$P(\overline{AB})$；$P[B(A \cup \bar{B})]$.

解　易知 $P(A)=0.7$，$P(\bar{B})=0.6$，由 $P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})=0.2$，又有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.9$$

由此可知：

$$P(\bar{A} \cup \bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-1+P(A \cup B)=0.8$$

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=0.2$$

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.8$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)=0.1$$

$$P[B(A\cup\overline{B})]=P(AB)+P(\phi)=0.2$$

例 1.2.3 已知 $AC=\phi$，$P(C)=0.3$，$P(BC)=0.1$，求 $P[\overline{A}(C-B)]$

解 注意到 $AC=\phi$，$\overline{A}\supset C\supset C-B$，则 $P[\overline{A}(C-B)]=P(C-B)=P(C)-P(BC)=0.2$.

例 1.2.4 某城市中发行两种报纸 A，B，经调查，在这两种报纸的订户中，订阅 A 报的有 45%，订阅 B 报的有 35%，同时订阅两种报纸 A，B 的有 10%，求只订一种报纸的概率.

分析 居民订阅报纸可看成随机事件. 利用事件的运算关系把复杂事件用简单事件来表示，然后利用相关的概率公式求得概率.

解 记 A = “订阅 A 报”，B = “订阅 B 报”，C = “只订一种报”，则

$$\begin{aligned}P(C)&=P[(A-B)\cup(B-A)]=P[(A\overline{B})\cup(B\overline{A})]=P(A-AB)+P(B-AB)\\&=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=0.45-0.1+0.35-0.1=0.6\end{aligned}$$

例 1.2.5 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，$P(AB)=0$. 求事件 A，B，C 全不发生的概率.

解
$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right]=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

例 1.2.6 设事件 A，B，C 两两互不相容，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.4$. 求 $P[(A\cup B)-C]$.

解 因为 A，B，C 两两互不相容，所以 $A\subset\overline{C}$，$B\subset\overline{C}$，$P(AB)=0$. 因而

$$\begin{aligned}P[(A\cup B)-C]&=P[(A\cup B)\overline{C}]=P[(A\overline{C}\cup B\overline{C}]\\&=P(A\overline{C})+P(B\overline{C})-P(AB\overline{C})\\&=P(A)+P(B)=0.5\end{aligned}$$

常规训练

1. 是非题.

(1) 概率可用频率去定义，所以概率就是频率. ( )

(2) 对任意 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\leqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)$. ( )

2. (1) 当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则 ( ).

A. $P(C)=P(AB)$　　　　B. $P(C)=P(A\cup B)$