



高等院校理工类规划教材
北京邮电大学精品教材

复变函数 及其应用

FUBIAN HANSHU JIQI YINGYONG

李叶舟 刘文君 编著



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是按照教育部最新审订的关于复变函数课程的基本要求进行编写的, 主要内容包括复数、解析函数、复变函数的积分、复级数、留数及其应用、保角映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换、希尔伯特变换等. 每章的最后都有小结和课后习题, 可以帮助读者复习并加深理解.

本书可以作为高等院校工科或其他非数学专业的教材, 也可以作为科学技术人员、工程技术人员的参考书籍.

图书在版编目(CIP) 数据

复变函数及其应用 / 李叶舟, 刘文君编著. -- 北京: 北京邮电大学出版社, 2020.6
ISBN 978-7-5635-5955-8

I. ①复… II. ①李… ②刘… III. ①复变函数—高等学校—教材 IV. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020) 第 007549 号

策 划 编 辑: 彭 楠 责 任 编 辑: 徐振华 米文秋 封 面 设 计: 七星博纳

出 版 发 行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号

邮 政 编 码: 100876

发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 保定市中画美凯印刷有限公司

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张: 13.75

字 数: 341 千字

版 次: 2020 年 6 月第 1 版

印 次: 2020 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5955-8

定价: 35.00 元

• 如有印装质量问题, 请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

前 言

本书是针对高等院校非数学类专业的学生,按照教育部最新审订的关于“复变函数”课程的基本要求,结合我国新世纪高等教育迅速发展、高等人才培养对数学教育的要求不断提高的现状,利用作者多年从事“复变函数”课程教学工作的经验所编写的教材。“复变函数”是工科数学的重要基础课程之一,作者在编写过程中考虑了不同专业的不同要求,对内容的筛选和深浅进行了适当平衡,全书系统地介绍了复变函数及相关的基本理论和方法,本书可以为具体工程实施提供参考。

本书包括复数、解析函数、复变函数的积分、复级数、留数及其应用、保角映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换、希尔伯特变换等 9 章。作者对全书内容进行了仔细的筛选,使其尽量涵盖最基础、最重要的概念与定理等知识点;对结构进行了精心的编排,章节之间联系紧密、循序渐进,便于教学的进行;在文字表达上力求简明通俗,便于读者理解。除此之外,本书还在每章的最后提供了丰富且全面的练习题。在本书的编写过程中,作者始终坚持理论联系实际的原则,尽可能使本书成为读者学习过程中有力的工具。

在本书的编写和审阅过程中,作者得到了北京邮电大学在资源和专业知识等方面的大力支持,特别得到了牛少彰、刘吉佑两位教授的帮助和指导,他们丰富的教学经验提供了宝贵的材料。本书的编写和出版也得到了孙洪祥教授和闵祥伟教授的支持和帮助,在此一并表示感谢。

由于作者水平有限,书中难免有疏漏和错误之处,恳请读者批评指正。

作 者

2020 年 2 月

目 录

第 1 章 复数	1
1.1 复数及其表示法	1
1.1.1 复数的概念	1
1.1.2 复数的表示	1
1.2 复数的运算	4
1.2.1 复数的加法和减法	4
1.2.2 复数的乘法和除法	4
1.2.3 复数的 n 次幂与 n 次方根	6
1.2.4 复数的运算性质	8
1.3 复平面上的曲线和区域	9
1.3.1 复平面上的曲线方程	9
1.3.2 简单曲线与光滑曲线	11
1.3.3 平面点集	11
1.4 复球面与扩充复平面	13
1.5 小结	14
习题 1	15
第 2 章 解析函数	17
2.1 复变函数	17
2.1.1 复变函数的概念	17
2.1.2 复变函数的极限与连续性	21
2.2 解析函数	23
2.2.1 复变函数的导数	23
2.2.2 解析函数的概念	25
2.3 柯西-黎曼条件	26
2.4 初等函数	29
2.4.1 指数函数	29
2.4.2 对数函数	31
2.4.3 幂函数	33
2.4.4 三角函数与双曲函数	34
2.4.5 反三角函数和反双曲函数	36
2.5 小结	37
习题 2	37

第 3 章 复变函数的积分	40
3.1 复变函数积分的概念	40
3.1.1 复积分的定义	40
3.1.2 复积分存在的条件及计算公式	41
3.1.3 复积分的基本性质	43
3.2 柯西积分定理	45
3.2.1 柯西积分定理	45
3.2.2 柯西-古萨基本定理	46
3.2.3 复合闭路定理	47
3.3 原函数与不定积分	50
3.4 柯西积分公式和高阶导数公式	52
3.4.1 柯西积分公式	52
3.4.2 高阶导数公式	55
3.4.3 柯西不等式	58
3.5 解析函数与调和函数的关系	58
3.6 小结	63
习题 3	64
第 4 章 复级数	68
4.1 复数项级数	68
4.1.1 复数项级数的收敛性及其判别法	68
4.1.2 复数项级数的收敛性及其判别法	69
4.2 幂级数	71
4.2.1 幂级数的概念	71
4.2.2 收敛圆和收敛半径	72
4.2.3 收敛半径的求法	73
4.2.4 幂级数的运算性质	76
4.3 泰勒级数	77
4.3.1 泰勒级数展开定理	77
4.3.2 初等函数的泰勒级数展开式	80
4.4 洛朗级数	84
4.4.1 洛朗级数展开定理	84
4.4.2 用洛朗级数展开式计算积分	88
4.5 小结	90
习题 4	92
第 5 章 留数及其应用	95
5.1 孤立奇点	95
5.1.1 孤立奇点的定义	95

5.1.2	孤立奇点的分类	95
5.1.3	用函数的零点判别极点的类型	97
5.1.4	函数在无穷远点的性态	99
5.2	留数和留数定理	101
5.2.1	留数的定义和计算	101
5.2.2	留数定理	104
5.2.3	洛必达法则	107
5.2.4	函数在无穷远点的留数	108
5.3	留数在定积分计算中的应用	110
5.3.1	形如 $\int_0^\alpha f\left(\cos \frac{2\pi\theta}{\alpha}, \sin \frac{2\pi\theta}{\alpha}\right) d\theta$ 的积分	110
5.3.2	形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 的积分	112
5.3.3	形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\beta x}dx (\beta > 0)$ 的积分	115
5.4	辐角原理及其应用	118
5.4.1	对数留数	119
5.4.2	辐角原理	120
5.4.3	路西定理	122
5.5	小结	123
	习题 5	126
第 6 章	保角映射	131
6.1	保角映射的概念	131
6.1.1	曲线的切线方向和两条曲线的夹角	131
6.1.2	解析函数导数的几何意义	132
6.1.3	保角映射的概念	135
6.2	分式线性映射	136
6.2.1	保角性	136
6.2.2	保圆性	138
6.2.3	保交比性	138
6.2.4	保对称性	139
6.2.5	保侧性	140
6.2.6	三种特殊的分式线性映射	143
6.3	几个初等函数所构成的映射	147
6.3.1	幂函数与根式函数	147
6.3.2	指数函数与对数函数	149
6.4	保角映射的几个一般性定理及其应用	152
6.4.1	保角映射的几个一般性定理	152

6.4.2	施瓦茨-克里斯托费尔映射	153
6.4.3	拉普拉斯方程的边值问题	156
6.5	小结	158
	习题 6	159
第 7 章	傅里叶变换	164
7.1	傅里叶变换	164
7.1.1	傅里叶积分公式	164
7.1.2	傅里叶变换	166
7.2	单位脉冲函数及其傅氏变换	167
7.2.1	单位脉冲函数	167
7.2.2	δ 函数的筛选性质	168
7.2.3	广义傅氏变换	169
7.3	傅里叶变换的基本性质	170
7.4	卷积与卷积定理	174
7.4.1	卷积的定义	175
7.4.2	卷积的性质	176
7.4.3	卷积定理	176
7.5	小结	177
	习题 7	177
第 8 章	拉普拉斯变换	180
8.1	拉普拉斯变换的概念	180
8.1.1	拉普拉斯变换的定义	180
8.1.2	拉氏变换存在定理	180
8.1.3	一些常用函数的拉氏变换	182
8.1.4	δ 函数的拉氏变换	183
8.2	拉氏变换的性质	185
8.3	拉氏逆变换	192
8.3.1	拉氏反演积分	192
8.3.2	利用留数计算反演积分	192
8.4	卷积与卷积定理	194
8.4.1	卷积的概念	194
8.4.2	卷积的性质	195
8.4.3	卷积定理	195
8.5	拉氏变换的应用	196
8.5.1	解常系数线性常微分方程	196
8.5.2	用拉氏变换解线性微分方程组	199
8.5.3	用拉氏变换解某些积分方程	200

8.5.4 用拉氏变换解某些微分积分方程	201
8.6 小结	201
习题 8	202
第 9 章 希尔伯特变换	206
9.1 希尔伯特变换的定义	206
9.1.1 卷积积分	206
9.1.2 物理意义	206
9.1.3 解析函数的虚部	207
9.2 希尔伯特变换的性质	207
习题 9	209
参考文献	210

第1章 复数

“高等数学”(微积分)研究的对象是实变量函数,即定义在实数域上,取值为实数的函数。“复变函数”研究的对象是定义在复数域上,取值为复数的函数,特别是一类具有解析性质的函数.复变函数的许多概念和定理与高等数学相应的问题类似,是实变函数在复数域内的推广和发展,二者有许多相似之处,也有许多不同点,因此在学习上要善于对照和比较,掌握二者之间的区别和联系.

复变函数的理论和方法在数学的其他分支、自然科学和工程技术中有着广泛的应用,是解决诸如流体力学、电磁学、热学、弹性理论中平面问题的有力工具.

1.1 复数及其表示法

1.1.1 复数的概念

在中学阶段,我们已经学习过复数的概念,通常称形如 $z = x + iy$ 的表达式为复数,其中 x 和 y 为任意实数, $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位.实数 x 和 y 分别称作复数 z 的实部和虚部,记为

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

特别地,当 $x = 0, y \neq 0$ 时,称 $z = iy$ 为纯虚数;当 $y = 0$ 时,称 $z = x + 0i = x$ 为实数.

复数 $z = x + iy = 0$, 当且仅当它的实部 x 和虚部 y 同时为 0.

两个复数相等,当且仅当它们的实部和虚部分别相等,称复数 $x - iy$ 为 $z = x + iy$ 的共轭复数,记作 $\bar{z}$.

1.1.2 复数的表示

通常称 $z = x + iy$ 为复数 z 的代数形式,除此之外,复数 z 还有多种表示形式,下面介绍复数的几种表示方法.

由于复数 $z = x + iy$ 由一个有序实数对 (x, y) 唯一确定,因此在取定平面直角坐标系 xOy 时,实数对 (x, y) 可视为平面直角坐标系中的两个坐标组成的序对,这就建立了复数 z 与平面上的点的一一对应关系,于是对于任意一个复数 $z = x + iy$, 都对应于平面上的一点 $P(x, y)$, 故可用实数对形式 (x, y) 表示复数.

由于所有实数与横坐标轴上的点一一对应,因此称横坐标轴为实轴;同样地,所有的纯虚数与除原点外的纵坐标轴上的点一一对应,因此称纵坐标轴为虚轴.相对应于横、纵坐标所在的平面,称实轴、虚轴所在的平面为复平面,或根据表示复数的字母 $z, w, \dots$, 称其为 z 平面, w 平面, $\dots$. 显然,当 $y \neq 0$ 时,复数 z 与 $\bar{z}$ 关于实轴对称.

由于任意一个复数 z 都与平面上的点 (x, y) 对应, 因此复数 z 也可以与以原点为起点, 以 $P(x, y)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 对应, 即复数 z 可用向量表示, 如图 1-1 所示.

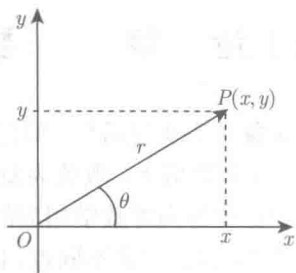


图 1-1

此时, x 和 y 分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 在实轴和虚轴上的投影. 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 $|\overrightarrow{OP}| = r$ 称为复数 $z = x + iy$ 的模或绝对值, 记作

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

当 $z \neq 0$ 时, 以 x 轴的正方向为始边, 以向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的夹角 θ 称为复数 z 的辐角, 记作 $\text{Arg } z = \theta$. 由于以 x 轴的正方向为始边, 以 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角有无限个, 它们之间可以相差 2π 的整数倍, 因此 $\text{Arg } z$ 有无穷多个值, 即若 θ_1 是复数 z 的任意一个辐角, 则有

$$\text{Arg } z = \theta_1 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

在复数 z 的全部辐角中, 我们把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\text{Arg } z$ 的主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$.

因此, 对于任意非零复数 z ,

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

当 $z = x + iy \neq 0$ 时, 辐角的主值可根据反正切 $\text{Arctan} \frac{y}{x}$ 的主值 $\arctan \frac{y}{x}$ 确定:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

注意: 当 $z = 0$ 时, 辐角无意义.

例 1.1.1 求 $\text{Arg}(1 + i)$ 及 $\text{Arg}(-2\sqrt{3} + 2i)$.

解 $\text{Arg}(1 + i) = \arg(1 + i) + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (k 为整数).

$\operatorname{Arg}(-2\sqrt{3}+2i) = \arg(-2\sqrt{3}+2i) + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (k 为整数).

设 r, θ 分别为非零复数 $z = x + iy$ 的模和辐角, 由直角坐标与极坐标的关系:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta,$$

可把复数 z 表示成以下形式:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

称为复数 z 的三角形式.

利用欧拉 (Euler) 公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 又可以得到

$$z = re^{i\theta},$$

称为复数 z 的指数形式.

复数的各种表示法可以相互转换, 以适应讨论不同问题时的需要.

例 1.1.2 将下列复数化为三角形式与指数形式.

$$(1) z = -3i; \quad (2) z = -1 - i; \quad (3) z = \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}.$$

解 (1) 显然, $r = |z| = 3, \arg z = -\frac{\pi}{2}$, 因此 z 的三角形式为

$$z = 3 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right],$$

z 的指数形式为

$$z = 3e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

(2) 由 $r = |z| = \sqrt{2}, \arg z = -\frac{3\pi}{4}$ 知, z 的三角形式为

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

z 的指数形式为

$$z = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

(3) 易见 $r = 1, \tan z = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 且 $\cos \frac{\pi}{3} > 0, \sin \frac{\pi}{3} > 0$, 所以

$$\arg z = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6},$$

故 z 的三角形式为

$$z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6},$$

z 的指数形式为

$$z = e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

1.2 复数的运算

1.2.1 复数的加法和减法

和实数一样,复数也有加、减、乘、除四则运算. 设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是任意给定的两个复数, 定义复数的加法和减法分别为

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

称复数 $z_1 + z_2$ 为复数 z_1 与 z_2 的和, 称复数 $z_1 - z_2$ 为复数 z_1 与 z_2 的差.

引进复平面和复数的几何表示后, 复数的加减运算与向量按照平行四边形法则的加减运算保持一致. 由图 1-2 和图 1-3 可以看出, 若用向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 和 $\overrightarrow{OP_2}$ 分别表示复数 z_1 和 z_2 , 则复数 $z_1 + z_2$ 所对应的向量 $\overrightarrow{OP}$ 即为复数 z_1 与 z_2 所对应向量的和向量, 复数 $z_1 - z_2$ 所对应的向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 或它平移后的向量 $\overrightarrow{OP}$ 即为复数 z_1 与 z_2 所对应向量的差向量.

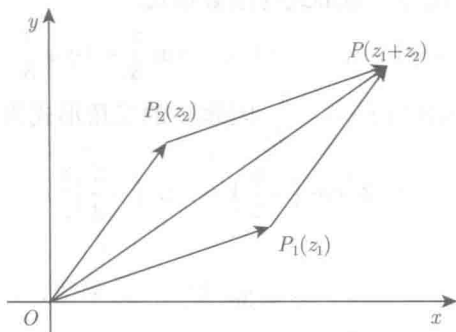


图 1-2

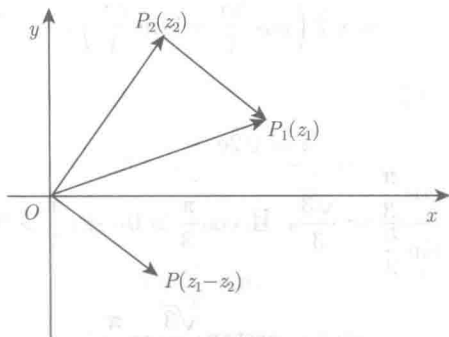


图 1-3

1.2.2 复数的乘法和除法

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的乘法定义为

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2),$$

称 $z_1 z_2$ 为 z_1 与 z_2 的积. 两个复数作乘积时, 可按多项式的乘法法则进行, 注意结果中的 $i^2 = -1$. 特别地,

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

定义复数的除法时, 即要找到一个复数 $z = x + iy$ 使得 $z z_2 = z_1$, 其中 $z_2 \neq 0$, 我们称复数 $z = x + iy$ 为 z_1 除以 z_2 的商, 记作 $z = \frac{z_1}{z_2}$. 从定义可推出

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

利用复数的三角形形式或指数形式讨论复数的乘除法, 可以进一步了解乘法、除法的几何意义, 而且在进行复数乘除运算时, 三角形形式或指数形式常常要比代数形式方便.

设 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ 是两个非零复数, 由复数乘法的定义有

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)], \end{aligned}$$

这是复数乘积的三角形形式, 最后一步用到了三角函数的和角公式, 相应的指数形式为

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

上式说明, $z_1 z_2$ 对应的向量是把 z_1 所对应的向量伸缩 $|z_2| = r_2$ 倍, 再旋转一个角度 $\theta_2 = \arg z_2$ 得到的, 则有

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,$$

第二个等式应该理解为两个集合的相等. 于是可以得到复数的乘法法则: 两个复数相乘, 乘积的模等于它们的模的乘积, 乘积的辐角等于它们的辐角的和. 当 $|z_2| = 1$ 时, 只需要旋转一个角度 $\arg z_2$. 特别地, iz 相当于将 z 所对应的向量沿逆时针方向^①旋转 $\frac{\pi}{2}$.

用三角形形式和指数形式表示除法时, 先假设 $z_2 \neq 0$, 而

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

这是复数商的三角形形式, 相应的指数形式为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

同样地, $\frac{z_1}{z_2}$ 对应的向量是把 z_1 所对应的向量伸缩 $\frac{1}{|z_2|} = \frac{1}{r_2}$ 倍, 再顺时针旋转一个角度 $\theta_2 = \arg z_2$ 得到的, 则有

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2}, \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

① 逆时针方向: 在复平面上, 一直线绕其上一旋转, 可有两种旋转方向, 一种是“逆时针”, 另一种是“顺时针”, 一般地, 我们规定逆时针方向旋转的角度为正, 顺时针方向旋转的角度为负.

于是可得复数的除法法则: 两个复数相除, 商的模等于分子的模与分母的模的商, 商的辐角等于分子的辐角与分母的辐角的差.

例 1.2.1 设 $z_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$, $z_2 = \sin \frac{\pi}{3} - i \cos \frac{\pi}{3}$, 求 $z_1 z_2$ 和 $\frac{z_1}{z_2}$.

解 z_1, z_2 的三种表达形式为

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}},$$

$$z_2 = \sin \frac{\pi}{3} - i \cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

由复数代数形式的乘法和除法公式得

$$z_1 z_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}.$$

由三角形式、指数形式的运算得

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i, \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$$

或

$$z_1 z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}.$$

不难证明, 复数的加法和乘法同样遵循下列运算规律.

- ① 加法交换律: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- ② 加法结合律: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
- ③ 乘法交换律: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.
- ④ 乘法结合律: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.
- ⑤ 乘法对于加法的分配率: $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

1.2.3 复数的 n 次幂与 n 次方根

设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, $\dots$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ 是 n 个非零复数, 用数学归纳法可以得到这 n 个复数的乘积为

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)},$$

特别地, 我们把 n 个相同的复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂, 记作 z^n . 设 $z = re^{i\theta}$, 则

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

当 $r = 1$ 时, $z = \cos \theta + i \sin \theta$, 有

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

这就是著名的棣莫弗 (De Moivre) 公式.

对于任意非零复数 z , 若有复数 w , 使得 $w^n = z$, 则称 w 为 z 的 n 次方根, 记作 $w = \sqrt[n]{z}$. 下面来求根 w 的具体形式. 设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0$, $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, 根据棣莫弗公式,

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

再由正弦函数、余弦函数的周期性, 可得

$$\rho^n = r, \cos n\varphi = \cos \theta = \cos(\theta + 2k\pi), \sin n\varphi = \sin \theta = \sin(\theta + 2k\pi),$$

其中 k 为整数. 于是 $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, 这样就得到了 z 的取 n 个不同值的 n 次方根

$$w = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

不难验证, k 取其他整数时, 上述 n 个值会重复出现, 故 z 的 n 次方根只取上述 n 个值. 由于复数 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个不同值的模都为 $\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|z|}$, 且对应相邻的两个 k 的方根的辐角均相差 $\frac{2\pi}{n}$, 因此在几何上, 复平面上 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个不同值对应的 n 个点是以原点为中心, 以 $\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点. 特别是 $z = 1$ 时, 若令 $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, 则 1 的 n 次方根为 $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$.

例 1.2.2 求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解 因为 $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, 由 n 次方根公式得

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

可得 4 个根分别为

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right), & w_1 &= \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right), \\ w_2 &= \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right), & w_3 &= \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right). \end{aligned}$$

这 4 个根对应于在复平面上内接于以原点为中心, 以 $\sqrt[8]{2}$ 为半径的圆的正方形的 4 个顶点, 如图 1-4 所示.

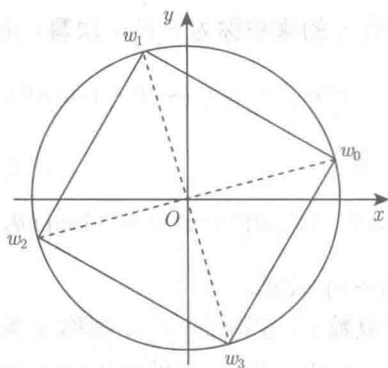


图 1-4

例 1.2.3 试用 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 表示 $\cos 3\theta$ 和 $\sin 3\theta$.

解 由棣莫弗公式,

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \\ \sin 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta.\end{aligned}$$

1.2.4 复数的运算性质

以上介绍了复数的共轭复数、复数的模以及四则运算,下面列出这些运算所具有的性质,这些性质很容易由定义、几何意义及运算法则得出.

① 设 $z = x + iy$, 由图 1-1 有不等式

$$\begin{aligned}|x| &\leq |z|, |y| \leq |z|, |z| \leq |x| + |y|, \\ -|z| &\leq \operatorname{Re} z \leq |z|, -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|.\end{aligned}$$

② 根据三角形两边之和大于第三边 (见图 1-2), 可推出复数的三角不等式:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

由于 $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与点 z_2 之间的距离, 又三角形两边之差小于第三边 (见图 1-3), 则有

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

$$\textcircled{3} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$$\textcircled{4} |z| = |\bar{z}|.$$

$$⑤ \bar{\bar{z}} = z.$$

$$⑥ z\bar{z} = |z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2, |z|^2 = |z^2|.$$

$$⑦ \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

$$⑧ z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z = 2x, z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z = 2iy.$$

例 1.2.4 求复数 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$ 的模.

解 因为

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = \frac{i}{i(-i)} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

所以

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

例 1.2.5 若 z 为非零复数, 证明: $|z^2 - \bar{z}^2| \leq 2z\bar{z}$.

证明 由于 $|z| = |\bar{z}|$, $2z\bar{z} = 2|z|^2$, 由和、差的模的不等式可得

$$|z^2 - \bar{z}^2| \leq |z^2| + |\bar{z}^2| = |z|^2 + |\bar{z}|^2 = 2|z|^2 = 2z\bar{z}.$$

例 1.2.6 设 $z = x + iy$, $w = \frac{z-1}{z+1}$, 求 w 的实部和虚部.

解

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w &= \frac{w + \bar{w}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z-1}{z+1} + \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \right) = \frac{1}{2} \frac{2|z|^2 - 2}{(z+1)(\bar{z}+1)} \\ &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 2x + 1} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w &= \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\frac{z-1}{z+1} - \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \right) = \frac{1}{i} \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 2x + 1} \\ &= \frac{2y}{|z|^2 + 2x + 1} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

1.3 复平面上的曲线和区域

由 1.1 节可知, 复平面上的点集与实直角坐标系平面上的点集存在一一对应关系.

1.3.1 复平面上的曲线方程

实平面上的曲线有直角坐标方程和参数方程两种形式, 复平面上的曲线也有直角坐标方程和参数方程两种复数形式.