普通高等学校少数民族预科教育系列教材

简明微积分

主　编　沈彩霞　黄永彪

副主编　杨社平　梁元星　农　正　刘巧玲

　　　　梁丽杰　罗　丹　吴文俊

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

前　　言

随着网络发展的日新月异和智能手机的普及，学生获取知识的途径也在发生着巨大的变化，传统的单一课堂教学模式已不能很好地适应新形势的变化. 为适应这一变化，根据普通高等学校少数民族预科数学教学大纲的要求，我们编写了这本《简明微积分》教材.

考虑到民族预科教学的特殊要求，结合编者多年的预科教学经验和预科学生的特点，本教材编写的基本出发点是：帮助学生打好数学基础，加强运算训练，掌握数学基本思想和方法. 既要巩固和加深对初等数学知识的理解和掌握，又要学习高等数学中的一些相关内容，使学生初步了解和掌握高等数学的学习方法，以便学生能较好地从初等数学学习向高等数学学习自然过渡，实现“补”和“预”的目标，为学生直升本科学习专业知识和提高数学素养服务.

本教材力图在以下三个方面体现特色：

1. 对微积分若干重点和难点提供微课视频（或 PPT 注解）以及课外延伸阅读材料，学习者可通过扫描二维码观看或阅读. 其能更好地帮助学习者在课下进行课前预习、课后加深理解知识点，以及引发对微积分学习的好奇心和增加教材阅读的趣味. 多种形式的媒体资源极大地丰富了知识的呈现形式，在提升课程效果的同时，为学习者自主学习提供思维与探索空间.

2. 优化内容结构，降低理论深度. 针对数学基础较薄弱学生的思维特点，适当降低了部分内容的深度和广度的要求，特别是淡化了各种运算技巧及理论证明.

3. 内容编写由浅入深，过程详细，思路清晰. 尽可能采用通俗易懂的语言和形象直观的思维方式来表述，使基本概念和原理讲解通俗透彻，数学的基本技能和技巧叙述准确清晰，便于学生理解掌握.

本教材主要包括函数、函数极限、连续函数、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及微积分与数学作文等内容. 本教材是为普通高等院校少数民族预科生编写的，也可作为普通高等院校经济类、管理类等各专业以及高职高专类学生学习的教材或参考书，也可以供学生自学使用.

本教材由广西民族大学和百色学院从事民族预科数学教学的教师共同编写，编写分工是：梁丽杰第 1 章，杨社平第 2、8 章，黄永彪第 3 章，刘巧玲第 4 章，梁元星第 5 章，沈彩霞第 6 章，农正第 7 章. 黄瑞政、罗丹、吴文俊参与了部分内容的编写和全书的校对工作. 全书由沈彩霞、黄永彪具体策划和组稿、审稿，最后由沈彩霞统稿和定稿.

限于编者水平，教材中难免有不足之处，殷切希望广大读者批评指正.

编　　者

目　　录

第 1 章

函　　数

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映. 它不仅是高等数学研究的主要对象，也是数学解决问题的桥梁. 在本章中，我们将在中学已学过的函数知识的基础上，进一步复习和加深有关函数的概念，介绍函数的几种特性及初等函数等内容.

§1.1　预备知识

一、常量和变量

在考察某种自然现象或某个运动过程中，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在某个过程中，总是保持不变而取确定的值，这种量称为**常量**；还有一些量在某个过程中，总是不断地变化而取不同的值，这种量称为**变量**.

例如，在给一个密闭容器内的气体加热的过程中，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们都是常量；而气体的温度和压力在变化，它们则是变量.

应当注意，一个量是常量还是变量并不是绝对的，要根据所考察的具体过程或场合来具体分析，同一个量可能在某个过程或场合中是常量，而在另一过程或场合中却是变量.

例如，飞机在起飞和降落的过程中，飞行速度是不断变化的，因而它是变量；由于飞机在起飞到一定的高度（一般在 1 000 m 以上）时，即开始匀速飞行，直到开始降落为止，在这段匀速飞行的过程中速度保持不变，因而它是常量.

又如，严格地说，重力加速度 g 在离地心距离不同的地点所测得的值是不同的，因而在较小范围的地区内，g 可当作常量，而在较大范围的地区内，g 就应看作变量.

在数学中，通常用英文的前面几个字母，如 a、b、c、A、B、C 等表示常量，而后面的几个字母，如 x、y、z、X、Y、Z 等表示变量.

二、区间、绝对值和邻域

（一）区间

任何一个变量的取值都有一定的范围，这就是变量的变化范围. 它通常是一个非空的实

数集合. 如果变量是连续变化的, 那么它的变化范围常用区间来表示. 下面给出常用区间的分类、名称和记号.

1. 有限区间

(1) 设 a 和 b 都是实数, 且 $a<b$, 则称实数集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 为**闭区间**, 记作 $[a, b]$. 即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

(2) 称实数集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 为**开区间**, 记作 (a, b). 即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$$

(3) 称实数集合 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 为半开半闭区间, 分别记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$. 即 $[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$. 以上这些区间都称为有限区间, a 和 b 称为区间的端点, 数 $b-a$ 称为区间的长度, 从数轴上看, 有限区间都是长度有限的线段, 而线段可以不包括两个端点, 也可以包括一个或两个端点 (见图 1-1).

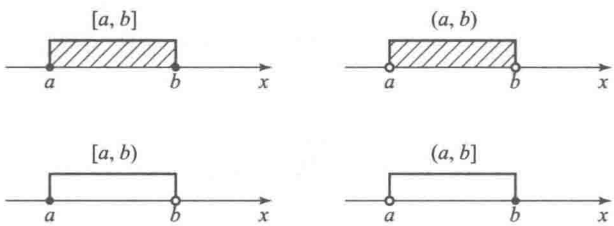


图 1-1

以图 1-1 中实心点 "·" 表示包括该端点, 空心点 "∘" 表示不包括该端点.

2. 无限区间

实数集合 $\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}$, $\{x \mid -\infty<x<b\}$, $\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$ 等都是无限区间, 依次记作

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\} ; \quad(-\infty, b)=\{x \mid -\infty<x<b\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$$

类似地, 可以定义无限区间 $(a,+\infty)$ 及 $(-\infty, b]$.

在不需要区分上述各种情况时, 我们就简单地称为"区间", 常用 I 表示.

(二) 绝对值

1. 绝对值的概念

实数 a 的绝对值是一个非负实数, 记作 $|a|$, 即

$$|a|=\begin{cases}a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a<0\end{cases}$$

在几何上, $|a|$ 表示数轴上的点 a 到原点 O 的距离.

根据算术根的定义, 显然有 $|a|=\sqrt{a^{2}}$.

2. 绝对值的性质

性质 1 对任何实数 a, 有

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

性质2　设 $k>0$，则

$$|a| \leqslant k \Leftrightarrow -k \leqslant a \leqslant k$$
$$|a| \geqslant k \Leftrightarrow a \geqslant k \text{ 或 } a \leqslant -k$$

性质3　$|a+b| \leqslant |a| + |b|$

证　由性质1，得

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,\quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

两式相加，得

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|$$

由性质2，得

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|$$

性质4　$|a-b| \geqslant ||a|-|b||$

证　由于　$|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b| + |b|$（性质3）

因此　$|a-b| \geqslant |a| - |b|$

又因为　$|a-b| = |b-a| \geqslant |b| - |a| = -(|a|-|b|)$

即有　$-|a-b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a-b|$

所以，由性质2，即得

$$||a|-|b|| \leqslant |a-b|$$

性质5　$|ab| = |a| \cdot |b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}(b \neq 0)$.

（证明略）

（三）邻域

邻域是一个与区间有关的概念，在高等数学中经常用到它．设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则数轴上与点 a 距离小于 δ 的全体实数的集合，即 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\ \delta)$，即

$$U(a,\ \delta) = (a-\delta,\ a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

其中点 a 称为邻域的中心；δ 称为邻域的半径，由此可知，邻域 $U(a,\ \delta)$ 就是以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$（见图1-2（a））.

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作

$$\mathring{U}(a,\ \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x \neq a$，$\mathring{U}(a,\ \delta)$ 是不包含中心点 a，而长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta)$（见图1-2（b））.

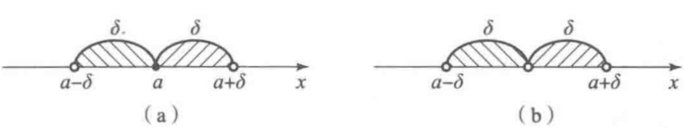


图1-2

例 写出下列各邻域（用集合或区间记号表示），并在数轴上画出它们的几何表示.

（1）点 2 的$\frac{3}{2}$邻域；（2）点 2 的去心$\frac{3}{2}$邻域.

解 （1）$a=2$，$\delta=\frac{3}{2}$，“点 2 的$\frac{3}{2}$邻域”即为

$$U\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left\{x\,\middle|\,|x-2|<\frac{3}{2}\right\}=\left\{x\,\middle|\,-\frac{3}{2}<x-2<\frac{3}{2}\right\}$$
$$=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}\right\}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$$

它在数轴上的几何表示如图 1－3（a）所示.

（2）$\mathring{U}\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left\{x\,\middle|\,0<|x-2|<\frac{3}{2}\right\}=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2},\ x\neq 2\right\}$

$$=\left(\frac{1}{2},\ 2\right)\cup\left(2,\ \frac{7}{2}\right)$$

它在数轴上的几何表示如图 1－3（b）所示.

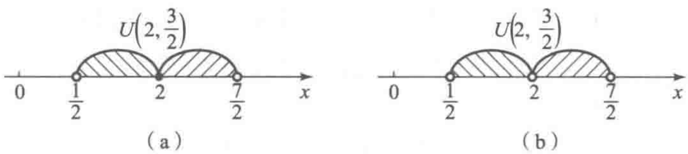


图 1－3

习题 1.1

1. 将下列不等式用区间表示：

（1）$-2\leqslant x\leqslant 3$；（2）$-2\leqslant x<3$；

（3）$-3<x<5$；（4）$-3<x<+\infty$；

（5）$x<3$；（6）$|x|>a(a>0)$.

2. 用区间表示下列邻域，并在数轴上画出它们的几何表示：

（1）以 -3 为中心，$\frac{1}{2}$为半径的邻域；

（2）以 -3 为中心，$\frac{1}{2}$为半径的去心邻域.

§1.2 不等式

一、不等式的性质

1. 实数大小的性质

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b$$

$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$$
$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$$

2. 不等式的基本性质

(1) $a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$.

(2) $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.

$a+b>c \Leftrightarrow a>c-b$.

$a>b$，且 $c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

(3) $a>b$，且 $c>0 \Rightarrow ac>bc$.

$a>b$，且 $c<0 \Rightarrow ac<bc$.

$a>b>0$，且 $c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$ ($n \geqslant 2$，$n \in \mathbf{N}$).

$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n \geqslant 2$，$n \in \mathbf{N}$).

3. 重要不等式

(1) 对任意实数 a，b 都有 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$，并且当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

(2) 对任意正实数 a，b 都有 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$，并且当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

(3) 对任意正实数 a，b，c 都有 $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$，并且当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

例1 比较 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小.

解
$$\begin{aligned}&(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)\\&=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1=x^2\end{aligned}$$

又因为对任意实数 x，都有 $x^2 \geqslant 0$，所以

$$(x^2+1)^2 \geqslant x^4+x^2+1$$

上式当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

例2 已知：$a>0$，$b>0$，$c>0$，求证

$$a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

证 因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},\ \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}$$

$$\frac{c+a}{2} \geqslant \sqrt{ca}$$

所以 $2(a+b+c) \geqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$.

即 $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

二、不等式的解法

在含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数值的全体所构成的集合叫作**不等式的解集**，不等式的解集一般可用集合的性质描述法或区间表示.

（一）一元一次不等式的解法

例 3 解不等式 $2(x+1)+\frac{x-2}{3}>\frac{7x}{2}-1$.

解 原不等式两边同乘以 6，得

$$12(x+1)+2(x-2)>21x-6$$
$$14x+8>21x-6$$

移项整理，得

$$-7x>-14$$

两边同除以 -7，得

$$x<2$$

所以原不等式的解集是 $\{x \mid x<2\}$.

从例 3 可以看到，解不等式实际上就是利用数与式的运算法则，以及不等式的性质，对所给的不等式进行变形，并要求变形后的不等式与变形前的不等式的解集相同，直到能表明未知数的取值范围为止，解集相同的不等式叫作**同解不等式**.

一个不等式变为它的同解不等式的过程，叫作不等式的同解变形.

我们知道，任何一个一元一次不等式，经过同解变形可化为

$$ax>b(a\neq 0)$$

的形式.

如果 $a>0$，则它的解集是 $\left\{x \,\middle|\, x>\frac{b}{a}\right\}$.

如果 $a<0$，则它的解集是 $\left\{x \,\middle|\, x<\frac{b}{a}\right\}$.

例 4 解不等式组 $\begin{cases}10+2x\leqslant 11+3x & (1)\\ 7x+2x<6+3x & (2)\end{cases}$.

解 原不等组中不等式（1）和不等式（2）的解集分别为

$$\{x \mid x\geqslant -1\},\ \{x \mid x<1\}$$

所以原不等式组的解集是

$$\{x \mid x\geqslant -1\}\cap\{x \mid x<1\}=[-1,1)$$

上述交集运算在数轴上表示，如图 1-4 所示.

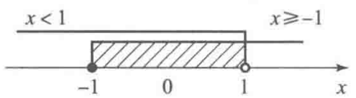


图 1-4

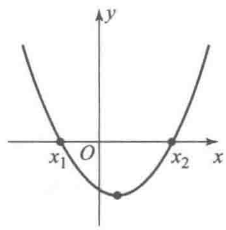
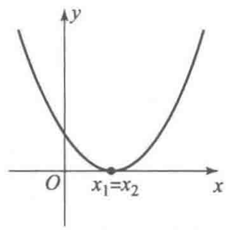
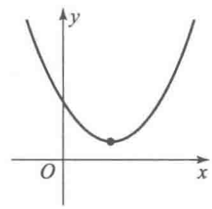
（二）一元二次不等式的解法

含有一个未知数并且未知数最高次数是二次的不等式叫作**一元二次不等式**. 它的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0\ (a\neq 0)$$

一元二次不等式与相应的二次函数及一元二次方程的关系如表 1-1 所示.

表 1－1

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根	有两相异实根 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 图像			
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	**R**
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

对于 $a<0$ 函数的图像开口向下，根据图像的位置，仍可得到相应一元二次不等式的解集（略）.

例 5 解不等式 $2x^2-3x-2>0$.

解 因为 $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-2)=25>0$

如图 1－5 所示，方程 $2x^2-3x-2=0$ 的解是

$$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=2$$

所以不等式的解集为$\left\{x\,\middle\vert\, x<-\dfrac{1}{2}\text{或 } x>2\right\}$.

例 6 解不等式 $-x^2+4x-3\geqslant0$.

解 将原不等式同解变形为

$$x^2-4x+3\leqslant0$$

方程 $x^2-4x+3=0$ 的解是

$$x_1=1,\ x_2=3$$

使 $x^2-4x+3\leqslant0$，如图 1－6 所示.

所以不等式的解集为 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant3\}$.

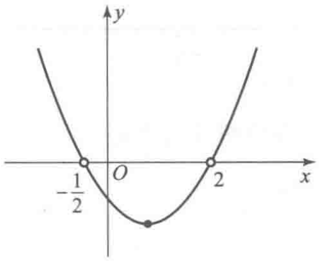


图 1－5

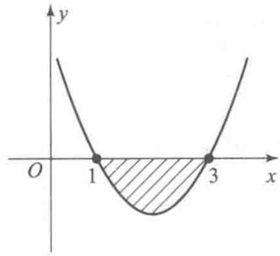


图 1－6

例 7 解不等式 $-x^2+4x-5\geqslant 0$.

解 将原不等式同解变形为

$$x^2-4x+5\leqslant 0$$

因为 $\Delta=16-20=-4<0$，所以方程 $x^2-4x-5=0$ 无实根.

使 $x^2-4x+5\leqslant 0$，如图 1－7 所示.

故不等式的解集为 $\varnothing$.

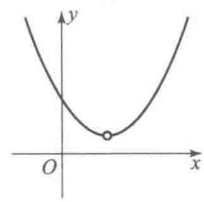


图 1－7

（三）含有绝对值的不等式

在实数中，对任意实数 a，

$$|a|=\begin{cases} a, & a>0 \\ 0, & a=0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

数 a 的绝对值 $|a|$ 在数轴上等于对应实数 a 的点到原点的距离.

由 $|a|$ 的这一几何意义可知：

不等式 $|x|\leqslant 3$ 的解集是

$$\{x \mid -3\leqslant x\leqslant 3\}=[-3,3]$$

不等式 $|x|>3$ 的解集是

$$\{x \mid x<-3 \text{ 或 } x>3\}=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$$

一般地，如果 $a>0$，则

$$|x|\leqslant a \Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$$

$$|x|>a \Leftrightarrow x<-a \text{ 或 } x>a$$

这个结果如图 1－8 所示.

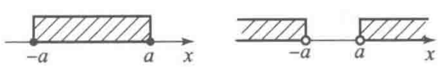


图 1－8

例 8 解不等式 $|2x-3|<5$.

解 这个不等式等价于

$$-5<2x-3<5$$

$$-2<2x<8$$

$$-1<x<4$$

所以原不等式的解集是 $(-1, 4)$.

例 9 解绝对值不等式:

(1) $1<|x-1|<2$;

(2) $|x+1|+|2x-1|>3$;

(3) $|3x+2|>|2x+3|$;

(4) $|x^2-x|<\frac{1}{2}x$.

解 (1) 原不等式等价于

$$\begin{cases}|x-1|<2\\|x-1|>1\end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases}-2<x-1<2\\x-1>1 \text{ 或 } x-1<-1\end{cases}$$

又等价于

$$\begin{cases}-1<x<3\\x>2 \text{ 或 } x<0\end{cases}$$

所以原不等式的解集为: $(-1, 0)\cup(2, 3)$.

(2) ①当 $x<-1$ 时, 原不等式为

$$-x-1-2x+1>3$$

即 $x<-1$.

所以当 $x<-1$ 时, 原不等式解为 $x<-1$.

②当 $-1\leqslant x<\frac{1}{2}$时, 原不等式为

$$x+1-2x+1>3$$

即 $x<-1$.

所以当 $-1\leqslant x<\frac{1}{2}$时, 原不等式无解.

③当 $x>\frac{1}{2}$时, 原不等式为

$$x+1+2x-1>3$$

即 $x>1$.

所以当 $x>\frac{1}{2}$时, 原不等式为 $x>1$.

故综合①②③原不等式的解集为$(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$.

(3) 将$|3x+2|>|2x+3|$两边平方, 得

$$9x^2+12x+4>4x^2+12x+9$$

即 $x^2>1$. 得

$$x>1 \text{ 或 } x<-1$$

所以原不等式的解集为$(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$.

（4）因为$|x^2-x|\geqslant 0$，
所以只有当$x>0$时，原不等式才有解.

原不等式等价$\begin{cases} x^2-x<\dfrac{1}{2}x \\ x^2-x>-\dfrac{1}{2}x \end{cases}$，

又因为$x>0$，所以有$\begin{cases} x-1<\dfrac{1}{2} \\ x-1>-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

即
$$\begin{cases} x<\dfrac{3}{2} \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

所以原不等式的解集为$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$.

习题 1.2

1. 设$a>0$，$b>0$，比较下列两式的大小：

（1）$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{b}{a+1}$；　　（2）$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{b+1}{a}$.

2. 用“>”“<”或“=”号填空：

（1）$a>b$，$c<d\Rightarrow a-c$ ________ $b-d$；

（2）$a>b>0$，$c<d<0\Rightarrow ac$ ________ bd；

（3）当c ________ 0时，$a>b$，得$ac>bc$；

（4）当c ________ 0时，$a>b$，得$ac^2>bc^2$；

（5）当c ________ 0时，$a>b$，得$ac<bc$；

（6）$a>0$，$b<0\Rightarrow ab$ ________ 0.

3. 已知$a>0$，$b>0$，$c>0$，求证：

（1）$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$；

（2）$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geqslant 3$.

4. 解下列不等式：

（1）$2x-3\leqslant x+1$；　　（2）$5x-3<0$；

（3）$15x-9x<10-4x$；　　（4）$3(x+5)-\dfrac{2}{3}\geqslant 2x-\dfrac{3}{2}$；

（5）$x^2+4x+5>0$；　　（6）$x^2-8x+16<0$；

（7）$-x^2+x+6\geqslant 0$；　　（8）$4x^2-4x+1>0$；

(9) $|x-2|\leqslant 5$;　　(10) $|x^2-3x-1|>3$;

(11) $|2x-3|>|3x+1|$;　　(12) $|x-2|>|x+1|-3$.

§1.3　函数

一、函数概念

在一个自然现象或技术过程中，常常有几个量同时变化，它们的变化并非彼此无关，而是互相联系着，这是物质世界的一个普遍规律. 下面列举几个有两个变量互相联系着的例子：

例 1　球半径 r 与该球的体积 V 互相联系着，$\forall x\in[0,+\infty)$ 都对应一个球的体积 V. 已知 r 与 V 之间的对应关系是

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

其中，π 是圆周率，是常数.

例 2　某地某日时间 t 与气温 T 互相联系着（见图 1－9），13：00 到 23：00 内任意时间 t 都对应着一个气温 T. 已知 t 与 T 的对应关系用图 1－9 的气温曲线表示. 横坐标表示时间 t，纵坐标表示气温 T. 曲线上任意点 $p(t,\ T)$ 表示在时间 t 对应着的气温是 T.

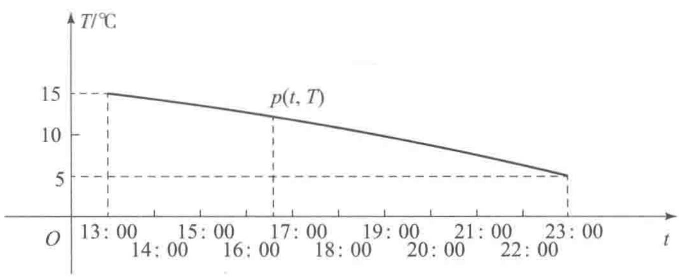


图 1－9

例 3　当气压为 101 325 Pa 时，温度 T 与水的体积 V 互相联系着，实测如表 1－2 所示.

表 1－2

$T/(℃)$	0	2	4	6	8	10	12	14
V/cm^3	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

对 $\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$ 中每一个温度 T 都对应一个体积 V，已知 T 与 V 的对应关系用上面表格表示.

上述 3 个例子中，分属于不同的学科，实际意义完全不同. 但是，从数学角度看，它们却有共同的特征：都有一个数集和一个对应关系，对于数集中任意数 x，按照对应关系都对应 $\mathbf{R}$ 中唯一的数. 于是有如下的函数概念：

定义　设 D 是非空实数集，若对 D 中任意数 $x(\forall x\in D)$，按照对应关系 f，总有唯一的

$y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的一个一元实函数，简称**一元函数或函数**，记为 f：$D\to\mathbf{R}$.

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值，表为 $y=f(x)$，x 称为自变量，y 称为因变量．数集 D 称为函数 f 的定义域，所有相应函数值 y 组成的集合 $f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为这个函数的值域.

注：本书仅讨论一元微积分学的内容，同时由于实数是微积分的基础，微积分中所涉及的数都是实数，因此今后我们考虑的函数都是指一元实函数.

根据函数定义，不难看到，上述例子皆为函数实例.

关于函数概念的几点说明：

（1）用符号“f：$D\to\mathbf{R}$”表示 f 是定义在数集 D 上的函数，十分清楚、明确．特别是在抽象的数学学科中使用这个函数符号更显得方便．但是，在微积分中，一方面要讨论抽象的函数 f；另一方面又要讨论大量具体的函数．在具体函数中需要将对应关系 f 具体化，使用这个函数符号就有些不便．为此在本书中约定，将“f 是定义在数集 D 上的函数”用符号“$y=f(x)$，$x\in D$”表示，当不需要指明函数 f 定义域时又可简写为“$y=f(x)$”，有时甚至笼统地说“$f(x)$ 是 x 的函数”.

（2）在函数概念中，对应关系 f 是抽象的，只有在具体函数中，对应关系 f 才是具体的．例如，在上述这几个例子中：

例 1 中的 f 是一组运算：r 的立方乘以常数 $\frac{4}{3}\pi$.

例 2 中的 f 是图 1－9 所示的曲线.

例 3 中的 f 是所列的表格.

为了对函数 f 有个直观形象的认识，可将它比喻为一部“数值变换器”，将任意 $x\in D$ 输入到数值变换器之中，通过 f 的“作用”，输出来的就是 y，不同的函数就是不同的数值变换器．如图 1－10 所示.

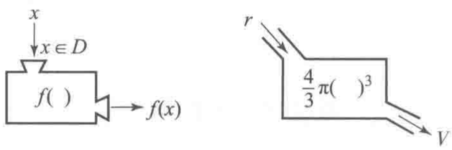


图 1－10

（3）根据函数定义，虽然函数都存在定义域，但常常并不明确指出函数 $y=f(x)$ 的定义域，这时认为函数的定义域是自明的．在数学中，有时不考虑函数的实际意义，仅抽象地研究用数学式子表达的函数．这时我们约定：定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合，$D=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $f(x)\in\mathbf{R}\}$．例如，函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 没有指出它的定义域，那么它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合．即 $[-1,1]=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $\sqrt{1-x^2}\in\mathbf{R}\}$.

而具有实际意义的函数，它的定义域要受实际意义的约束．例如，上述的例 1，半径为 r 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 这个函数，从抽象的函数来说，r 可取任意实数，但从它的实际意义来说，半径 r 不能取负数．因此，它的定义域是区间 $[0,+\infty)$.