奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

初中数学竞赛中的几何问题

沈文选 张垚 吴仁芳／编著

湖南师范大学出版社

奥赛经典

高级教程系列

◎新编数学奥林匹克教程
◎新编物理奥林匹克教程
◎新编化学奥林匹克教程
◎新编生物奥林匹克教程
◎信息学奥赛易学通 C++
◎信息学奥赛易学通算法
◎信息学奥赛易学通数据结构
◎物理奥林匹克实验教程
◎化学奥林匹克实验教程
◎生物奥林匹克实验教程

分级精讲与测试系列

◎初一数学 ◎初二数学
◎初三数学 ◎初二物理
◎初三物理 ◎初三化学
◎高一数学 ◎高二数学
◎高一物理 ◎高二物理
◎高一生物 ◎高二生物
◎高一化学 ◎高二化学

解题金钥匙系列

◎初中数学 ◎高中数学
◎初中物理 ◎高中物理
◎初中化学 ◎高中化学
◎高中生物 ◎高中信息学

专题研究系列

◎初中数学竞赛中的代数问题
◎初中数学竞赛中的几何问题
◎初中数学竞赛中的组合问题
◎初中数学竞赛中的数论问题
◎奥林匹克数学中的代数问题
◎奥林匹克数学中的几何问题
◎奥林匹克数学中的组合问题
◎奥林匹克数学中的数论问题
◎奥林匹克数学中的问题探究
◎奥林匹克数学中的真题分析

名师讲堂系列

◎小学数学竞赛中的秘密
◎初中数学竞赛中的秘密
◎高中数学竞赛中的秘密

超级训练系列

◎初中数学
◎高中数学

⊙策划组稿 廖小刚
周基东
⊙责任编辑 廖小刚
周基东
⊙装帧设计 书亦有道

ISBN 978-7-5648-0356-8

定价：54.00元

奥赛经典

专题研究系列

初中数学竞赛中的几何问题

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

◇沈文选 张垚 吴仁芳/编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛中的几何问题 / 沈文选,张垚,吴仁芳编著．—长沙：湖南师范大学出版社,2011.1

(奥赛经典丛书·专题研究系列)

ISBN 978-7-5648-0356-8

Ⅰ.①初… Ⅱ.①沈…②张…③吴… Ⅲ.几何课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 240229 号

初中数学竞赛中的几何问题

沈文选　张　垚　吴仁芳　编著

◇策　　划:廖小刚　周基东

◇责任编辑:廖小刚　周基东

◇责任校对:蒋旭东

◇出版发行:湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓区　邮编/410081

电话/0731-88873070　88873071　传真/0731-88872636

网址/http://press.hunnu.edu.cn

◇印刷:长沙超峰印刷有限公司

◇开本:787 mm×1092 mm　1/16 开

◇印张:22.75

◇字数:665 千字

◇版次:2011 年 1 月第 1 版　2021 年 1 月第 16 次印刷

◇书号:ISBN 978-7-5648-0356-8

◇定价:54.00 元

◆**沈文选**

男,1948 年生,湖南师范大学数学与计算机科学学院教授,硕士生导师,湖南师范大学数学奥林匹克研究所副所长,中国数学奥林匹克高级教练,全国初等数学研究会理事长,全国高等师范院校数学教育研究会常务理事,《数学教育学报》编委,湖南省高师教育研究会理事长,湖南省数学会初等数学委员会副主任,湖南省数学奥林匹克培训的主要组织者与授课者,湖南师大附中、长沙市一中数学奥林匹克培训主要教练.

已出版著作《走进教育数学》、《单形论导引》、《矩阵的初等应用》、《中学数学思想方法》、《竞赛数学教程》等 40 余部,发表学术论文《奥林匹克数学研究与数学奥林匹克教育》等 100 余篇,发表初等数学研究、数学思想方法研究和数学奥林匹克研究等文章 200 余篇.多年来为全国初、高中数学联赛,数学冬令营提供试题 20 余道,是 1997 年全国高中数学联赛,2002 年全国初中数学联赛,2003 年第 18 届数学冬令营命题组成员.

◆**张　垚**

男,1938 年生,湖南师范大学数学与计算机科学学院教授,中国数学奥林匹克高级教练,湖南省数学奥林匹克主教练,美国《数学评论》评论员.1987～1999 年任湖南省数学会副理事长兼普及工作委员会主任,负责全省数学竞赛的组织及培训工作,并主持了 1989 年全国初中数学联赛和 1997 年全国高中数学联赛的命题工作.

已出版图书《数学奥林匹克理论、方法、技巧》等 20 余部,发表学术论文 80 余篇.从 1992 年起享受国务院颁发的政府特殊津贴.曾荣获湖南省优秀教师,全国优秀教师,曾宪梓教育基金高等师范院校教师奖三等奖,湖南省教委科技进步奖二等奖等多项表彰和奖励.所培训的学生有 100 余人进入全国中学生数学冬令营,其中有 40 余人进入国家集训队,14 人进入国家队,在国际中学生数学竞赛(IMO)中,共夺得 10 枚金牌和 3 枚银牌.

◆**吴仁芳**

男,1975 年生,湖南师范大学数学与计算机科学学院讲师.主要研究方向:数学教育、数学竞赛.从 2006 年起负责湖南省数学奥林匹克组织和培训工作,为初、高中竞赛选手做了大量的培训工作.

已出版著作《奥赛经典·解题金钥匙初中数学》、《奥赛经典·解题金钥匙高中数学》、《奥赛经典·分级精讲与测试高一数学》、《新课程教学资源库·数学教学资料(1～3 年级)》、《新课程教学资源库·数学教学资料(7 年级)》、《中学几何研究》等,在国内外重要数学学术期刊发表学术论文 10 余篇.

奋发图强，力争上游，
为提高我国数学水平
而共同努力。

王梓坤敬书

▲王梓坤：中国科学院院士

湖南省中学生在国际数学奥林匹克中的获奖情况

届 次	获奖情况
第 28 届 (1987)	刘 雄(湖南湘阴一中) 金牌
第 32 届 (1991)	郭早阳(湖南师大附中) 银牌
第 34 届 (1993)	刘 炀(湖南师大附中) 金牌
第 35 届 (1994)	彭建波(湖南师大附中) 金牌
第 39 届 (1998)	艾颖华(湖南师大附中)进国家队 该届国家队未参赛
第 40 届 (1999)	孔文彬(湖南师大附中) 银牌
第 41 届 (2000)	刘志鹏(长沙市一中) 金牌
第 42 届 (2001)	张志强(长沙市一中) 金牌 余 君(湖南师大附中) 金牌
第 43 届 (2002)	肖 维(湖南师大附中) 金牌
第 44 届 (2003)	王 伟(湖南师大附中) 金牌 向 振(长沙市一中) 金牌
第 45 届 (2004)	李先颖(湖南师大附中) 金牌
第 48 届 (2007)	胡 涵(湖南师大附中) 银牌

前 言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动. 多年来的实践表明:这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣,焕发青少年的学习热情,吸引他们去读一些数学小册子,促使他们寻找机会去听一些名师的讲座;这项活动可以使参与者眼界大开,跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子,与其他高手切磋,培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神;这项活动可以使参与者求知欲望大增,使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等与日俱进. 这是一种有深刻内涵的文化现象,因此,越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外,还积极地参与到国际数学奥林匹克中.

我国自1986年参加国际数学奥林匹克以来,所取得的成绩举世公认,十多年来一直保持世界领先水平. 其中,截至2010年,湖南的学生已取得10块金牌、3块银牌的好成绩. 这优异的成绩,是中华民族精神的体现,是国人潜质的反映,是民族强盛的希望. 为使我国数学奥林匹克事业可持续发展,一方面要继续吸引越来越多的青少年参与,吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来,另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系,要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略,研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系. 为此,在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下,2003年,湖南师范大学成立了"数学奥林匹克研究所". 研究所组建一年后,我们几位教授都积极投身到研究所的工作中,除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外,还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理,以专题讲座的形式编写了《奥赛经典·专题研究系列》,高中分几何、代数、组合、数论、真题分析五卷,初中分几何、代数、组合、数论四卷. 这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料,而且还可激发解竞赛题的直觉或灵感. 从教育心理学角度上说,只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识,才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动.

编 者

目 录

第一章 三角形的内角和定理

【基础知识】

一个三角形的三个内角之间有下面的重要关系：

三角形内角和定理 三角形三个内角的和等于180°.

三角形中，一个内角的邻补角叫做这个三角形的一个外角. 显然有：

(1)三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角之和.

(2)三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角.

由于一个凸 n 边形可以用由一个顶点引出的 $n-3$ 条对角线分为 $n-2$ 个三角形. 易知：

(3)凸 n 边形的内角和为 $(n-2)\times180°$.

(4)凸 n 边形的外角和等于360°.

【典型例题与基本方法】

例1 在锐角△ABC 中，三个内角的度数都是质数，且最短边的长为1，则满足这样条件的互不全等的三角形个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 多于3

(2008年四川省竞赛题)

解 选A. 理由：

设三个内角的度数分别为 x、y、z 度，则 x、y、z 为质数，且 $x+y+z=180$ 为偶数，于是，x、y、z 中至少有一个为偶质数. 不妨设 x 为偶质数，则 $x=2$，从而，$y+z=178$.

不妨设 $y\leqslant z$，则 $z\geqslant89$.

因为△ABC 为锐角三角形，所以 $z<90$.

故 $z=89$，$y=89$.

经检验，$x=2$，$y=89$，$z=89$ 符合条件.

又因为最短边的长为1，故符合条件的三角形仅有1个.

例2 △ABC 中，三个内角的度数均为整数，且 $\angle A<\angle B<\angle C$，$4\angle C=7\angle A$，则 $\angle B=$____.

(1997年北京市竞赛题)

解 由 $4\angle C=7\angle A\Rightarrow\angle A=\frac{4}{7}\angle C$,

所以$\frac{4}{7}\angle C<\angle B<\angle C$.

因为$\angle A+\angle B+\angle C=180°$,

所以$\frac{4}{7}\angle C+\angle B+\angle C=180°\Rightarrow\angle B=180°-\frac{11}{7}\angle C$.

由$\frac{4}{7}\angle C<180°-\frac{11}{7}\angle C<\angle C$,

得 $70°<\angle C<84°$.

因$\frac{4}{7}\angle C$ 是整数,

所以$\angle C$ 的度数被 7 整除.

所以$\angle C=77°$,进而求得$\angle A=44°$, $\angle B=59°$.

例 3 已知三角形中两角之和为 $n°$,最大角比最小角大 $24°$,试确定 n 的取值范围. (1981 年北京市竞赛题)

解 设三角形三个内角的度数分别是 α,β,γ,且有

$\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$. ①

由题设

$\alpha-\gamma=24$, ②

(1)若 $\beta+\gamma=n$,则 $\alpha=180-n$.

由②得 $\gamma=156-n$,

$\beta=n-\gamma=2n-156$.

由①得 $180-n\geqslant2n-156\geqslant156-n$.

所以 $104\leqslant n\leqslant112$. ③

(2)若 $\alpha+\gamma=n$,则 $\beta=180-n$.

由②及 $\alpha+\gamma=n$,解得 $\alpha=\frac{n+24}{2}$, $\gamma=\frac{n-24}{2}$.

由①得$\frac{n-24}{2}\leqslant180-n\leqslant\frac{n+24}{2}$,

所以 $112\leqslant n\leqslant128$. ④

(3)若 $\alpha+\beta=n$,则 $\gamma=180-n$.

由②得 $\alpha=204-n$, $\beta=n-\alpha=2n-204$.

由①得 $108-n\leqslant2n-204\leqslant204-n$.

所以 $128\leqslant n\leqslant136$. ⑤

综合③,④,⑤得 $104 \leqslant n \leqslant 136$.

例 4　平面上有四个点 A,B,C,D,其中任何三点都不共线,则可从中选出某 3 点构成一个三角形,使得该三角形中至少有一个内角不超过 $45°$. 试证之.

（1963 年莫斯科市竞赛题）

证明　四个点 A,B,C,D 在平面上的分布只有两种可能的情况:

(1)若四点中有一点在另三点所成的三角形的内部,不妨设点 D 在 $\triangle ABC$ 的内部,如图 1－1(a).

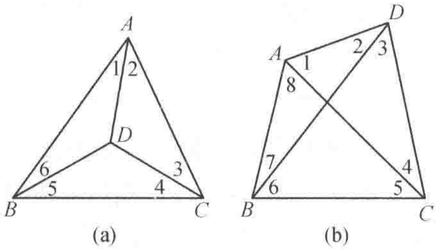

图 1－1

图中 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ 分别是 $\triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ 的内角,所以

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$.

由平均数原理知 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ 中至少有一个不超过 $30°$,当然更不会超过 $45°$.

(2)若四点中没有一点落在另三点所成的三角形的内部,如图 1－1(b),A,B,C,D 成为一个凸四边形的四个顶点.

由三角形内角和定理,得

$\angle 1+(\angle 2+\angle 3)+\angle 4=180°$,

$\angle 5+(\angle 6+\angle 7)+\angle 8=180°$,

所以,$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=360°$.

而 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ 分别是 $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ 某一个的内角. 根据平均数原理,这 8 个角中至少有一个不超过 $45°$.

综合(1),(2)命题得证.

【解题思维策略分析】

1. 分析图中三角形的内角、外角间关系

例 5　如图 1－2,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,D、E 分别为边 AB、AC 上的点,DM 平分 $\angle BDE$,EN 平分 $\angle DEC$. 若 $\angle DMN=110°$,则 $\angle DEA=$ (　　).

A. $40°$　　B. $50°$　　C. $60°$　　D. $70°$

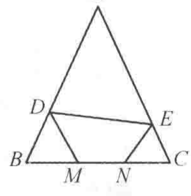

图 1－2

解　选 A. 理由:

因为 $AB=AC$,所以 $\angle B=\angle C$.

又 $\angle B=\angle DMN-\angle BDM=\angle DMN-\angle MDE$,

$\angle C=\angle MNE-\angle NEC=\angle MNE-\angle NED$,

则 $\angle DMN-\angle MDE=\angle MNE-\angle NED$,

即 $\angle DMN+\angle NED=\angle MNE+\angle MDE$.

在四边形 $DMNE$ 中,由

$\angle DMN+\angle NED=\angle MNE+\angle MDE$,

有 $\angle DMN+\angle NED=\angle MNE+\angle MDE=180°$.

则 $\angle NED=70°$

故 $\angle DEA=180°-2\angle NED=40°$.

2. 将折多边形问题转化为三角形问题

例 6 如图 1-3,折四边形 $BCDE$ 的一组对边 CD 与 BE 交于点 A,$\angle DEA$ 的角平分线与 $\angle BCA$ 的角平分线相交于 F.

求证:$\angle F=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

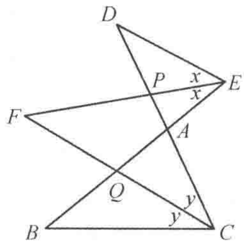

图 1-3

证明 设 $\angle DEF=\angle BEF=x$,$\angle BCF=\angle DCF=y$,

则由折四边形 $FEBC$ 得

$\angle F=\angle B+y-x$,

由折四边形 $DEFC$ 得

$\angle F=\angle D+x-y$,

相加即得 $2\angle F=\angle B+\angle D$.

所以 $\angle F=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

例 7 如图 1-4,求:$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$ 的度数.

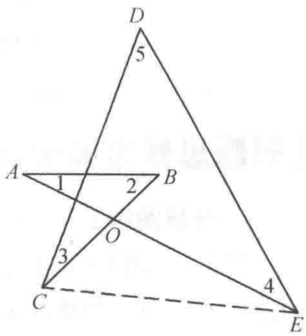

图 1-4

解 连结 CE,设 AE 与 BC 相交于点 O,由三角形内角和定理及 $\angle AOB=\angle COE$ 可得

$\angle 1+\angle 2=\angle OEC+\angle OCE$,

所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$

$=\angle OEC+\angle OCE+\angle 3+\angle 4+\angle 5$

$=(\angle OCE+\angle 3)+(\angle OEC+\angle 4)+\angle 5$

$=\angle DCE+\angle DEC+\angle CDE=180°$.

3. 巧妙处理凸多边形问题

例 8 一个凸 n 边形的内角中,恰有 4 个钝角,则 n 的最大值是(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

(1996 年北京市竞赛题)

解 选C. 理由:如图1-5. 由凸 n 边形的内角和为 $(n-2)180°$. 这个凸 n 边形恰有4个钝角,其余 $n-4$ 个是非钝角,所以这个凸 n 边形内角和小于 $4\times180°+(n-4)\times90°$.

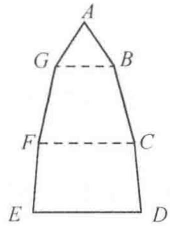

图1-5

由 $(n-2)\times180°<4\times180°+(n-4)\times90°$,

解得 $n<8\Rightarrow n\leqslant7$.

事实上,可以作出凸七边形 $ABCDEFG$:

$\angle A=60°$, $\angle B=\angle G=160°$,

$\angle C=\angle F=175°$, $\angle D=\angle E=85°$.

其中恰有4个钝角,所以 n 的最大值是7.

例9 试证明,凸多边形的内角中锐角的个数不能超过3个.

证明 假设凸多边形的内角中锐角的个数超过3个,则至少为4个. 这时,这4个内角的邻补角都是钝角,也就是说,这个多边形的外角中有4个钝角,这4个钝角之和大于360°,因此这个多边形的外角和大于360°,与"凸 n 边形的外角和等于360°"的结论矛盾.

因此,凸多边形的内角中锐角的个数不能超过3个.

【模拟实战】

A组

1. 已知△ABC 的三个内角的比是 $m:(m+1):(m+2)$,其中 m 是大于1的正整数,那么△ABC 是(　　).

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

（第16届"希望杯"竞赛题）

2. 如图1-6,在△PQR 中,$\angle QPR=40°$,$\angle Q$ 和 $\angle R$ 内角平分线相交于点 S,则 $\angle QSR=$(　　).

A. 110°　　B. 120°　　C. 135°　　D. 140°

3. 如图1-7,$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5$ 等于多少?　　（第3届"希望杯"竞赛题）

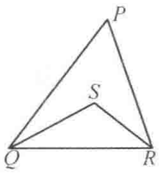

图1-6

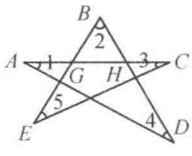

图1-7

4. 如图 1－8，$\angle COE=\alpha$，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$的度数．

（1999 年山东省竞赛题）

5. 如图 1－9，$\angle A=60°$，线段 BP，BE 把$\angle ABC$三等分，线段 CP，CE 把$\angle ACB$三等分．求$\angle BPE$的度数．

（第 8 届“希望杯”竞赛题）

6. 如图 1－10，DC 平分$\angle ADB$，EC 平分$\angle AEB$，若$\angle DAE=\alpha$，$\angle DBE=\beta$，则$\angle DCE$是多少？（用α，β表示）

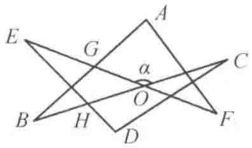

图 1－8

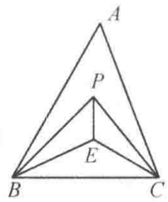

图 1－9

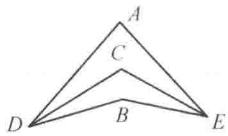

图 1－10

B 组

1. 如图 1－11，XK，ZF 分别是$\triangle XYZ$的高且交于一点 H，$\angle XHF=40°$，求$\angle XYZ$的度数．

（2000 年江苏省竞赛题）

2. 如图 1－12，已知$\triangle ABC$，D 是 BC 延长线上的点，F 是 AB 延长线上的点，$\angle ACD$的平分线交 BA 的延长线于点 E，$\angle FBC$的平分线交 AC 的延长线于点 G．若 $CE=BC=BG$，求$\angle ABC$的度数．

（2006 年国际城市竞赛题）

3. 如图 1－13 中的$\triangle ABC$，$\angle A=39°$，$\angle ABC$的外角三等分线是 BD，BE，$\angle ACB$的外角三等分线是 CF，CG，其中 BE 和 CG 的反向延长线交于 H，则$\angle BHC$的度数是____．

（第 17 届“五羊杯”竞赛题）

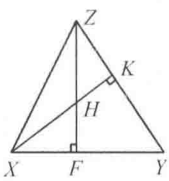

图 1－11

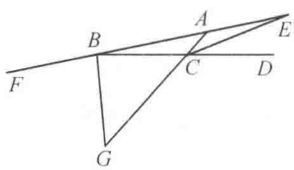

图 1－12

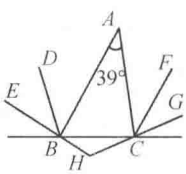

图 1－13

4. 如图 1－14，则$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=$（　　）.

A. 360°　　B. 450°　　C. 540°　　D. 720°

（2003 年全国联赛题）

5. 如图 1－15，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=n\cdot 90^\circ$，则 $n=$____.

（2007 年全国联赛题）

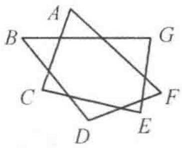

图 1－14

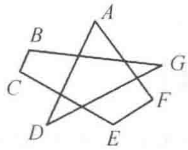

图 1－15